Bull. Soc. Royale Sciences Liège, 31e année, nº 5-6 1962, pp. 303-311

SUR LA CONSTRUCTION DE QUELQUES SURFACES ET VARIÉTÉS ALGÉBRIQUES

par Lucien GODEAUX,
Membre de la Société

Dans cette note, nous considérons deux variétés représentant l'involution engendrée dans un espace linéaire à cinq dimensions par une homographie biaxiale harmonique dont les axes sont deux plans. L'une de ces variétés est, dans un espace linéaire à onze dimensions, obtenue de la manière suivante : dans cet espace, on considère deux espaces linéaires à cinq dimensions ne se rencontrant pas et dans chacun de ces espaces une surface de Veronese. La variété est l'intersection des cônes projetant de chacun des espaces à cinq dimensions la surface de Veronese de l'autre. Cette variété est d'ordre seize et a les deux surfaces de Veronese comme surfaces quadruples. L'autre variété est la variété de Segre représentant les points de deux plans, d'ordre six, dans un espace linéaire à huit dimensions. Chaque point de cette variété représente les couples de l'involution appartenant à une droite s'appuyant sur les deux axes de l'homographie.

Nous construisons sur ces variétés certaines variétés et surfaces, notamment des surfaces de genres $p_a = P_4 = 1$, ou de genres $p_a = P_3 = 0, P_2 = 1$, ou encore une surface dont les sections hyperplanes constituent le système canonique.

Nos développements pourraient s'étendre sans difficulté à l'étude des variétés représentant l'involution engendrée par une homographie biaxiale harmonique ayant deux axes de dimension h dans un espace linéaire à $2h - 1$ dimensions (*).

Manuscrit reçue le 18 janvier 1962.

(*) Voir sur ce point notre note *Sur les involutions du second ordre appartenant aux surfaces intersections complètes d'hyperquadriques* (Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique, 1942, pp. 751-767).

1. Considérons, dans un espace linéaire S_5 à cinq dimensions, l'homographie biaxiale harmonique H d'équations

$$\frac{y_0'}{y_0} = \frac{y_1'}{y_1} = \frac{y_2'}{y_2} = \frac{z_0'}{-z_0} = \frac{z_1'}{-z_1} = \frac{z_2'}{-z_2},$$

dont les axes sont le plan η_0 d'équation $z_0 = z_1 = z_2 = 0$ et le plan ζ_0 d'équations $y_0 = y_1 = y_2 = 0$.

Nous représenterons par $\varphi(y) \equiv \varphi(y_0, y_1, y_2) \equiv a_y^2$ une forme algébrique du second degré en y_0, y_1, y_2 et par $\psi(z) \equiv \psi(z_0, z_1, z_2) \equiv b_z^2$ une forme algébrique du second degré en z_0, z_1, z_2, par $f(y, z) \equiv c_y c_z$ une forme bilinéaire en y et z.

Il existe deux systèmes linéaires d'hyperquadriques appartenant à l'involution I du second ordre engendrée par l'homographie H. L'un a pour équation

$$\varphi(y) + \psi(z) = 0 \tag{1}$$

et l'autre

$$f(y, z) = 0. \tag{2}$$

Le premier a la dimension onze et le second la dimension huit. Nous obtiendrons des variétés images de l'involution I en rapportant projectivement soit les hyperquadriques (1) aux hyperplans d'un espace linéaire S_{11}, soit les hyperquadriques (2) aux hyperplans d'un espace S_8.

2. Posons

$$Y_{ik} = y_i y_k, \quad Z_{ik} = z_i z_k, \quad (i, k = 0, 1, 2).$$

Les déterminants

$$\begin{vmatrix} Y_{00} & Y_{01} & Y_{02} \\ Y_{10} & Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{20} & Y_{21} & Y_{22} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} Z_{00} & Z_{01} & Z_{02} \\ Z_{10} & Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{20} & Z_{21} & Z_{22} \end{vmatrix}$$

sont de caractéristique un.

Rapporter projectivement les hyperquadriques (1) aux hyperplans d'un espace S_{11} à onze dimensions revient à prendre les quantités Y_{ik}, Z_{ik} comme coordonnées des points de cet espace. Dans l'espace à cinq dimensions Σ_1, d'équations $Z_{ik} = 0$, le premier des déterminants (3) représente une surface de Veronese Φ_1 et dans l'espace à cinq dimensions Σ_2 d'équations $Y_{ik} = 0$, le second des déterminants représente une surface de Veronese Φ_2.

