Académie royale de Belgique

CLASSE DES SCIENCES

MÉMOIRES

Collection in-8°. — Tome XXVII
Fascicule 3.

Koninklijke Belgische Academie

KLASSE DER WETENSCHAPPEN

VERHANDELINGEN

Verzameling in-8° — Boek XXVII
Aflevering 3.

MÉMOIRE SUR LES SURFACES MULTIPLES

PAR

LUCIEN GODEAUX

MEMBRE DE L'ACADÉMIE

Exemplaire hors commerce

BRUXELLES
PALAIS DES ACADÉMIES
RUE DUCALE, 1

BRUSSEL
PALEIS DER ACADEMIËN
HERTOGELIJKESTRAAT, 1

1952

N° 1626.

AVANT - PROPOS

Le problème que nous nous proposons de résoudre dans ce mémoire est le suivant : Soit F une surface algébrique contenant une involution cyclique I_p, d'ordre premier p, n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Construisons une surface Φ image de l'involution, normale, telle qu'aux points unis de I_p correspondent des points de diramation isolés. Il s'agit de déterminer la singularité de la surface Φ en un point de diramation, c'est-à-dire ce que nous appelons la structure de ce point.

Soient A un point uni de l'involution I_p sur F et A' le point de diramation correspondant sur Φ. Nous construisons sur F un système $|C_0|$, appartenant à l'involution I_p et aux courbes duquel correspondent, sur Φ, les sections hyperplanes Γ_0 de Φ.

Les points unis peuvent être de deux espèces. Nous disons que le point uni A est de première espèce lorsque dans le domaine du premier ordre de ce point, la transformation birationnelle de F en soi, génératrice de l'involution I_p, détermine l'identité. Il est alors facile de prouver que le point de diramation A' est multiple d'ordre p pour la surface Φ, le cône tangent en ce point à la surface étant rationnel. Nous disons que le point uni A est de seconde espèce lorsque, dans le domaine du premier ordre de A, la transformation T détermine une involution d'ordre p. Celle-ci présente alors deux éléments unis, c'est-à-dire qu'il existe, dans le domaine du premier ordre de A, deux points unis, infiniment voisins de A.

Pour étudier les points unis de seconde espèce, nous considérons les courbes C_0 passant par A, courbes que nous désignons par C_0', puis les courbes C_0' assujetties à la seule condition de passer par un point infiniment voisin de A qui ne soit pas uni pour l'involution ; nous désignons ces courbes par C_0'', et ainsi de suite. Nous formons ainsi une suite de systèmes linéaires $|C_0'|$, $|C_0''|$, ..., dont les courbes ont en A des multiplicités croissantes et des tangentes fixes, sauf le dernier système dont les courbes ont en A la multiplicité p et des tangentes variables. Les courbes de chacun de ces systèmes passent par certaines suites de points infiniment voisins successifs de A, unis de seconde espèce pour l'involution I_p, sauf les derniers points de chaque suite qui sont unis de première espèce. La configuration formée par ces suites de points est ce que nous appelons la structure du point uni A. La détermination de cette structure conduit à celle de la structure du point de diramation A'.

Nous avons établi que le cône tangent à la surface Φ, en un point de diramation qui correspond à un point uni de seconde espèce, se décompose en deux, trois ou quatre cônes rationnels. Précisons ce résultat.

Dans le faisceau des tangentes à la surface F en A, T détermine une involution d'ordre p présentant deux éléments unis (passant par les unis infiniment voisins de A). Rapportons le plan tangent à F en A à un triangle de référence dont un sommet se trouve en A, les deux côtés passant par A étant précisément les tangentes unies. T détermine dans ce plan une homographie qui peut se représenter par

$$x_0' : x_1' : x_2' = x_0 : \epsilon x_1 : \epsilon^\alpha x_2 ,$$

ϵ étant une racine primitive d'ordre p de l'unité. Cette homographie peut également être représentée par

$$x_0' : x_1' : x_2' = x_0 : \eta^\beta x_{1i} : \eta x_2 ,$$

en posant $\eta = \epsilon^\alpha$.

Les courbes C_0' ont en A la multiplicité $\lambda_1 + \lambda_1$, μ_1 tangentes étant confondues avec la droite $x_2 = 0$, μ_1 avec la droite $x_1 = 0$. λ_1 et μ_1 sont des entiers positifs tels que $\lambda_1 + \alpha\mu_1$ et $\mu_1 + \beta\lambda_1$ soient des multiples de p, $\lambda_1 + \mu_1$ étant le plus petit possible. On a

$$\lambda_1 + \alpha\mu_1 = h_\alpha p, \qquad \mu_1 + \beta\lambda_1 = h_\beta p.$$

Lorsque $h_\alpha = 1$, $h_\beta = 1$, le cône tangent en A' à la surface Φ se scinde en deux cônes rationnels. Lorsque l'un des nombres h_α, h_β est égal à l'unité, l'autre étant supérieur, le cône tangent à Φ en A' se scinde en trois cônes rationnels. Enfin, lorsque les deux nombres, h_α, h_β sont supérieurs à l'unité, le cône tangent à Φ en A' se scinde en quatre cônes rationnels.

Dans les trois cas, la surface Φ peut posséder des suites de points doubles infiniment voisins successifs à A′ dont le premier se trouve sur une des droites communes à deux cônes.

Nous terminons en établissant les relations qui lient les genres linéaires, les genres arithmétiques et les invariants de Zeuthen-Segre des surfaces F et Φ.

