LUCIEN GODEAUX
1962
Rendiconti di Matematica
(3-4) Vol. 21, pp. 419-424.

Sur la construction de quelques surfaces irrégulières

par **LUCIEN GODEAUX** (Liège)

Si L est une courbe algébrique contenant une involution cyclique γ d'ordre p, la surface F qui représente les couples de points non ordonnés de la courbe L contient une involution I, cyclique, d'ordre p. Une surface F^*, image de cette involution est à son tour une transformée rationnelle de la surface F' représentant les couples de points non ordonnés de la courbe L' image de l'involution γ. Lorsque l'ordre p de γ est supérieur à deux, l'involution I ne possède qu'un nombre fini de points unis. Nous avons étudié ce cas et déterminé les caractères de la surface F^*, qui a même irrégularité que la surface F' [1]. Dans cette Note, nous considérons le cas $p = 2$. L'involution I possède alors une courbe unie et en général certains points unis isolés. Nous déterminons les caractères de la surface F^* qui dans ce cas également a la même irrégularité que la surface F'.

1. Considérons une courbe algébrique L, de genre π, contenant une involution γ du second ordre, de genre π' et assujettie à cette seule condition. Nous supposerons que ni la courbe L, ni la courbe L' image de l'involution γ, ne sont hyperelliptiques.

L'involution γ possède

$$\delta = 2(\pi - 1) - 4(\pi' - 1)$$

points doubles, que nous désignerons par $U_1, U_2, \ldots, U_\delta$.

[1] *Costruzione di superficie algebriche irregolari* (Atti del Convegno Internazionale di Geometria Algebrica, tenuto a Torino, 1961, pp. 63-74).

Prenons pour L la courbe canonique d'ordre $2\pi - 2$ d'un espace linéaire S à $\pi - 1$ dimensions. L'involution γ est déterminée sur L par une homographie harmonique τ. Soient ξ_0, ξ_1 les axes ponctuels de cette homographie. On sait que les transformés des groupes canoniques de la courbe L' sur L, augmentés du groupe des points unis de γ, donnent des groupes canoniques de L. Par conséquent les points unis de γ appartiennent tous à un des axes ξ_0, ξ_1, par exemple à ξ_0. Les hyperplans de S passant par ξ_0 sont par suite en nombre $\infty^{\pi'-1}$. L'espace ξ_1 a la dimension $\pi' - 1$ et l'espace ξ_0 la dimension

$$r = \pi' - 2 - \frac{1}{2}\delta .$$

Nous designerons par $y_0, y_1, \dots, y_r$ les coordonnées d'un point de ξ_0, par $z_0, z_1, \dots, z_{\pi-1}$ celles d'un point de ξ_1, de telle sorte que les coordonnés d'un point de l'espace S soient $y_0, y_1, \dots, y_r$, $z_0, z_1, \dots, z_{\pi-1}$. Dans ces conditions les équations de l'homographie τ peuvent s'écrire

$$\varrho y_i' = y_i , \qquad \varrho z_k' = - z_k .$$

2. Soient F la surface qui représente les couples de points non ordonnés de la courbe L et F' celle qui représente les couples de points non ordonnés de la courbe L'.

Considérons un point P' de F'; il représente deux points A_1', A_2' de L'. A ces points correspondent sur L deux couples de points A_{11}, A_{12} et A_{21}, A_{22} de γ. Soient respectivement P_1, P_1', P_2, P_2' les points de F qui représentent les couples de points $A_{11} A_{21}$, $A_{12} A_{22}$, $A_{11} A_{22}$, $A_{12} A_{21}$. Ces quatre points engendrent une involution J d'ordre quatre dont F' est une image.

Au point P_1 correspond sur L le couple A_{11}, A_{21} auquel τ fait correspondre le couple A_{12}, A_{22} représenté sur F par le point P_2'. Il existe donc une transformation birationnelle T de F en soi faisant correspondre P_1' à P_1 et, comme il est facile de le voir, P_1 à P_1'. Cette transformation fait aussi correspondre au point P_2 le point P_2' et à ce dernier point, le point P_2. Les couples de points P_1 et P_1', P_2 et P_2' appartiennent à une involution I, du second ordre, avec laquelle J est composée. La transformation T est involutive.

Désignons par F^* une surface image de l'involution I. Aux couples de points P_1 et P_1', P_2 et P_2' correspondent sur F^* deux points P_1^*, P_2^* engendrant une involution I' ayant la surface F' comme image.

Nous désignerons par H les courbes de F représentant les couples de points de L dont l'un est fixe. Les courbes H, de genre π, forment un système continu $\{H\}$, simplement infini, de degré un et d'indice deux, dont l'enveloppe est la courbe K qui représente les couples de points de L formés de deux points coïncidents. Nous désignerons par H' et K' les courbes de genre π' de la surface F' ayant une définition analogue.

Aux couples de point de γ correspondent sur F les points d'une courbe K_0 de genre π', qui est unie pour l'involution I.

