Separata de *MATHEMATICAE NOTAE*
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL
ROSARIO — REPUBLICA ARGENTINA
Volumen I — Año 1962

SUR LES COURBES TRACÉES SUR CERTAINES SURFACES IRRÉGULIÈRES

PAR

LUCIEN GODEAUX

(Liége)

On sait que sur une surface algebrique d'irrégularité q, une courbe C appartient en général à un système continu $\{C\}$ formé de ∞^q systèmes linéaires. Il nous a paru intéressant d'examiner, sur une surface irregulière particulière, comment se construit le système continu auquel appartient le système canonique de la surface.

Nous partons de la surface F représentant les couples de points non ordonnés d'une courbe L contenent une involution cyclique γ_p d'ordre premier impair p, privée de points unis ([1]). Il existe alors sur la surface F une involution cyclique I d'ordre p privée également de points unis. Une surface image F^* de cette involution a l'irrégularité π, π étant le genre de l'involution γ_p. Nous construisons le système canonique de F et nous montrons qu'il existe sur cette surface p—1 systèmes linéaires de mêmes degré, genre et dimension que le système canonique. De plus, ces systèmes appartiennent à un système continu ∞^π de systèmes linéaires ayant même degré et même genre que le système canonique, mais dont la dimension est égale au genre arithmétique de la surface.

Le diviseur de Severi de la surface F^* est égal à p, qu'il s'agisse de systèmes linéaires ou de systèmes continus de courbes.

1. Considérons une courbe algébrique L contenant une involution cyclique γ_p, d'ordre premier impair p, privée de points unis. Soient L' une courbe image de l'involution γ_p et π le genre de cette courbe. Le genre de la courbe L est $p(\pi - 1) + 1$.

A la série canonique $| G'_0 |$ de L' correspond sur L une série $| G_{01} |$ comprise dans la série canonique $| G_0 |$ de cette courbe. La série canonique $| G_0 |$ de L contient p séries linéaires partielles composées au moyen de l'involution γ_p. L'une de ces séries est $| G_{01} |$ de dimension $\pi - 1$, les autres sont des séries $| G_{02} |$, $| G_{03} |$, ..., $| G_{0p} |$ de dimension $\pi - 2$, auxquelles correspondent sur L' des séries paracanoniques de cette courbe $| G'_{02} |$, $| G'_{03} |$, ..., $| G'_{0p} |$.

Soit $| G'_{1i} |$ une série paracanonique de la courbe L', distincte des séries précédentes. Il lui correspond sur la courbe L une série d'ordre $2p(\pi - 1)$, appartenant donc à une série paracanonique $| G_1 |$. Cette série $| G_1 |$ est transformée en elle-même par la transformation birationnelle τ de L en soi génératrice de l'involution γ_p. La série $| G_1 |$ contient p séries linéaires partielles composées au moyen de γ_p, $| G_{11} |$, $| G_{12} |$, ..., $| G_{1p} |$ de dimension $\pi - 2$, auxquelles correspondent sur L' des séries paracanoniques, $| G'_{11} |$, $| G'_{12} |$, ..., $| G'_{1p} |$.

On a donc, sur la courbe L, ∞^π séries paracanoniques contentant chacune p séries linéaires composés au moyen de l'involution γ_p et parmi ces séries, se trouve la série canonique.

Nous poserons $p = 2\nu + 1$ et nous supposerons $\pi > 1$.

2. Soient F la surface qui représente les couples de points non ordonnés de la courbe L et F' celle qui représente les couples de points non ordonnés de la courbe L'.

A un point P de F correspondent deux points P_1, P_2 de L. A ces points, τ fait correspondre deux points P'_1, P'_2 ayant pour image sur F un point P'. Ce point P' correspond à P dans une transformation birationnelle T de F en soi, de période p. Cette transformation engendre sur F une involution I d'ordre p privée, comme γ_p, de points unis.

Désignons par H les courbes de F représentant les couples de points de L dont l'un est fixe. Ces courbes forment un système continu $\{H\}$ de degré un et d'indice deux, dont l'enveloppe est la courbe K représentant les couples de points de L formés de deux points confondus.

Considérons sur L deux groupes (A), (A') de l'involution γ_p et soient A_1, A_2, ... A_p et A'_1, A'_2, ... A'_p les points qui les composent. Désignons par H_1, H_2, ..., H_p les courbes H qui correspondent aux points de (A) et par H'_1, H'_2, ..., H'_p celles qui correspondent aux poinst du second groupe. Les courbes H du premier groupe et les courbes H' du second groupe se rencontrent en p^2 points qui, lorsque (A) et (A') varient, engendrent une involution J d'ordre p^2. Chaque groupe de J contient p groupes de I.

