Bull. Soc. Royale Sciences Liège, 31e année, nº 3-4 1962, pp. 141-145

SUR LES QUADRIQUES AUTOPOLAIRES PAR RAPPORT A UNE QUADRIQUE

par LUCIEN GODEAUX
Membre de la Société

Nous nous proposons dans cette note d'indiquer une méthode pour obtenir l'équation d'une quadrique autopolaire par rapport à une quadrique donnée, c'est-à-dire d'une quadrique qui est sa propre polaire réciproque par rapport à la quadrique donnée. La méthode indiquée utilise la représentation des droites de l'espace par les points de l'hyperquadrique de Klein de l'espace à cinq dimensions. Cela peut paraître un inconvénient, mais cette représentation est depuis longtemps classique. D'ailleurs, il serait possible de traduire nos raisonnements sans sortir de l'espace à trois dimensions, mais cela risquerait d'être fort embrouillé.

1. Soient F une quadrique non conique et Θ la polarité par rapport à cette quadrique. Nous désignerons par $|r|$ le système des génératices rectilignes d'un mode de F et par $|r'|$ celui de l'autre mode.

A une droite s, Θ fait correspondre une droite s' et à s', la droite s. A un complexe linéaire de droites Σ, Θ fait correspondre un complexe linéaire Σ' et inversement, à Σ' le complexe Σ.

Soit Q l'hyperquadrique de Klein de S_5 représentant les droites de l'espace. A Θ correspond une transformation birationnelle de Q en soi qui fait correspondre aux sections hyperplanes des sections hyperplanes. Cette transformation est donc déterminée sur Q par une homographie H. Cette homographie est harmonique.

Aux droites r de F correspondent sur Q les points d'une conique ρ située dans un plan que nous désignerons par σ. Aux droites r' correspondent les points d'une seconde conique ρ' situées dans un plan σ'. Les plans σ, σ' sont conjugués par rapport à Q. Ils ne peuvent se rencontrer car autrement les génératrices r,r' appartiendraient à un même complexe linéaire, ce qui est impossible.

Les points des coniques ρ, ρ' sont unis pour l'homographie H, donc cette homographie est biaxiale harmonique d'axes σ, σ' (*).

2. Soit Φ une quadrique non conique autopolaire par rapport à F, c'est-à-dire qui coïncide avec sa polaire conjuguée par rapport à F. Désignons par α, α' les plans de S_5, conjugués par rapport à Q, qui coupent cette hyperquadrique suivant les coniques représentant les droites de Φ.

A une droite de Φ, Θ fait correspondre une droite de Φ, H donc fait correspondre α' à α ou bien les plans α, α' sont unis pour H. Dans le premier cas, Θ fait correspondre à une génératrice rectiligne de Φ une génératrice de l'autre mode. Le plan polaire d'un point de Φ par rapport à F est le plan tangent à Φ au point considéré, c'est-à-dire que Φ coïncide avec F. Nous laisserons de côté ce cas trivial. Les plans α, α' sont donc unis pour l'homographie H.

Un plan uni pour H s'appuie nécessairement suivant une droite sur un des axes σ, σ' et rencontre l'autre axe en un point. Nous supposerons que le plan α s'appuie sur σ suivant une droite r_0 et rencontre σ' en un point R'. Alors, puisque α et α' sont conjugués par rapport à Q, le plan α' rencontre σ' suivant une droite r'_0 et σ en un point R.

Observons que les plans α, α' étant conjugués par rapport à Q, l'hyperplan polaire de R doit contenir le plan α, qui coupe σ suivant r_0, donc la droite r_0 est la polaire de R par rapport à la conique ρ et de même r'_0 est la polaire de R' par rapport à la conique ρ'.

Les droites r_0, r'_0 étant choisies arbitrairement, les plans α, α' sont conjugués par rapport à Q. En effet, l'espace conjugué de la droite r_0 contient le plan σ' et le point R. L'hyperplan polaire de R' contient la droite r'_0 et le plan σ. Donc le plan conjugué de α contient r'_0 et R, c'est donc le plan α'.

On en conclut qu'*il existe* ∞^4 *quadriques autopolaires par rapport à une quadrique* F (celle-ci étant exclue).

3. Les coordonnées radiales de la droite yz sont

$$p_{ik} = y_i z_k - y_k z_i, \quad (i, k = 0, 1, 2, 3)$$

et si on considère ces quantités comme les coordonnées d'un point de l'espace S_5, l'équation de l'hyperquadrique Q est

$$p_{01}p_{23} + p_{02}p_{31} + p_{03}p_{12} = 0.$$

(*) Voir par exemple notre *Géométrie algébrique*, tome I (Paris, Masson et Liège, Sciences et Lettres, 1948), p. 222.