Désignons par U_{ik} le point de F qui représente le couple de points U_i, U_k. Les courbes K et K_0 se rencontrent aux δ points $U_{11}, U_{22}, \dots, U_{\delta\delta}$.

Soient $H_1, H_2, \dots, H_\delta$ les courbes H qui touchent K respectivement aux points $U_{11}, U_{22}, \dots, U_{\delta\delta}$. Les courbes H_i, H_k se rencontrent au point U_{ik}.

Sur une courbe H_i, de genre π, I détermine une involution du second ordre ayant comme points unis $U_{i1}, U_{i2}, \dots, U_{ii}, \dots, U_{i\delta}$.

Les points U_{ik} sont unis pour les involutions I et J. Un de ces points, compté quatre fois, forme un groupe de J.

3. Soient $K^*, K_0^*, H_1^*, H_2^*, \dots, H_\delta^*$ les courbes qui correspondent sur F^* respectivement aux courbes $K, K_0, H_1, H_2, \dots, H_\delta$. Soit en outre U_{ik}^* le point qui correspond au point U_{ik}.

Sur la courbe K, l'involution I détermine une involution ayant comme points unis $U_{11}, U_{22}, \dots, U_{\delta\delta}$ et par conséquent la courbe K^* est de genre π'. La courbe K_0^*, de diramation pour la correspondance (1, 2) existant entre F^* et F, est également de genre π'. Elle rencontre K^* aux point $U_{11}^*, U_{22}^*, \dots, U_{\delta\delta}^*$.

Considérons deux points A_1, A_1' de L formant un couple de γ. A ce couple correspond un point P de la courbe K_0. Aux points A_1, A_1' comptés chacun deux fois, correspondent deux points P_1, P_1' de K, formant un couple de I. Les points P_1, P_1' et P, ce dernier compté deux fois, forment un groupe de l'involution J. Au couple P_1, P_1' correspond un point P_1^* de K^* et au point P, un point P^* de K_0^*. On voit donc que les courbes K^*, K_0^* sont conjuguées dans l'involution I' et il est facile de voir qu'elles correspondent à la courbe K' de F'.

Fixons maintenant l'attention sur la courbe H touchant K en P_1 et sur la courbe H' touchant K en P_1'. A la courbe H, T fait correspondre la courbe H' et le point commun à H et H' est le point P de K_0. Aux courbes H, H' correspond sur F^* une courbe H^* de genre π, touchant la courbe K^* en P_1^* et la courbe K_0^* en P^*. La courbe H^* appartient à l'involution I'.

Les points U_{ik}^* sont unis pour l'involution I'. Nous allons voir que les courbes $H_1^*, H_2^*, \ldots, H_\delta^*$ sont également unis pour cette involution.

Considérons le point U_i de L et la courbe H_i. Soient A, A' deux points de L formant un groupe de γ. Au point P de H_i qui représente le couple $U_i A$, T fait correspondre le point P' qui représente le couple $U_i A'$. Les points P, P' forment un groupe de l'involution I et, comptés chacun deux fois, un groupe de l'involution J. Le point P^* qui correspond sur H_i^* au couple P, P' est donc uni pour l'involution I', ce qui démontre notre assertion. On voit en même temps que les courbes H_i^* sont de genre π' et que, sur F', il leur correspond des courbes H'.

4. Rapportons projectivement les complexes linéaires de droites de l'espace S à $\pi - 1$ dimensions aux hyperplans d'un espace linéaire Σ à $\frac{1}{2}\pi(\pi-1)-1$ dimensions. Aux cordes de L correspondent les points d'une surface, modèle projectif de F, que nous continuerons à désigner par F. Les sections hyperplanes C de F sont les courbes canoniques de cette surface (Severi).

Sur cette surface F, l'involution I est déterminée par une homographie harmonique que nous désignerons encore par T et qui possède deux axes ponctuels ξ_0', ξ_1'.

Une droite de S, unie pour t, appartient à l'espace ξ_0, ou à l'espace ξ_1, ou s'appuie sur ξ_0, ξ_1. Dans le premier cas, ses coordonnées sont

$$p_{ik} = y_i y_k' - y_k y_i', \qquad (i, k = 0, 1, \ldots, r),$$

les coordonnées non écrites étant nulles.

Dans le deuxième cas, ses coordonnées sont

$$q_{ik} = z_i z_k' - z_k z_i', \qquad (i, k = 0, 1, \ldots, \pi - 1),$$

les coordonnées non écrites étant nulles.

Enfin, dans le troisième cas, les coordonnées sont

$$r_{ik} = y_i z_k, \qquad (i = 0, 1, \ldots, r;\ k = 0, 1, \ldots, \pi - 1),$$

les coordonnées non écrites étant nulles.