La surface F' est l'image de l'involution J. Désignons par F^* une surface image de l'involution I. Aux groupes de J correspondent sur F^* des groupes de p points formant une involution J'.

Comme nous l'avons remarqué, l'involution cyclique I est dépourvue de ponts unis, par contre l'involution J, qui n'est pas cyclique, possède une courbe de points unis que nous allons déterminer.

Reprenons le groupe de J formé par les intersections des courbes H_i, H'_k, groupe qui comprend p groupes de I. Lorsque le groupe (A') tend vers le groupe (A), un de ces groupes de I tend vers le groupe des points de contact des courbes H_i avec la courbe K. Les $p-1$ autres tendent vers les groupes de I' formés des points communs à deux courbes H_i. Ces points sont au nombre de p_v et par conséquent ces points sont unis pour l'involution J.

Nous désignerons par K_1 la courbe lieu de ces points. Cette courbe K_1 représente les couples de points des groupes de l'involution γ_p. Observons tout de suite que les courbes K et K_1 ne peuvent se recontrer.

3. Considérons par exemple la courbe H_1. Les ν couples de points (H_1, H_2) et (H_p, H_1), (H_1, H_3) et $(H_{p-1}, H_1), \ldots$ appartiennent à des groupes de I, par conséquent à la courbe H_1 correspond sur la surface F^* une courbe H^* possédant ν points doubles. Cette courbe correspond également aux courbes H_2, H_3, ..., H_p. Les ν points doubles appartiennent à la courbe K_1^* homologue de K_1. La courbe H^* touche la courbe K^* homologue de K en un point et ce point, joint aux ν points doubles de H^* comptés chacun deux fois, forme un groupe de l'involution J'. Le point de F' homologue de ce groupe appartient à la courbe K', image des couples de points de L' formés de deux points coincidents. A la courbe H^* correspond sur F' une courbe H' représentant les couples de points de L' dont un point es fixe. Ce point représente sur L' le groupe (A) de L.

L'involution J possède donc sur F une courbe unie K_1 et l'involution J', sur F^*, la courbe unie K^*.

Une courbe H coupe la courbe K_1 en $p-1$ points, donc entre la courbe L et la courbe K_1 nous avons une correspondance

$(2, p-1)$ privée de points unis. Par la formule de Zeuthen, on en déduit que la courbe K_1 est de genre

$$k_1 = \nu p (\pi - 1) + 1.$$

D'autre part, par la formule de De Franchis, le degré virtuel de K_1 est

$$k_2 = - p (p-1)(\pi - 1).$$

Entre les courbes $K_1{}^*$ et K_1, nous avons une correspondance $(1, p)$ dépourvue de points de diramation, par conséquent le genre de $K_1{}^*$ est

$$k_1{}^* = \nu (\pi - 1) + 1$$

et son degré virtuel

$$k_2{}^* = -(p-1)(\pi - 1)$$

Entre la courbe K' et la courbe $K_1{}^*$, nous avons une correspondance $(1, \nu)$ privée de points de diramation. K' étant de genre π, la formule de Zeuthen donne bien pour le genre de $K^*{}_1$ la valeur $k_1{}^*$.

4. Une courbe canonique C de F représente les couples de points des groupes d'une série de dimension un appartenant à la série canonique de L. Les genres géométrique, arithmétique et linéaire de F sont comme on sait

$$p_g = \frac{1}{2} p (\pi - 1) [p (\pi - 1) + 1],$$

$$p_a = \frac{1}{2} [p (\pi - 1) + 1] [p (\pi - 1) - 2],$$

$$p^{(1)} = p (\pi - 1) [4 p (\pi - 1) - 5] + 1.$$

Entre les surfaces F^* et F, nous avons une correspondance $(1,p)$ privée de points de diramation, donc entre les genres arithmétiques $p_a{}^*$ et p_a de ces surfaces, nous avons la relation [2].