La variété image de l'involution I dans S_{11} est l'intersection des cônes à huit dimensions projetant Φ_1 de Σ_2 et Φ_2 de Σ_1. C'est une variété V_5^{16} à cinq dimensions, d'ordre seize, puisque les surfaces de Veronese sont du quatrième ordre. Cette variété possède comme surfaces quadruples les surfaces Φ_1 et Φ_2.

Pour voir ce qui correspond dans S_{11} aux hyperquadriques (2), élevons les deux membres de leur équation au carré. On a

$$(\Sigma\lambda_{ik}y_iz_k)^2 \equiv \Sigma\lambda_{ik}\lambda_{jh}y_iy_jz_kz_h \equiv \Sigma\lambda_{ik}\lambda_{jh}Y_{ij}Z_{kh} = 0.$$

Cette dernière équation représente une hyperquadrique passant par les espaces Σ_1, Σ_2 et par suite par les surfaces Φ_1, Φ_2. Cette hyperquadrique engendre un système de dimension huit dont les éléments V_{10}^2 touchent la variété V_5^{16} en chaque point d'intersection.

En d'autres termes, la variété V_5^{16} appartient à l'enveloppe des hyperquadriques V_{10}^2.

3. Considérons dans S_5 deux hyperquadriques

$$\varphi(y) + \psi(z) = 0, \; \varphi'(y) + \psi'(z) = 0.$$

Elles déterminent une variété V_3 appartenant à l'involution I et dont l'image est une variété V_3^{16} section de V_5^{16} par un espace linéaire à neuf dimensions.

Sur la variété V_3^4, l'involution I détermine une involution présentant huit points unis, à savoir

$$\varphi(y) = 0, \; \varphi'(y) = 0, \; z_0 = z_1 = z_2 = 0, \tag{4}$$

$$\psi(z) = 0, \; \varphi'(z) = 0, \; y_0 = y_1 = y_2 = 0. \tag{5}$$

Sur la variété image V_3^{16} nous devons donc avoir huit points de diramation quadruples pour la variété, le cône tangent en chacun de ces points ayant pour sections hyperplanes des surfaces de Veronese. Il en est bien ainsi : l'espace S_9 de V_3^{16} coupe chacun des espaces Σ_1, Σ_2 suivant un espace à trois dimensions rencontrant respectivement les surfaces Φ_1, Φ_2 en quatre points quadruples pour V_3^{16}. Le cône tangent en un de ces points situé sur Φ_1 (ou sur Φ_2) projetant Φ_2 (ou Φ_1).

On peut observer qu'à une droite yz correspond sur V_5^{16} une droite YZ. La variété V_3^4 contient seize droites yz joignant les points (4) aux points (5), donc sur V_3^{16} on a seize droites joignant les points quadruples situés sur Φ_1 aux points quadruples situés sur Φ_2 ;

4. Considérons la surface V intersection des trois hyperquadriques

$$\varphi(y) + \psi(z) = 0, \; \varphi'(y) + \psi'(z) = 0, \; \varphi''(y) + \psi''(z) = 0.$$

En général, cette surface ne rencontre pas les plans η_0, ζ_0 et par conséquent I détermine sur cette surface une involution privée de points unis. A la surface V_2^8 correspond sur V_5^{16} la section de cette variété par un espace linéaire à huit dimensions.

Comme on sait, la surface V_2^8 est de genres $p_a = P_4 = 1$ et la surface image V_2^{16} de genres $p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$ (surface d'Enriques).

Les sections de la variété V_5^{16} par des espaces linéaires à huit dimensions sont des surfaces dépourvues de courbe canonique et ayant des courbes bicanoniques d'ordre zéro.

Le genre des sections hyperplanes de la surface V_2^{16} est égal à neuf et cette surface est donc normale dans un espace à huit dimensions.

5. Considérons maintenant la surface V d'équations

$$\varphi(y) + \psi(z) = 0, \varphi'(y) + \psi'(z) = 0, f(y, z) = 0.$$

Sur cette surface, I détermine une involution présentant huit points unis et par conséquent la surface image V_2^{16} est, comme la surface V_2^8, de genres $p_a = P_4 = 1$.