Les premières recherches sur les involutions cycliques ne présentant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique, sont dues à F. Enriques et à M. F. Severi. Ces géomètres, dans le Mémoire qui reçut le Prix Bordin en 1907, ont considéré les involutions de ce type lorsque la surface F est une surface de Jacobi [1]. Plus tard, sur les conseils d'Enriques, nous avons entrepris l'étude des involutions cycliques de genres un ($p_a = P_4 = 1$) appartenant à une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$). Nous avons considéré ensuite le cas où l'involution est de bigenre un ($p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$), F étant de genres un ou de bigenre un. Dans ces cas, la recherche est simplifiée par le fait que la surface Φ ne peut posséder de points de multiplicité supérieure à deux.

Nous avons ensuite abordé le cas général en considérant en premier lieu les involutions engendrées dans un plan par une homographie cyclique non homologique, puis les involutions appartenant à une surface algébrique quelconque.

Il résulte de nos recherches que la structure d'un point uni ne dépend pas de la nature de la surface F, mais bien des nombres α, β introduits plus haut, et éventuellement, de la nature de la surface Φ si la multiplicité des points singuliers de celle-ci est limitée. On peut dire que toutes les structures possibles de points unis, et par conséquent des points de diramation correspondants, se rencontrent à propos des homographies cycliques non homologiques du plan (sauf cependant les points unis de première espèce). Dans ce cas, on peut prendre pour système $|C_0|$ le système des courbes d'ordre p, privé de points-base, appartenant à l'involution engendrée par l'homographie. L'analyse de la structure des points unis peut se faire en utilisant des transformations quadratiques successives, mais on est ainsi conduit à des calculs longs et fastidieux. C'est pourquoi nous avons préféré utiliser une autre méthode : celle qui est développée dans ce mémoire.

[1] Pour la bibliographie, voir notre exposé cité en tête de la bibliographie qui termine ce travail.

Signalons, avant de terminer cet avant-propos, deux mémoires consacrés au problème qui nous occupe, l'un de M. S. LILLEY [1], l'autre de M. Derwidué [2].

Nous avons d'autre part indiqué, à la fin de notre mémoire, la liste de nos publications récentes sur la question traitée ici.

Liège, le 5 février 1952.

---

[1] S. LILLEY, On the isolated united points of a cyclic involution on an algebraic surface (*Prooceedings of the London Mathematical Society*, 1939, vol. 46, pp. 312-360).

[2] L. DERWIDUÉ, Sur les points unis des involutions cycliques (*Mémoires de la Soc. roy. des Sciences de Liège*, 1951, 4e série, t. XI, pp. 1-52).

SUR LES SURFACES MULTIPLES

I. Généralités.

1. Soit F une surface algébrique transformée en soi par une transformation birationnelle T, cyclique de période p premier. Cette transformation engendre, sur la surface, une involution I_p, d'ordre p.

Nous ferons les hypothèses suivantes :

a) L'involution I_p ne possède qu'un nombre fini de points unis ;

b) L'involution I_p est dépourvue de points fondamentaux, c'est-à-dire qu'il n'existe aucun point de la surface appartenant à ∞^1 groupes de l'involution.

Nous commencerons par construire un modèle projectif de la surface F sur lequel l'involution I_p est déterminée par une homographie de l'espace ambiant.

Soit $|D_1|$ un système linéaire de courbes tracées sur F, simple, dépourvu de points-base et au moins doublement infini. Les transformations T, T^2, ..., T^{p-1} font correspondre à ce système des systèmes $|D_2|$, $|D_3|$, ..., $|D_p|$ (qui peuvent coïncider avec $|D_1|$ si ce système est transformé en soi par T). Le système linéaire complet

$$|C| = |D_1 + D_2 + \ldots + D_p|$$

est transformé en soi par T. Il en est de même de ses multiples et si $|C|$ appartenait à l'involution I_p, il est facile de voir que l'on peut trouver un entier λ assez grand pour que le système complet $|\lambda C|$ n'appartienne pas à l'involution. Nous pouvons donc supposer sans restriction que $|C|$ n'appartient pas à l'involution.

Soit r la dimension de $|C|$. Rapportons projectivement les courbes C aux hyperplans d'un espace linéaire S_r à r dimensions. Comme d'après les hypothèses faites, $|C|$ est simple, il correspond à F une surface normale de S_r birationnellement identique à F et que nous continuerons à désigner par F. Nous désignerons également par C les sections hyperplanes de la surface F, qui correspondent aux courbes C de la surface primitive.

A la transformation T correspond sur F de S_r une transformation qui échange entre elles les sections hyperplanes de la surface, c'est-à-dire les hyperplans de S_r. Cette transformation est par conséquent déterminée sur F par une homographie de période p de S_r. Nous continuerons à désigner par T cette homographie.

L'homographie T étant cyclique, est générale. On peut toujours supposer sans restriction, quitte à remplacer $|C|$ par un de ses multiples convenablement choisi, que l'homographie T possède p axes ponctuels que nous désignerons par $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{p-1}$.

Nous désignerons par $\Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_2, \ldots \Sigma_{p-1}$ les systèmes d'hyperplans de S_r passant respectivement par $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{p-1}$, par $\sigma_0, \sigma_2, \ldots, \sigma_{p-1}$, par $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_3, \ldots, \sigma_{p-1}, \ldots$, par $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{p-2}$. Les hyperplans de $\Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_{p-1}$ découpent sur F des systèmes linéaires partiels que nous désignerons par $|C_0|, |C_1|, |C_2|, \ldots, |C_{p-1}|$; ces systèmes appartiennent à l'involution I_p. Nous désignerons par $r_0, r_1, r_2, \ldots, r_{p-1}$ les dimensions de ces systèmes ; ce sont les dimensions des espaces linéaires $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{p-1}$. On a d'ailleurs

$$r_0 + r_1 + \ldots + r_{p-1} + p = r + 1.$$

La courbe réductible

$$D_1 + D_2 + \ldots + D_p$$

est transformée en soi par T ; elle appartient donc à un des systèmes précédents, par exemple à $|C_0|$. Puisque $|D_1|$ est par hypothèse dépourvu de points-base, il en est de même de $|C_0|$. Par conséquent, les axes $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{p-1}$ de l'homographie T ne rencontrent pas la surface F.