Nous poserons

$$p_{01} = X_0 + iX_3,\ p_{02} = X_1 + iX_4,\ p_{03} = X_2 + iX_5,$$
$$p_{23} = X_0 - iX_3,\ p_{31} = X_1 - iX_4,\ p_{12} = X_2 - iX_5$$

et en coordonnées X l'équation de Q s'écrit

$$X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 + X_5^2 = 0.$$

A un point X de Q correspond la droite commune aux quatre plans

$$X_0x_1 + X_1x_2 + X_2x_3 - i(X_3x_1 + X_4x_2 + X_5x_3) = 0, \quad (1)$$
$$X_0x_2 - X_1x_1 + X_2x_2 + i(X_3x_2 - X_4x_1 - X_5x_0) = 0, \quad (2)$$
$$X_0x_3 - X_1x_0 - X_2x_1 + i(X_3x_3 + X_4x_0 - X_5x_1) = 0, \quad (3)$$
$$X_0x_0 + X_1x_3 - X_2x_2 + i(- X_3x_0 + X_1x_3 - X_5x_2) = 0 \quad (4).$$

Nous prendrons pour σ le plan $X_3 = X_4 = X_5 = 0$ et pour σ', le plan $X_0 = X_1 = X_2 = 0$. La conique ρ a pour équations

$$X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 = 0,\ X_3 = X_4 = X_5 = 0$$

et la conique ρ',

$$X_3^2 + X_4^2 + X_5^2 = 0,\ X_0 = X_1 = X_2 = 0.$$

L'équation de la quadrique F est alors

$$F \equiv x_0^2 + x_1^2 + x_2^3 + x_3^2 = 0.$$

4. Prenons pour droites r_0, r_0' respectivement les droites

$$a_0X_0 + a_1X_1 + a_2X_2 = 0,\ \ X_3 = X_4 = X_5 = 0,$$
$$a_3X_3 + a_4X_4 + a_5X_5 = 0,\ \ X_0 = X_1 = X_2 = 0.$$

Le point R a pour coordonées $(a_0, a_1, a_2, 0, 0, 0)$ et le point R' $(0, 0, 0, a_3, a_4, a_5)$.

Désignons par R_1, R_2 les points de rencontre de r_0 avec la conique ρ et par R_1', R_2' ceux de r_0' avec la conique ρ'. Soient r_1, r_2 les droites de $|\, r \,|$ et r_1', r_2' celles de $|\, r' \,|$ qui correspondent à ces points sur la quadrique F. La quadrique Φ correspondant aux plans α', α' coupe F suivant le quadrilatère formé par ces droites.

Faisons parcourir au point X la droite r_0 ; les plans (1), (2), (3), (4) décrivent des faisceaux deux à deux projectifs et lorsque le point X coïncide avec R_1 ou R_2, ces quatre plans passent par r_1 ou r_2. En considérant deux de ces plans et en éliminant X_0, X_1, X_2 entre leurs équations et celles de r_0, on obtiendra une quadrique passant par r_1, r_2.

Posons pour abréger

$$\varphi_1 = x_0x_1 + x_2x_3,\ \ \varphi_2 = x_0x_2 + x_1x_3,\ \ \varphi_3 = x_0x_3 + x_1x_2,$$
$$\psi_1 = x_0x_1 - x_2x_3,\ \ \psi_2 = x_0x_2 - x_1x_3,\ \ \psi_3 = x_0x_3 - x_1x_2.$$

Les équations des six quadriques obtenues sont

$$\Phi_{12}\equiv a_0\varphi_3-a_1\psi_1-a_2(x_1^2+x_2^2)=0,\ \Phi_{34}\equiv a_0\varphi_2-a_1\psi_1+a_3(x_0^2+x_3^2)=0,$$
$$\Phi_{13}\equiv a_0\psi_3+a_1(x_1^2+x_3^2)-a_2\varphi_1=0,\ \Phi_{24}\equiv -a_0\psi_3+a_1(x_0^2+x_2^2)+a_2\varphi_1=0,$$
$$\Phi_{14}\equiv a_0(x_2^2+x_3^2)+a_1\varphi_3-a_2\psi_2=0,\ \Phi_{23}\equiv a_0(x_0^2+x_1^2)+a_1\varphi_3-a_2\psi_2=0.$$

Ces quadriques ne sont pas indépendantes, car on a

$$-\Phi_{12}+\Phi_{34}=a_2\mathrm{F},\ \Phi_{13}+\Phi_{24}=a_1\,\mathrm{F}_1-\Phi_{14}+\Phi_{23}=a_2\,\mathrm{F}.$$

D'une manière précise, ces quadriques appartiennent à un système linéaire $|\Phi_0|$ de dimension trois qui peut être défini par Φ_{12}, Φ_{13}, Φ_{14} et F. Ces quadriques passent toutes par les droites r_1, r_2 et forment le système complet des quadriques ayant ces deux droites pour base.