La surface image V_2^{16} appartient à un espace S_9 à neuf dimensions et en tout point de cette surface, il y a une hyperquadrique V_{10}^2 touchant la section V_3^{16} de V_5^{16} par l'espace S_9.

La surface V_2^{16} possède huit points doubles coniques aux points de rencontre de Φ_1, Φ_2 avec l'espace S_9. De plus, elle contient huit droites joignant les quatre premiers de ces huit points aux quatre derniers.

6. Examinons maintenant l'image de l'involution I obtenue en rapportant projectivement les hyperquadriques (2) aux hyperplans d'un espace S_8.

Observons qu'une hyperquadrique $f(y, z) = 0$ est le lieu de ∞^3 droites yz et contient les plans η_0, ζ_0. Une seconde hyperquadrique $f'(y, z) = 0$ coupe la première suivant une variété à trois dimensions d'ordre quatre formée de ∞^2 droites yz. Une troisième hyperquadrique $f''(y, z) = 0$ coupe cette variété suivant une surface d'ordre huit comprenant les plans η_0, ζ_0 et complétée par une surface du sixième ordre lieu de ∞^1 droites yz. Cette surface est le lieu des points joignant deux cubiques planes situées l'une dans le plan η_0, l'autre dans le plan ζ_0. Enfin, une quatrième hyperquadrique $f'''(y, z) = 0$ coupe la surface précédente suivant ces deux cubiques et suivant six droites yz.

De tout ceci, on conclut qu'en rapportant projectivement les hyperquadriques (2) aux hyperplans de S_8, on obtient une variété Ω_4^6 dont chaque point représente les ∞^1 couples de l'involution I situés sur une droite yz.

Si nous posons

$$X_{ik} = y_i z_k,$$

les équations de la variété Ω_4^6 sont obtenues en supposant que tous les mineurs du déterminant

$$\begin{vmatrix} X_{00} & X_{01} & X_{02} \\ X_{10} & X_{11} & X_{12} \\ X_{20} & X_{21} & X_{22} \end{vmatrix}$$

sont nuls. La variété Ω_4^6 est donc la variété de Segre représentant les couples de points des deux plans η_0, ζ.

Aux espaces à trois dimensions projetant ζ_0, des points de η_0 correspondent sur Ω_4^6 des plans η et aux espaces à trois dimensions projetant η_0 des points de ζ_0 des plans ζ. On a ainsi sur Ω_4^6 les deux congruences $\{\eta\}$, $\{\zeta\}$ de plans unisécants.

7. Aux ∞^4 couples de I situés sur une hyperquadrique $\varphi(y) + \psi(z) = 0$ correspondent les points de la variété.

Considérons la variété V_3^4 commune à deux hyperquadriques

$$\varphi(y) + \psi(z) = 0, \varphi'(y) + \psi'(z) = 0. \tag{6}$$

Nous avons

$$\frac{X_{00}}{y_0} = \frac{X_{10}}{y_1} = \frac{X_{20}}{y_2} = \rho, \quad \frac{X_{00}}{z_0} = \frac{X_{01}}{z_1} = \frac{X_{02}}{z_2} = \rho',$$

d'où

$$\rho^2\varphi(X_{001}X_{10}, X_{20}) + \rho'^2\psi(X_{00}, X_{01}, X_{02}) = 0,$$
$$\rho^2\varphi'(X_{00}, X_{10}, X_{20}) + \rho'^2\psi'(X_{00}, X_{01}, X_{02}) = 0,$$

d'où en éliminant ρ, ρ',

$$\varphi(X_{001}X_{10}, X_{20})\psi'(X_{00},X_{01},X_{02}) - \varphi'(X_{00},X_{10},X_{20})\psi(X_{00},X_{01},X_{02}) = 0.$$

En posant

$$\varphi \equiv a_{00}y_0^2 + a_{11}y_1^2 + \ldots + a_{12}y_{11}y_2, \quad \psi \equiv b_{00}z_0^2 + b_{11}z_1^2 + \ldots + b_{12}z_1z_2,$$
$$\varphi' \equiv a'_{00}y_0^2 + a'_{11}y_0^2 + \ldots + a'_{12}y_1y_1^2, \quad \psi' \equiv b'_{00}z_0^2 + b'_{11}z_1^2 + \ldots + b'_{12}z_1z_2$$

et en utilisant les équations de Ω_4^6, on voit que l'on peut diviser les deux membres de l'équation par X_{00}^2. On obtient

$$\Sigma(a'_{ij}b'_{hk} - a'_{ij}b_{hk})\, X_{ik}X_{jk} = 0. \tag{7}$$

A l'involution déterminée sur la variété V_3^4 d'équation (6) correspond une variété image Ω_3^{12} section de Ω_4^6 par l'hyperquadrique (7).