Il en résulte que les points unis de l'involution I_p appartiennent à l'axe σ_0 de T. Nous ferons l'hypothèse que chacun de ces points est simple pour la surface F et que le plan tangent à cette surface au point considéré ne rencontre σ_0 qu'en ce point.

2. Nous pouvons supposer que r_0 est aussi grand qu'on le veut, quitte à remplacer $|C|$ par un de ses multiples d'ordre suffisamment élevé. Rapportons projectivement les courbes C_0 aux hyperplans d'un espace linéaire à r_0 dimensions, ou encore, projetons la surface F sur l'espace σ_0 à partir de l'espace linéaire de dimension minimum contenant $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{p-1}$. Nous obtenons, dans σ_0, une surface normale Φ, dont les points correspondent aux groupes de l'involution I_p de F. La surface Φ est une image de l'involution I_p.

Aux courbes C_0 correspondent les sections hyperplanes de Φ, nous les désignerons par Γ_0. Nous désignerons de même par $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{p-1}$ les courbes qui correspondent sur Φ respectivement aux courbes $C_1, C_2, \ldots, C_{p-1}$ de F ; elles forment des systèmes complets $|\Gamma_1|, |\Gamma_2|, \ldots, |\Gamma_{p-1}|$.

Désignons par n l'ordre de la surface Φ et par π le genre de ses sections hyperplanes Γ_0. Le système $|C_0|$ a le degré pn et puisque $|C_0|$ est dépourvu de points-base, $|C|$ a le degré pn, c'est-à-dire que la surface F est d'ordre pn.

Entre une courbe Γ_0 et la courbe C_0 homologue, nous avons une correspondance $(1, p)$ en général privée de points unis ; par conséquent, la courbe C_0 est, d'après la formule de Zeuthen, de genre $p(\pi - 1) + 1$. Les courbes C ont le même genre.

Les courbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{p-1}$ sont d'ordre n.

3. Soit A un point uni de l'involution I_p. Le plan tangent ξ en ce point à la surface F est uni par l'homographie T et par hypothèse, il ne rencontre l'espace σ_0 qu'au seul point A ; il doit donc s'appuyer suivant une droite sur l'un des espaces $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{p-1}$ ou suivant des points sur deux de ces espaces. Nous sommes donc conduit à classer les points unis de I_p en deux catégories :

Points unis de première espèce. — En un A de ces points unis, le plan tangent ξ à F coupe suivant une droite a un des axes $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{p-1}$ de T. Cette homographie détermine dans ξ une homologie de centre A et d'axe a. Tous les points de F infiniment voisins de A sont unis pour T et dans le domaine du premier ordre de A sur F, cette homographie détermine l'identité.

Points unis de seconde espèce. — En un tel point uni A, le plan tangent ξ à F s'appuie en un point A_1 sur un des axes $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{p-1}$ et en un point A_2 sur un autre de ces axes. Dans ξ, T détermine une homographie non homologique dont les points unis sont A, A_1, A_2.

Dans le domaine du premier ordre de A sur F, T détermine une involution d'ordre p ayant deux points unis infiniment voisins de A, l'un situé sur la droite AA_1, l'autre sur la droite AA_2.

Nous allons établir que, quelle que soit l'espèce du point A, *il existe toujours un système linéaire appartenant à* $|C_0|$ *dont les courbes ont, en* A, *un point multiple d'ordre* p *à tangentes variables.*

Commençons par supposer que le point A soit uni de seconde espèce. Considérons les courbes D_1 passant par A et y touchant la droite AA_1. Les courbes qui leur correspondent dans $|D_2|$, $|D_3|, \dots, |D_p|$ passent par A et y touchent également la droite AA_1. La somme de ces courbes est une courbe C_0 ayant en A la multiplicité p et possédant, sur AA_1, un point multiple d'ordre p infiniment voisin de A.

En partant de AA_2, on obtient de même un second système de courbes C_0 ayant la multiplicité p en A et un point multiple d'ordre p infiniment voisin de A sur AA_2.

Les deux systèmes linéaires de courbes C_0 ainsi obtenus appartiennent nécessairement à un système linéaire, compris dans $|C_0|$, dont les courbes ont en A un point multiple d'ordre p à tangentes variables.

Si le point A est uni de première espèce, il suffit de reprendre le raisonnement précédent en remplaçant les droites AA_1, AA_2 par deux tangentes quelconques à F en A.

4. Soit A un point uni de première espèce ; il lui correspond sur Φ un point de diramation A' que nous dirons être un point de diramation de première espèce.

Les courbes C_0 passant par A et que nous désignerons par C_0', sont découpées sur F par les hyperplans de Σ_0 passant par A et par conséquent contenant le plan tangent ξ à F en ce point. Les courbes C_0' ont donc en A un point multiple d'ordre t supérieur à l'unité et au plus égal à p d'après le théorème précédent. Elles ont de plus en A des tangentes variables. Le degré du système $|C_0'|$ est $pn - t^2$ et comme ce système appartient à l'involution I_p, ce degré doit être multiple de p et on a nécessairement $t = p$.

Au système $|C_0'|$, de dimension $r_0 - 1$, correspond sur Φ le système des sections découpées par les hyperplans passant par A' et que nous désignerons par $|\Gamma_0'|$.

Le système $|\Gamma_0'|$ a le degré $n - p$, puisque $|C_0'|$ a le degré $pn - p^2$ et par conséquent, le point A' est un multiple d'ordre p pour la surface Φ.