$$p (p_a{}^* + 1) = p_a + 1.$$

Le genre arithmétique de F^* est donc

$$p_a^* = \frac{1}{2}(\pi - 1)\ [p\ (\pi - 1) - 1] - 1.$$

La surface F^* a l'irrégularité π ([3]), donc son genre géométrique est

$$p_g^* = \frac{1}{2}(\pi - 1)\ [p\ (\pi - 1) + 1]$$

Dans le système canonique $| C |$ de F, nous avons p systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution I. L'un est le transformé $| C_1 |$ du système canonique $| C^* |$ de F^*. Les autres, $| C_2 |, | C_3 |, \ldots, | C_p |$ ont nécessairement la même dimension puisqu'ils correspondent aux séries $| G_{02} |, | G_{03} |, \ldots, | G_{0p} |$ de la courbe L. Si x est la dimension de ces systèmes, par la théorie des homographies, on a

$$p_g^* + (p - 1)\ (x + 1) = p_g,$$

d'où

$$x = \frac{1}{2}\ (\pi - 1)\ [p\ (\pi - 1) + 1] - 1 = p_g^* - 1.$$

Le système $| C |$ ayant le degré $p\ (\pi - 1)\ \ [4\, p\ (\pi - 1) - 5]$. les systèmes $| C^* |$ et $| C_2^* |, \ldots, | C_p^* |$ qui correspondent à $| C_1 |, | C_2 |, \ldots, | C_p |$ ont le degré $(\pi - 1)\ [4\, p\ (\pi - 1) - 5]$ et le genre $(\pi - 1)\ [4\, p\ (\pi - 1) - 5] + 1$.

Ainsi donc, sur la surface F^*, nous avons p systèmes linéaires $| C^* |, |C_1^* |, \ldots, | C_p^* |$ dont le premier est le système canonique, ayant mêmes caractères (degré, genre, dimensión) que ce système.

5. Aux courbes canoniques C' de la surface F' correspondent sur la surface F^* des courbes C_0^* et sur la surface F des courbes C_0. D'aprés un théorème d'Enriques, les courbes C_0^* jointes à la courbe unie de l'involution J' donnent des courbes canoniques de F^*. On a donc

$$C^* \equiv C_0^* + \lambda\, K_1^*,$$

λ étant un entier positif.

Sur F, on a

$$C \equiv C_0 + \lambda K_1.$$

Une courbe H rencontre une courbe C en $2p(\pi - 1) - 1$ points et la courbe K_1 en $p - 1$ points. Sur F', une courbe H' coupe une courbe C' en $2\pi - 3$ points, donc une courbe H^* coupe une courbe C_0^* en $p(2\pi - 3)$ points et une courbe H coupe una courbe C_0 en $p(2\pi - 3)$ points également. On en conclut $\lambda = 1$.

Le système canonique de F est donc

$$| C | = | C_0 + K_1 |$$

et celui de F^*,

$$| C^* | = | C_0^* + K_1^* |.$$

Aux séries paracanoniques $| G'_{02} |$, $| G'_{03} |, \ldots, | G'_{0p} |$ de L' correspondent sur F' des courbes $C'_2, C'_3, \ldots, C'_p$ formant des systèmes linéaires $| C'_2 |$, $| C'_3 |, \ldots, | C'_p |$ de degré $(\pi - 1)(4\pi - 9)$ et de genre $(\pi - 1)(4\pi - 9) + 1$. A ces systèmes correspondent sur F^* des systèmes linéaires $| \overline{C}_2 |$, $| \overline{C}_3 |$, $\ldots$, $| \overline{C}_p |$ et on a

$$| C_2^* | = | \overline{C}_2 + K_1^* |, \quad | C_3^* | = | \overline{C}_3 + K_1^* |, \ldots,$$

$$| C_p^* | = | \overline{C}_p + K_1^* |.$$

D'ailleurs, si l'on considère sur F le système $| C_2 |$ par exemple, il correspond à une série paracanonique $| G_{02} |$ de L composée au moyen de l'involution γ_p, donc il existe des courbes C_2 contenant la courbe K_1.

Observons encore que sur F' une courbe C' coupe K' en $6(\pi - 1)$ points, donc une courbe C_0^* coupe la courbe K_1^* en $3(p-1)(\pi-1)$ points et una courbe C_0 coupe K_1 en $3p(p-1)(\pi - 1)$ points. On en conclut que sur F, les courbes C coupent la courbe K_1 en $2p(p-1)(\pi-1)$ points, nombre donnant celui des couples de points de L commun à un groupe de γ_p et à un groupe d'une série de dimensión un tirée de la série canonique. C'est le nombre qui est donné par la formule classique de Schubert.

Sur la surface F^*, les courbes C_0^* coupent K_1^* en $2(p-1)(\pi-1)$ points.

6. Considérons maintenant une série paracanonique $| G_1 |$ de la courbe L, transformée en elle-même par la transformation τ.

Elle contient par conséquent p séries linéaires partielles $|G_{11}|$, $|G_{12}|$, ..., $|G_{1p}|$ composées au moyen de γ_p.