Observons que l'on pourrait obtenir la relation (7) en développant le déterminant

$$\begin{vmatrix} \varphi(y) & \psi(z) \\ \varphi'(y) & \psi'(z) \end{vmatrix} = 0$$

et en substituant les X aux yz.

Remarquons que la variété Ω_3^{12} est aussi l'image de la variété V_3^4 d'équations

$$\varphi(y) + \lambda\psi(z) = 0, \;\; \varphi'(y) + \lambda\psi'(z) = 0.$$

Sur la variété V_3^4, l'involution possède huit points unis, quatre dans chacun des plans η_0, ζ_0. A ces points unis correspondent huit droites sur la variété Ω_3^{12} ; elles forment deux groupes de quatre droites de diramation pour la correspondance entre Ω_3^{12} et V_3^4. Chacune des droites du premier groupe rencontre chacune des droites du second groupe.

8. Considérons maintenant la surface V_2^8 commune aux hyperquadriques

$$\varphi(y) + \psi(z) = 0, \;\; \varphi'(y) + \psi'(z) = 0, \;\; \varphi''(y) + \psi''(z) = 0,$$

où nous posons

$$\varphi'' \equiv a''_{00}y_0^2 + a''_{11}y_1^2 + \ldots + a''_{12}y_1y_2, \quad \psi'' \equiv b''_{00}z_0^2 + b''_{11}z_1^2 + \ldots + b''_{12}z_1z_2.$$

A cette surface correspond sur Ω_4^6 la surface Ω_2 commune aux hyperquadriques

$$\left.\begin{aligned} \Sigma(a'_{ij}b''_{hk} - a''_{ij}b'_{hk})\, X_{ih}X_{jk} = 0, \\ \Sigma(a''_{ij}b_{hk} - a_{ij}b''_{hk})\, X_{ih}X_{jk} = 0, \\ \Sigma(a_{ij}b'_{hk} - a'_{ij}b_{hk})\, X_{ih}X_{jk} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

L'intersection des hypersurfaces représentées par les deux premières équations (8) se compose de la surface Ω_2 et de la surface θ lieu des points homologues des droites yz communes aux hyperquadriques de S_5

$$\varphi''(y) = 0, \;\; \psi''(z) = 0.$$

Les droites yz communes à ces deux hyperquadriques s'appuyent sur deux coniques situées dans les plans η_0, ζ_0 et le nombre de ces droites appartenant à deux hyperquadriques

$$f(y, z) = 0, \; f'(y, z) = 0$$

est égal à huit. En effet, ces deux dernières hyperquadriques établissent une correspondance quadratique entre les plans η_0, ζ_0 et à la conique située dans le plan η_0 correspond une quartique du plan ζ_0 rencontrant en huit points la conique de ce plan. La surface θ est donc d'ordre huit et par conséquent la surface (8) est une surface Ω_2^{16} d'ordre seize.

Cette surface Ω_2^{16} représentant une involution privée de points unis appartenant à une surface de genres $p_a = P_4 = 1$ (intersection de trois hyperquadriques) a les genres $p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$. C'est un modèle projectif de la surface d'Enriques.

9. Fixons l'attention sur la surface V_2^8 intersection des hyperquadriques

$$\varphi(y) + \psi(z) = 0,\ \varphi'(y) + \psi'(z) = 0,\ f(y, z) = 0.$$

Il lui correspond une surface Ω_2^{12} section de la variété Ω_3^{12} par l'hyperplan correspondant à $f(y, z) = 0$.