Considérons une courbe C'_0 et la courbe Γ'_0 qui lui correspond. A un point de Γ'_0 correspond un groupe de I_p situé sur C'_0. Lorsque le point considéré tend vers A′ sur Γ'_0, le groupe correspondant tend vers un point infiniment voisin de A compté p fois, situé sur C'_0. Il en résulte que la courbe Γ'_0 a, en A′, p tangentes distinctes en général et que le point A′ est conique. De plus, le cône tangent à Φ en A′ est rationnel puisque ses génératrices sont en correspondance biunivoque avec les droites du faisceau des tangentes à F en A.

Le point A′ est équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à une courbe rationnelle irréductible γ et on a

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma'_0 + \gamma.$$

Il en résulte que la courbe γ a le degré virtuel $-p$.

A un point uni de première espèce correspond sur Φ un point de diramation multiple d'ordre p *pour la surface, à cône tangent rationnel. Ce point est équivalent à une courbe rationnelle irréductible de degré virtuel* — p.

Le genre des courbes Γ'_0 est égal à $\pi - p + 1$; celui des courbes C'_0 est égal à $p(\pi - 1) + 1 - \frac{1}{2}p(p-1)$. Dans la correspondance $(1,p)$ entre une courbe Γ'_0 et la courbe C'_0 homologue, il y a p points de diramation et la formule de Zeuthen donne une vérification.

Remarquons que si $p = 2$, tous les points unis de l'involution sont nécessairement de première espèce et les points de diramation de la surface Φ sont tous des points doubles coniques.

5. Avant d'aborder l'étude des points unis de seconde espèce, nous attacherons, à chacun des axes de l'homographie T, une racine primitive d'ordre p de l'unité.

Rapportons l'espace S_r à une figure de référence dont les axes $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{p-1}$ appartiennent aux faces. Soient alors

$x_0^{(0)}, x_1^{(0)}, \ldots, x_{r_0}^{(0)}$ les coordonnées d'un point de σ_0,

$x_0^{(1)}, x_1^{(1)}, \ldots, x_{r_1}^{(1)}$ les coordonnées d'un point de σ_1,

. . . .

$x_0^{(p-1)}, x_1^{(p-1)}, \ldots, x_{r_{p-1}}^{(p-1)}$ les coordonnées d'un point de σ_{p-1}, de telle sorte que les nombres précédents soient les coordonnées d'un point de l'espace S_r.

Si ϵ est une racine primitive d'ordre p de l'unité convenablement choisie, les équations de l'homographie T peuvent s'écrire

$$\rho x_i^{(0)\prime} = x_i^{(0)}, \qquad (i = 0, 1, \ldots, r_0),$$
$$\rho x_i^{(1)\prime} = \epsilon x_i^{(1)}, \qquad (i = 0, 1, \ldots, r_1),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\rho x_i^{(p-1)} = \epsilon^{p-1} x_i^{(p-1)}, \quad (i = 0, 1, \ldots, r_{p-1}),$$

en modifiant éventuellement la numérotation des espaces σ_2, $\sigma_3, \ldots, \sigma_{p-1}$.

Aux axes $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{p-1}$ de l'homographie T sont ainsi attachés respectivement les racines $\epsilon^0 = 1, \epsilon, \epsilon^2, \ldots, \epsilon^{p-1}$ de l'unité.

6. Soit A un point uni de seconde espèce de l'involution I_p ; supposons que le plan tangent ξ à F en ce point s'appuie en un point A_i sur σ_i et en un point A_j sur σ_j. On peut d'ailleurs supposer, moyennant un changement de notation, que $i = 1$. En effet, $\zeta = \epsilon^i$ est une racine primitive d'ordre p de l'unité et il existe un nombre α, compris entre 1 et p, tel que $\zeta^\alpha = \epsilon^j$. Nous pouvons alors changer la numérotation des espaces $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{p-1}$ et supposer que ξ s'appuie en un point A_1 sur σ_1 et en un point A_α sur σ_α.

Si nous rapportons le plan ξ au triangle AA_1A_α, T détermine dans ce plan l'homographie

$$x_0' : x_1' : x_\alpha' = x_0 : \zeta x_1 : \zeta^\alpha x_\alpha,$$

les coordonnées étant choisies de telle sorte que les droites AA_1, AA_α aient respectivement pour équations $x_\alpha = 0$, $x_1 = 0$.

Les hyperplans de Σ_1 contiennent les espaces σ_0, σ_α mais ne contiennent pas σ_1, par conséquent, ils coupent le plan ξ suivant la droite AA_α et les courbes C_1 passent simplement par A en y touchant la droite AA_α.

De même, les courbes C_α passent simplement par A en y touchant la droite AA_1.

Désignons par C_0' les courbes C_0 passant par A ; elles sont découpées par les hyperplans de Σ_0 passant par A et par σ_1, σ_α. Ces hyperplans contiennent donc le plan tangent ξ à F en A et par conséquent les courbes C_0' ont en A une multiplicité au moins égale à deux et en plus égale à p.

Envisageons le système complet $|kC|$; il contient p systèmes linéaires appartenant à l'involution I_p, nous les désignerons par $|(kC)_0|$, $|(kC)_1|$, ..., $|(kC)_{p-1}|$. Le premier contient par exemple les courbes kC_0, le second les courbes $C_1 + (k-1)C_0$, ..., le dernier les courbes $C_{p-1} + (k-1)C_0$, de telle sorte qu'à ces systèmes sont attachées les racines de l'unité $\epsilon^0 = 1$, ϵ, ..., ϵ^{p-1}.