Aux séries de dimension un contenues dans $|G_1|$ correspondent sur F des courbes C_{10} formant un système linéaire $|C_{10}|$ de degré $p(\pi-1)[4p(\pi-1)-5]$ et de genre $p(\pi-1)[4p(\pi-1)-5]+1$ de dimension

$$\frac{1}{2}p(\pi-1)[p(\pi-1)-1]-1.$$

Ce système contient p systèmes linéaires partiels $|C_{11}|$, $|C_{12}|$, ... $|C_{1p}|$ appartenant à l'involution I et comme les séries $|G_{11}|$, $|G_{12}|$, ..., $|G_{1p}|$ ont la même dimension ces systèmes ont également la même dimension. Soit x cette dimension. On a, d'après la théorie des homographies,

$$p(x+1)=\frac{1}{2}p(\pi-1)\ [p(\pi-1)-1],$$

d'où

$$x=\frac{1}{2}(\pi-1)\ [p(\pi-1)-1]-1=p_a{}^*$$

Aux systèmes $|C_{11}|$, $|C_{12}|$, ..., $|C_{1p}|$ correspondent donc sur F^* des systèmes $|C^*_{11}|$, $|C^*_{12}|$, ..., $|C^*_{1p}|$ ayant mêmes degré et genre que le système canonique, mais dont la dimension est égale au genre arithmétique $p_a{}^*$ de la surface.

Les séries $|G_{11}|$, $|G_{12}|$, ..., $|G_{1p}|$ étant composées au moyen de l'involution γ_p, il existe des courbes C_{11}, C_{12}, ..., C_{1p} contenant comme partie la courbe K_1, Précisément, les courbes $C^*_{11}-K^*_1$ par exemple ont pour homologues sur F' les courbes qui correspondent aux séries de dimension un comprises dans la série paracanonique $|G'_{11}|$ de L'.

Il existe sur la courbe L', ∞^π séries paracanoniques, par conséquent:

Il existe sur la surface F^*, ∞^π groupes de p systèmes linéaires de même degré et de même genre que le systèmes canonique. La dimension de ces systèmes est en général égale au genre arithmétique de la surface. Un des groupes contient le système canonique et les autres systèmes du groupe ont même dimension que ce système.

7. L'involution I étant privée de points unis, on a ([4])

$$pC^* \equiv pC_2^* \equiv \ldots \equiv pC_p^*,$$

$$pC^*_{11} \equiv pC^*_{12} \equiv \ldots \equiv pC^*_{1p}$$

et d'une manière générale, sur la surface F^*, les multiples d'ordre p des systèmes linéaires d'un groupe de p systèmes dont il vient d'être question sont équivalent. On pourrait traduire ce fait en disant que *le diviseur linéaire de Severi de la surface F est égal à p.*

Mais il y a plus. Aux ∞^π séries d'ordre 2π—2 de la courbe L' correspondent sur la courbe L ∞^π séries d'ordre $2p(\pi—1)$ transformées chacune en elle-même par τ. A chacune de ces séries correspond sur F un système linéaire et l'ensemble des systèmes linéaires ainsi obtenus forme un système continu que nous désignerons par $\{C\}$. Ce système contient ∞^π systèmes linéaires trans. formés chacun en soi par T et contenant p systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution I. A une courbe de $\{C\}$ correspond sur F^* une courbe qui, lorsque la courbe de $\{C\}$ tend vers une courbe appartenant à l'involution I, se réduit à p fois la courbe correspondante sur F^*. Il en résulte que les multiples d'ordre p des systèmes des ∞^π groupes de systèmes linéaires tracés sur F^* appartiennent à un même système continu $\{C^*\}$. On peut traduire cette propriété en disant que *le diviseur algébrique de Severi de la surface F^* est égal à p.*

LIÉGE, LE 30 DÉCEMBRE 1961.

BIBLIOGRAPHIE

1. La surface des couples de points d'une courbe a été etudiée par DE FRANCHIS, *Sulle varietà ∞^2 delle coppie di punti di due o di una curva algebrica* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1903).
F. SEVERI, *Sulle superficie che rappresentano le coppie di punti di una curva algebrica* (Atti della Accademia di Torino, 1902-1903), *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e sopra certe classi di superficie* (Memorie della Accademia di Torino, 1903).
2. Voir notre exposé sur *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique*. Actualités scientifiques, Nº 270 (Paris, Hermann, 1935).
3. Voir notre note *Costruzione di superficie algebriche irregolari*, présentée au Convegno di Geometria algebrica de Turin (1961), en cours d'impression dans les Rendiconti del Seminario Matematico della Universitá di Torino.
4. Voir notre exposé cité plus haut.