L'involution déterminée par l'homographie H sur la surface V_2^8 possède huit points unis et par conséquent elle a, comme V_2^8, les genres $p_a = P_4 = 1$. Aux points unis de l'involution correspondent sur la surface Ω_2^{12} huit droites de diramation. Ces huit droites se rencontrent en seize points qui correspondent aux droites yz joignant les points unis situés dans η_0 aux points unis situés dans ζ_0.

Les sections hyperplanes de la variété Ω_3^{12} *sont des surfaces de genres* $p_a = P_4 = 1$.

10. Nous allons maintenant considérer la surface F intersection de deux hyperquadriques

$$\varphi(y) + \psi(z) = 0,\ \varphi'(y) + \psi'(z) = 0$$

avec l'hypersurface du quatrième ordre

$$\varphi_4(y) + f_2(y, z) + \psi_4(z) = 0, \tag{9}$$

où φ_4 est une forme du quatrième degré en y_0, y_1, y_2, ψ_4 une forme du quatrième degré en z_0, z_1, z_2 et enfin $f_2(y, z)$ une forme du second degré séparément en y_0, y_1, y_2 et z_0, z_1, z_2.

La surface F est d'ordre seize et ses courbes canoniques sont découpées par les hyperquadriques. Elle a donc les genres $p_a = p_g = 19$, $p^{(1)} = 65$. Sur F, l'involution I détermine une involution privée de points unis et par conséquent la surface F' image de cette involution a les genres $p_a = p_g = 9$, $p^{(1)} = 33$.

Nous obtiendrons un modèle de la surface F′ dont les sections hyperplanes sont les courbes canoniques en déterminant la surface tracée sur la variété Ω_4^6. A cet effet, en raisonnant comme plus haut, on voit que la surface F′ appartient aux hypersurfaces dont les équations sont obtenues en effectuant les multiplications indiquées et en introduisant les X au lieu des yz, dans les relations

$$\varphi(y)\psi'(z) - \varphi'(y)\psi'(z) = 0,$$

$$\varphi_4(y)\,\varphi^2(z) - f_2(y, z)\varphi(y)\psi(z) + \psi_4(z)\varphi^2(y) = 0,$$

$$\varphi_4(y)\psi'^2(z) - f_2(y, z)\varphi'(y)\psi'(z) + \psi_4(z)\varphi'^2(y) = 0.$$

La première de ces hypersurfaces passe simplement par les surfaces θ, θ' homologues respectivement des variétés $\varphi = 0$, $\psi = 0$ et $\varphi' = 0$, $\psi' = 0$. La seconde équation représente une hypersurface du quatrième ordre passant doublement par la surface θ et la troisième équation une hypersurface du quatrième ordre passant doublement par la surface θ'. L'intersection des deux premières hypersurfaces se compose de la surface F′ et de la surface θ comptée deux fois. La surface F′ est donc bien d'ordre 32. De même, la première et la dernière hypersurfaces (10) ont en commun la surface F′ et la surface θ' comptée deux fois.

Les hypersurfaces représentées par les deux dernières équations (10) ont en commun, en dehors de F′, la surface lieu des points homologues des droites yz appartenant à la variété (9).

Pour qu'une droite yz appartienne à la variété (9), il faut qu'elle s'appuie sur la courbe γ_1,

$$z_0 = z_1 = z_2 = 0, \ \varphi_4(y) = 0$$

et sur la courbe γ_2,

$$y_0 = y_1 = y_2 = 0, \ \psi(z) = 0.$$

En outre, on doit avoir $f_2(y, z) = 0$. A un point de γ_1, cette équation fait correspondre dans le plan ζ_0 une conique rencontrant γ_2 en huit points. Donc, par un point de γ_1 passent huit droites appartenant à l'hypersurface d'équation (9) et de même, par un point de γ_2 passent huit droites appartenant à cette variété. On en conclut que le lieu de ces droites est une variété à trois dimensions d'ordre $8.4 = 32$, passant huit fois par γ_1, γ_2.

La variété commune à deux hyperquadriques $f(y, z) = 0$, $f'(y, z) = 0$ coupe la variété précédente suivant $4.32 - 2.4.8 = 64$

droites. On en conclut que les deux dernières hypersurfaces (10) ont en commun, outre F', sur Ω_4^6, une surface d'ordre 64.

On a ainsi, *dans* S_8, *une surface d'ordre* 32 *dont les sections hyperplanes constituent le système canonique.*

Liège, le 11 janvier 1962.