Observons que les courbes de $|(kC)_0|$ passant par A ont en ce point le même comportement que les courbes C_0', car parmi ces courbes se trouvent les courbes $C_0' + (k-1)C_0$.

Soient λ, μ deux entiers positifs, satisfaisant à la congruence

$$\lambda + \alpha\mu \equiv 0, \qquad (\text{mod. } p).$$

Il est toujours possible de trouver deux nombres λ, μ tels que $\lambda + \mu$ soit inférieure à p ; c'est ce que nous supposerons fait.

Considérons les courbes

$$\lambda C_1 + \mu C_\alpha.$$

Puisqu'aux courbes C_1, C_α sont attachés les nombres ϵ, ϵ^α, aux courbes précédentes est attaché le nombre $\epsilon^{\lambda+\alpha\mu} = 1$. Ces courbes appartiennent donc au système $|[(\lambda+\mu)C]_0|$ et on en conclut que les courbes C_0' ont en A une multiplicité inférieure à p.

7. Les courbes C_0' ayant en A une multiplicité inférieure à p, ne peuvent avoir une tangente variable en ce point, car T détermine dans le domaine du premier ordre de A une involution d'ordre p et les courbes C_0' auraient en A au moins p tangentes variables. Il en résulte que les tangentes aux courbes C_0' en A sont confondues avec les droites AA_α, AA_1. Nous supposerons précisément que les courbes C_0' ont en A la multiplicité $\lambda_1 + \mu_1$, λ_1 tangentes étant confondues avec AA_α et μ_1 avec AA_1.

Désignons par C_0'' les courbes C_0' assujetties à toucher en A une tangente à F distincte de AA_1, AA_α. Ou bien les courbes C_0'' ont la multiplicité p et p tangentes variables en A, ou bien elles ont en A la multiplicité $\lambda_2 + \mu_2 < p$, λ_2 tangentes étant confondues avec AA_α et μ_2 avec AA_1.

Dans ce dernier cas, appelons C_0''' les courbes C_0'' assujetties à toucher en A une tangente à F distincte des droites AA_1, AA_α.

Ou bien les courbes C_0''' ont la multiplicité p et p tangentes variables en A, ou bien elles ont en ce point la multiplicité $\lambda_3 + \mu_3 < p$, et ainsi de suite.

Nous formons ainsi sur F une suite de systèmes linéaires

$$|C_0'|, |C_0''|, \dots, |C_0^{(\nu)}|, |C_0^{(\nu+1)}|$$

dont chacun est compris dans les systèmes précédents. Le dernier de ces systèmes est formé de courbes ayant la multiplicité p et p tangentes variables en A.

Pour $i \leqslant \nu$, les courbes $C_0^{(i)}$ ont la multiplicité $\lambda_i + \mu_i$ en A, λ_i tangentes étant confondues avec AA_a et μ_i avec AA_1.

Observons que l'on a

$$\lambda_1 + \mu_1 < \lambda_2 + \mu_2 < \dots < \lambda_\nu + \mu_\nu < p.$$

De plus, les systèmes considérés ont respectivement les dimensions $r_0 - 1$, $r_0 - 2$, ..., $r_0 - \nu$, $r_0 - (\nu + 1)$.

Deux courbes $C_0^{(i)}$, $C_0^{(j)}$ se rencontrent, en dehors de A, suivant des groupes de l'involution I_p, par conséquent, le nombre de points d'intersection de ces deux courbes absorbés en A est multiple de p.

Une courbe C_1 rencontre une courbe $C_0^{(i)}$, en dehors de A, suivant des groupes de l'involution I_p, donc le nombre de points d'intersection θ_i de ces courbes absorbés en A est multiple de p. D'autre part, les courbes $C_0^{(i+1)}$ ayant en A une multiplicité supérieure à celle des courbes $C_0^{(i)}$, on a $\theta_i \leqslant \theta_{i+1}$. En particulier, on a $\theta_\nu \leqslant \theta_{\nu+1}$ et $\theta_{\nu+1} = p$, puisque les courbes $C_0^{(\nu+1)}$ ont des tangentes variables en A.

Nous avons donc

$$1 < \theta_1 \leqslant \theta_2 \leqslant \dots \leqslant \theta_\nu \leqslant p$$

et les nombres θ_1, θ_2, ..., θ_ν étant multiples de p, on a nécessairement

$$\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_\nu = p.$$

On peut faire un raisonnement analogue pour les courbes C_a, donc :

Les courbes C_1, C_a *rencontrent chacune des courbes* C_0', C_0'', ..., $C_0^{(\nu)}$ *en* p *points absorbés en* A.

8. Les courbes $C_i^{(0)}$ ont en A la multiplicité $\lambda_i + \mu_i$, λ_i tangentes étant confondues avec AA_a et μ_i avec AA_1. Dans le domaine du point A, T détermine une involution d'ordre p ; en d'autres termes, dans le faisceau des tangentes à F en A, T détermine une involution d'ordre p et les droites unies de cette involution sont AA_1 et AA_a.

D'autre part, au système $|C_0|$ est attaché le nombre $\epsilon^0 = 1$, donc, lorsque l'on applique au monome $x_1^\lambda x_a^\mu$ l'homographie

$$x'_0 : x'_1 : x'_a = x_0 : \epsilon x_1 : \epsilon^a x_a \tag{1}$$

induite par T dans le plan ξ tangent en A à la surface F, il doit se retrouver multiplié par $\epsilon^0 = 1$. On a donc

$$\lambda_i + a\mu_i \equiv 0, \qquad (\text{mod. } p).$$

Ainsi donc, *les multiplicités* $\lambda_i + \mu_i$ *des courbes* $C_0^{(i)}$ *en* A *sont données par les solutions de la congruence*

$$\lambda + a\mu \equiv 0, \qquad (\text{mod. } p)$$

telles que $\lambda_i + \mu_i < p$.