Les droites de la première catégorie, independantes, sont au nombre de $\frac{1}{2} r(r+1)$, celles de la seconde au nombre de $\frac{1}{2}\pi'(\pi'-1)$, celles de la troisième au nombre de $\pi'(r+1)$. On a

$$\frac{1}{2}(r(r+1) + \frac{1}{2}\pi'(\pi'-1) + \pi'(r+1) = \frac{1}{2}\pi(\pi-1)$$

et par conséquent les équations de l'homographie T peuvent s'écrire

$$\varrho p'_{ik} = p_{ik}, \quad \varrho q'_{ik} = q_{ik}, \quad \varrho r'_{ik} = -r_{ik}.$$

Nous supposerons que l'espace ξ'_0 est donné par $p_{ik} = q_{ik} = 0$, l'espace ξ'_1 par $r_{ik} = 0$.

L'espace ξ'_0 contient donc les points qui représentent les cordes de L déterminées par les couples de γ, c'est-à-dire la courbe K_0 et les points U_{ik}.

5. Appelons C^* les courbes canoniques de F^* et $\overline{C}$ les courbes qui leur correspondent sur F. Comme on le sait, les courbes $\overline{C}+K_0$ sont des courbes canoniques de F et il en résulte que les courbes $\overline{C}$ sont découpées sur F par les hyperplans passant par l'espace ξ'_0. Par conséquent, le genre géométrique p_g^* de F^* est égal à la dimension de ξ'_0 augmentée d'une unité. On a par suite

$$p_g^* = \frac{1}{2} r(r+1) + \frac{1}{2}\pi'(\pi'-1),$$

c'est-à-dire

$$p_g^* = \frac{1}{2}(\pi-1)^2 - \frac{1}{2}(\pi-1)(2\pi'-1) + \pi'(\pi'-1).$$

6. Appelons V la variété de Picard-Castelnuovo attachée à la surface F. C'est actuellement la variété de Jacobi attachée à la courbe L. L'existence de l'involution γ sur la courbe L entraîne celle d'une variété abélienne V', de dimension π', sur la variété V. La variété V' est d'ailleurs birationnellement identique à la variété de Jacobi attachée à la courbe L'. Rappelons que la variété V' appartient à un système continu de dimension $\pi-\pi'$ de variétés birationnellement identiques et qu'il existe sur V un second système continu, de dimension π', de variétés abéliennes de dimension $\pi-\pi'$, unisécantes des variétés V' (Castelnuovo).

Considérons sur F' un systeme continu $\{\mathcal{G}'\}$ formé de $\infty^{\pi'}$ systèmes linéaires $|\,\mathcal{G}'\,|$. Soient $\mathcal{G}^*$ les courbes qui correspondent sur F aux courbes $\mathcal{G}'$. Elles appartiennent à un système continu complet $\{\mathcal{G}^*\}$ formé de ∞^{ϱ} systèmes linéaires $|\,\mathcal{G}^*\,|$, ϱ étant l'irrégularité de la surface F. On a $\varrho \geq \pi'$.

A un système $|\,\mathcal{G}'\,|$ correspond un point de V' et par conséquent au système $|\,\mathcal{G}^*\,|$ correspondant le même point de V'. Si l'on avait $\varrho > \pi'$, aux systèmes linéaires $|\,\mathcal{G}^*\,|$ du système complet $\{\mathcal{G}^*\}$ correspondraient sur V les points d'une variété abélienne V'', de dimension ϱ, contenant V' comme partie. Mais cela entraînerait pour V et par conséquent pour la courbe L une condition supplementaire, contrairement à l'hypothèse. La variété V'' doit donc coïncider avec V'. On a par suite

La surface F a les genres

$$p_g^* = \frac{1}{2}(\pi-1)^2 - \frac{1}{2}(\pi-1)(2\pi'-1) + \pi'(\pi'-1),$$

$$p_a^* = \frac{1}{2}(\pi-1)^2 - \frac{1}{2}(\pi-1)(2\pi'-1) + \pi'(\pi'-2) = p_g^* - \pi'.$$

7. Un cas particulièrement intéressant est celui où l'involution γ est privée de points unis : $\delta = 0$, $\pi - 1 = 2(\pi'-1)$. Nous l'avons etudié en détail dans une Note en cours de publication (1).

L'involution I' appartenant à F^* est alors privée de points unis et entre les genres arithmétiques $p_a' = \frac{1}{2}\pi'(\pi'-1) - \pi'$ et p_a^* de F^*, on a la relation

$$p_a^* + 1 = 2(p_a' + 1),$$

d'où $p_a^* = (\pi'-1)(\pi'-2) - 1$. D'autre part, d'après les formules établies plus haut, on a

$$p_g^* = (\pi'-1)^*, \qquad p_g^* - p_a^* = \pi'.$$

(1) *Sur les surfaces représentant les couples de points de certaines courbes algébriques* (Revista de Matematica y Fisica teorica de la Universidad de Tucuman, tome XIV, publié en l'honneur du Prof. A. Terracini).

[*Entrata in Redazione il 28 aprile 1962*]