Faisons maintenant parcourir au point X la droite r_0'. On obtient cette fois six quadriques

$$\Phi_{12}'\equiv -a_3\psi_2+a_4\varphi_1-a_5(x_1^2+x_2^2)=0,\Phi_{34}'\equiv -a_3\psi_2+a_4\varphi_1+a_5(x_0^2+x_3^2)=0,$$
$$\Phi_{13}'\equiv a_3\varphi_3-a_4(x_1^2+x_3^2)-a_5\psi_1=0,\quad \Phi_{24}'\equiv a_3\varphi_3+a_4(x_0^2+x_2^2)-a_5\psi_1=0,$$
$$\Phi_{14}'\equiv -a_3(x_2^2+x_3^2)-a_4\psi_3+a_5\varphi_2=0,\ \Phi_{23}'\equiv a_3(x_0^2+x_1^2)-a_4\psi_3+a_5\varphi_2=0.$$

Ces quadriques appartiennent à un système linéaire $|\Phi_0'|$ de dimension trois, contenant F et qui a pour base les droites r_1', r_2'. Ce système peut être défini par les quadriques Φ_{12}', Φ_{13}', Φ_{14}', F. Observons que l'on a

$$-\Phi_{12}'+\Phi_{34}'=a_5\mathrm{F},\ -\Phi_{13}'+\Phi_{24}'=a_4\mathrm{F},\ -\Phi_{14}'+\Phi_{23}'=a_3\mathrm{F}.$$

5. La quadrique Φ doit appartenir aux deux systèmes $|\Phi_0|$, $|\Phi_0'|$. Ces systèmes ont en commun, outre la quadrique Φ, la quadrique F et par conséquent un faisceau de quadriques.

Commençons par rechercher s'il existe une quadrique commune aux systèmes

$$\lambda_1\Phi_{12}+\lambda_2\Phi_{13}+\lambda_3\Phi_{14}=0,\ \mu_1\Phi_{12}'+\mu_2\Phi_{13}+\mu_3\Phi_{14}'=0.$$

Par identification, on trouve

$$\lambda_1{:}\lambda_2{:}\lambda_3=a_5{:}-a_4{:}a_3,\ \mu_1{:}\mu_2{:}\mu_3=a_2{:}-a_1{:}a_0$$

et la quadrique

$$\Psi_1\equiv a_0a_4\varphi_1-a_1a_5\psi_1+a_0a_5\varphi_2-a_2a_3\psi_2+a_1a_3\varphi_3-a_2a_4\varphi_3$$
$$-a_2a_5(x_1^2+x_2^2)-a_1a_4(x_1^2+x_3^2)-a_0a_3(x_2^2+x_3^2)=0.$$

Cherchons ensuite s'il existe une quadrique commune aux réseaux

$$\lambda_1\Phi_{34}+\lambda_2\Phi_{24}+\lambda_3\Phi_{23}=0,\ \mu_1\Phi_{34}'+\mu_2\Phi_{24}'+\mu_3\Phi_{23}'=0. \qquad (5)$$

En identifiant, on trouve

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = a_5 : a_4 : a_3, \quad \mu_1 : \mu_2 : \mu_3 = a_2 : a_1 : a_0,$$

d'où la quadrique

$$\Psi_2 \equiv a_0 a_4 \varphi_1 - a_1 a_5 \psi_1 + a_0 a_5 \varphi_2 - a_2 a_3 \psi_2 + a_1 a_3 \varphi_3 - a_2 a_4 \psi_3$$
$$+ a_2 a_5 (x_0^2 + x_3^2) + a_0 a_4 (x_0^2 + x_2^2) + a_2 a_3 (x_0^2 + x_4^2) = 0.$$

On a

$$-\Psi_1 + \Psi_2 = (a_0 a_3 + a_1 a_4 + a_2 a_5)\,\mathrm{F}.$$

Les systèmes $|\Phi_0|$ et $|\Phi_0'|$ ont en commun les quadriques du faisceau $\Psi_1 + \lambda\,\mathrm{F} = 0$. La quadrique Φ appartient à ce faisceau et doit également appartenir au réseau (5). On en conclut que l'on a

$$\Phi \equiv \Psi_1 + (a_0 a_3 + a_1 a_4 + a_2 a_5)\,\mathrm{F} \equiv \Psi_{21}$$

ce qui résoud la question posée.

Liège, le 14 novembre 1961.