On peut déterminer le nombre $\nu + 1$ des systèmes $|C_0^{(i)}|$ de la manière suivante :

Observons tout d'abord que p, premier, est impair puisque pour $p = 2$, tous les points unis sont de première espèce.

Supposons que la surface F soit précisément le plan ξ et prenons pour système $|C|$ le système des courbes planes d'ordre p. Le système $|C|$ a le degré p^2 et le genre $\frac{1}{2}(p-1)(p-2)$.

Envisageons une courbe C_0, soit $\overline{C}_0$, ne passant par aucun des points A, A_1, A_a et soit Γ_0 une courbe représentant l'involution d'ordre p engendrée sur $\overline{C}_0$ par l'homographie (1). Dans la série complète d'ordre p^2 découpée sur $\overline{C}_0$ par les courbes C, série certainement non spéciale, il y a p séries partielles composées au moyen de l'involution engendrée par (1). Ces séries sont découpées par les courbes $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_{p-1}$. A ces séries correspondent sur la courbe Γ_0 des séries complètes, non spéciales, d'ordre p. Le genre de la courbe Γ_0 est, d'après la formule de Zeuthen, égal à $\frac{1}{2}(p-1)$, donc les séries en question ont, d'après le théorème de Riemann-Roch, la dimension $\frac{1}{2}(p+1)$. Il en résulte que les systèmes $|C_1|, |C_2|, \ldots, |C_{p-1}|$ ont la dimension $\frac{1}{2}(p+1)$ et le système $|C_0|$ la dimension $\frac{1}{2}(p+3)$.

Actuellement, le système $|C_0^{(\nu+1)}|$ est formé par les groupes de p droites passant par A, formant des groupes de l'involution déterminée par l'homographie (1) dans le faisceau de sommet A. Ce système $|C_0^{(\nu+1)}|$ a donc la dimension un. On a donc

$$r_0 - (\nu + 1) = \frac{1}{2}(p+3) - (\nu+1) = 1,$$

d'où l'on déduit $p = 2\nu + 1$.

Le nombre des solutions en nombres positifs de la congruence

$$\lambda + \alpha\mu \equiv 0, \qquad (\text{mod. } p)$$

telles que $\lambda + \mu < p$ est évidemment indépendant de la nature de la surface F, donc *le nombre des systèmes*

$$|C_0'|, \ |C_0''|, \ldots, \ |C_0^{(\nu)}|, \ |C_0^{(\nu+1)}|$$

est égal à $\frac{1}{2}(\mathrm{p}+1)$.

9. Transformons birationnellement F en une surface F′ de telle sorte qu'au point A corresponde sur F′ une courbe exceptionnelle a'. A l'involution I_p correspond sur F′ une involution I_p' d'ordre p engendrée par une transformation cyclique T′ de F′ en soi, homologue de T.

La courbe a' est transformée en elle-même par T′ et sur cette courbe, T′ engendre une involution d'ordre p présentant deux points unis A_1', A_2'. Ces points sont les transformés des points unis de l'involution I_p infiniment voisins de A ; ce sont des points unis de l'involution I_p'.

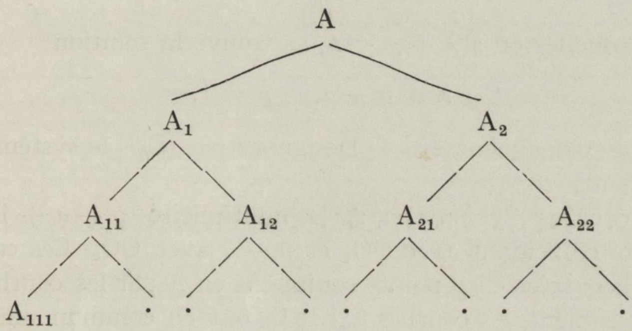
Les points A_1', A_2' peuvent être unis de première espèce pour l'involution I_p'. Si par exemple A_1' est dans ce cas, nous dirons que le point uni infiniment voisin de A qui lui correspond sur F est uni de première espèce pour l'involution I_p.

Supposons que A_1' soit uni de seconde espèce pour I_p' ; nous dirons alors que le point uni infiniment voisin de A qui lui correspond sur F est uni de seconde espèce pour I_p. Transformons F′ birationnellement en une surface F″ de telle sorte qu'à A_1' corresponde une courbe exceptionnelle a_1''. A l'involution I_p'

correspond une involution I''_p qui possède deux points unis A''_{11}, A''_{12} sur a''_1.

Suivant que A''_{11} par exemple est uni de première ou de seconde espèce pour I''_p, nous dirons que le point qui lui correspond sur F, dans le domaine du second ordre de A, est uni de première ou de seconde espèce pour I_p. Et ainsi de suite.

On voit ainsi que le point A est, sur F, l'origine d'une sorte d'arbre



Chaque nœud de cet arbre ou bien est un point uni de première espèce, ou bien c'est un point uni de seconde espèce et il est alors l'origine de deux rameaux qui portent chacun à leur tour un second point uni de l'involution I_p.

Notre but est de déterminer les nœuds de l'arbre par lesquels passent les courbes C'_0, C''_0, ..., $C_0^{(\nu)}$; c'est ce que nous appelons déterminer la structure du point uni A. En même temps nous déterminerons la structure du point de diramation A' de Φ homologue de A, c'est-à-dire la singularité de ce point pour la surface Φ et la configuration des courbes équivalentes, au point de vue des transformations birationnelles, à cette singularité. Ces courbes seront appelées les composantes du point singulier A' pour la surface Φ.

Observons que si les courbes $C_0^{(i)}$, par exemple, passent par une suite de nœuds de l'arbre de A et que P est le dernier de ces nœuds commun à toutes ces courbes sur un certain cheminement, le point P est uni de première espèce pour l'involution I_p. On peut en effet, par une suite de transformations birationnelles de la surface F, être conduit à une surface $\overline{F}$, birationnellement identique à F, contenant une involution $\overline{I}_p$, transformée de I_p, sur laquelle le transformé $\overline{P}$ de P est un point propre. Le point $\overline{P}$

est uni pour $\overline{\mathrm{I}}_p$ et les transformées des courbes $C_0^{(i)}$ passent par $\overline{\mathrm{P}}$ avec des tangentes variables. Comme cette transformée de $C_0^{(i)}$ est transformée en elle-même par la transformation $\overline{\mathrm{T}}$ génératrice de $\overline{\mathrm{I}}_p$, $\overline{\mathrm{P}}$ doit être un point uni de première espèce pour $\overline{\mathrm{I}}_p$. Par suite, P est un point uni de première espèce pour I_p.

10. Parmi les solutions de la congruence

$$\lambda + \alpha\mu \equiv 0, \qquad (\text{mod. } p)$$

pour lesquelles on a $\lambda + \mu < p$, se trouve la solution

$$\lambda = p - \alpha, \qquad \mu = 1,$$

car on a évidemment $\alpha > 1$. Désignons par $|C_0^{(i)}|$ le système correspondant.

Les courbes $C_0^{(i)}$ ont en A la multiplicité $p - \alpha + 1$, une tangente coïncidant avec OO_1 et $p - \alpha$ avec OO_α. Ces courbes sont rencontrées en p points confondus en A par les courbes C_α, par conséquent, les courbes $C_0^{(i)}$ et C_α ont en commun une suite de $\alpha - 1$ points communs, infiniment voisins successifs de A, qui restent fixes lorsque les courbes varient. Nous désignerons ces points par la notation

$$(\alpha,\ 1),\ (\alpha,\ 2), \ldots,\ (\alpha,\ \alpha - 2),\ (\alpha,\ \alpha - 1).$$

Ces points sont unis de seconde espèce pour l'involution I_p, sauf le dernier, qui est uni de première espèce. On le montrerait en reprenant un raisonnement analogue à celui qui vient d'être fait.

Nous obtenons ainsi une branche de l'arbre d'origine A, terminée par un point uni de première espèce.

Observons que sur une courbe $C_0^{(i)}$, le point A est l'origine d'une branche linéaire passant par les points de la suite qui vient d'être rencontrée. Pour cette raison, nous appellerons cette suite de points infiniment voisins successifs de A une suite principale.

Observons encore que si l'on a

$$\lambda + \alpha\mu = p,$$

les courbes C_0^* correspondantes passent μ fois par tous les points de la suite principale.

11. L'homographie (1) déterminée dans le plan tangent ξ à

F en A par T pourrait également être représentée par les équations

$$x'_0 : x'_1 : x'_\alpha = x_0 : \eta^\beta x_1 : \eta x_\alpha,$$

en posant $\eta = \epsilon^\alpha$. Le nombre β est compris entre 0 et p et satisfait à la congruence

$$\alpha\beta - 1 \equiv 0, \qquad (\text{mod. } p).$$

Les solutions λ, μ de la congruence

$$\lambda + \alpha\mu \equiv 0, \qquad (\text{mod. } p)$$

satisfont également à la congruence

$$\mu + \beta\lambda \equiv 0, \qquad (\text{mod. } p)$$

Parmi ces solutions, se trouve $\lambda = 1$, $\mu = p - \beta$ et les courbes correspondantes, que nous désignerons par $C_0^{(j)}$, ont en A la multiplicité $p - \beta + 1$, une tangente coïncidant avec AA_α et $p - \beta$ avec AA_1. On en conclut que les courbes $C_0^{(j)}$ et les courbes C_1 ont en commun une suite de $\beta - 1$ points, infiniment voisins successifs de A, que nous représenterons par

$$(1, 1), (1, 2), \ldots, (1, \beta - 2), (1, \beta - 1).$$

Ces points sont unis de seconde espèce pour l'involution I_p, sauf le dernier, qui est uni de première espèce. Ces points se trouvent sur une branche linéaire d'origine A de chacune des courbes $C_0^{(j)}$ et constituent la seconde suite principale de l'arbre des points unis d'origine A.

Pour tout système de courbes $|C_0^*|$ correspondant à des nombres λ, μ tel que

$$\mu + \beta\lambda = p,$$

les points de la seconde suite principale sont nécessairement multiples d'ordre λ.

12. Considérons le système $|C'_0|$, correspondant à la solution λ_1, μ_1. On a

$$\lambda_1 + \alpha\mu_1 = h_\alpha p, \quad \mu_1 + \beta\lambda_1 = h_\beta p,$$

h_α et h_β étant des nombres entiers supérieurs ou égaux à l'unité.

Nous aurons à considérer trois cas et nous appellerons :

Point uni de la première catégorie un point pour lequel $h_\alpha = h_\beta = 1$;

Point uni de la seconde catégorie un point pour lequel un seul des nombres h_α, h_β est égal à l'unité ;

Point uni de la troisième catégorie un point pour lequel les deux nombres h_α, h_β sont supérieurs à l'unité.

Observons que pour un point uni de la première catégorie, les courbes C'_0, d'après une observation faite plus haut, passent μ_1 fois par chacun des points de la première suite principale $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, ..., $(\alpha, \alpha - 1)$ et λ_1 fois par chacun des points de la deuxième suite principale $(1, 1)$, $(1, 2)$, ..., $(1, \beta - 1)$. Au contraire, si $h_\alpha > 1$ par exemple, les courbes C'_0 passent par les points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, ... $(\alpha, \alpha - 1)$ avec des multiplicités qui sont en général inférieures à μ_1.

Nous étudierons successivement les points des trois catégories, mais auparavant, nous établirons les relations fonctionnelles qui lient les courbes Γ_0, Γ_1, ..., Γ_{p-1}.

13. Considérons, dans le système $|C|$, une courbe $C^{(1)}$ n'appartenant à aucun des systèmes $|C_0|$, $|C_1|$, ..., $|C_{p-1}|$. L'homographie T et ses puissances lui font correspondre des courbes $C^{(2)}$, $C^{(3)}$, ..., $C^{(p)}$ appartenant à $|C|$. Les groupes de I_p dont un point appartient à $C^{(1)}$ ont pour homologues sur Φ les points d'une courbe Γ de même genre $p(\pi - 1) + 1$ que $C^{(1)}$.

Soit P un point commun à $C^{(1)}$ et à $C^{(2)}$. L'homographie T^{p-1} lui fait correspondre un point P′ commun à $C^{(p)}$ et à $C^{(1)}$ qui appartient au même groupe de I_p que P. A ce groupe correspond un point double de la courbe Γ.

De même, un point commun aux courbes $C^{(1)}$, $C^{(3)}$ appartient à un groupe de I_p qui a un point commun à $C^{(p-1)}$ et $C^{(1)}$ et auquel correspond sur Φ un point double de la courbe Γ, et ainsi de suite.

Comme le système $|C|$ a le degré pn, la courbe Γ est de genre virtuel

$$p(\pi - 1) + 1 + \frac{1}{2}p(p - 1)n$$

et de degré virtuel

$$pn + p(p - 1)n = p^2n.$$

La courbe $C^{(1)}$ varie dans un système linéaire, donc la courbe Γ varie dans un système rationnel appartenant totalement à un système linéaire $|\Gamma|$ dont le genre et le degré sont égaux aux genre et degré virtuels de la courbe Γ. D'ailleurs, à $|\Gamma|$ correspond sur F un système linéaire appartenant au système $|pC|$.

Dans le système $|C|$, faisons varier $C^{(1)}$ d'une manière continue en la faisant tendre vers une courbe C_0. Les courbes $C^{(2)}, C^{(3)}, \ldots, C^{(p)}$ tendent vers la même courbe C_0 et la courbe Γ tend vers la courbe Γ_0 homologue comptée p fois. On a donc

$$|\Gamma| = |p\Gamma_0|.$$

Faisons maintenant tendre la courbe $C^{(1)}$, dans $|C|$, d'une manière continue vers une courbe C_i ($i = 1, 2, \ldots, p-1$). Les courbes $C^{(2)}, C^{(3)}, \ldots, C^{(p)}$ tendent également vers C_i et la courbe Γ tend vers la courbe Γ_i comptée p fois. Mais les courbes C_i sont découpées sur F par les hyperplans de Σ_i et ces hyperplans contiennent σ_0, donc les courbes C_i passent par les points unis de I_p. Par conséquent, les courbes Γ_i passent par les points de diramation de Φ et l'on a

$$|\Gamma| = |p\Gamma_i + \Delta_i|,$$

Δ_i étant une certaine combinaison des courbes auxquelles les points de diramation de Φ sont équivalents au point de vue des transformations birationnelles. On a donc les relations fonctionnelles

$$p\Gamma_0 \equiv p\Gamma_1 + \Delta_1 \equiv p\Gamma_2 + \Delta_2 \equiv \ldots \equiv p\Gamma_{p-1} + \Delta_{p-1}.$$

II. Points unis de seconde espèce et de première catégorie.

14. Supposons que le point uni de seconde espèce soit de la première catégorie. On a donc

$$\lambda_1 + \alpha\mu_1 = p, \quad \mu_1 + \beta\lambda_1 = p.$$

Comme nous l'avons déjà observé, les courbes C_0' passent $\lambda_1 + \mu_1$ fois par O, μ_1 fois par chacun des points $(\alpha, 1), (\alpha, 2), \ldots, (\alpha, \alpha - 1)$ et λ_1 fois par chacun des points $(1, 1), (1, 2), \ldots, (1, \beta - 1)$.

Le nombre des points d'intersection de deux courbes C'_0 absorbés en A est

$$(\lambda_1 + \mu_1)^2 + (\alpha - 1)\,\mu_1^2 + (\beta - 1)\,\lambda_1^2 = p(\lambda_1 + \mu_1).$$

Désignons par Γ'_0 les sections hyperplanes de Φ qui correspondent aux courbes C'_0 ; leurs hyperplans passent par le point de diramation A′ homologue du point uni A. Il en résulte que A′ est multiple d'ordre $\lambda_1 + \mu_1$ pour la surface Φ.

Projetons Φ du point A′ sur un hyperplan de l'espace ambiant σ_0 ne passant pas par A′ ; nous obtenons une surface Φ_1 d'ordre $n - (\lambda_1 + \mu_1)$ dont les sections hyperplanes sont les courbes Γ'_0.

Au domaine du point $(1, \beta - 1)$, qui est multiple d'ordre λ_1 pour les courbes C'_0, correspond sur Φ_1 une courbe rationnelle σ_1, d'ordre λ_1 et au domaine du point $(\alpha, \alpha - 1)$, qui est multiple d'ordre μ_1 pour les courbes C'_0 correspond sur Φ_1 une courbe rationnelle σ_2, d'ordre μ_1. Le cône tangent à Φ en A′ s'obtient en projetant de ce point les courbes σ_1, σ_2.

15. Envisageons maintenant les courbes C''_0. Elles ont en A une multiplicité $\lambda_2 + \mu_2 > \lambda_1 + \mu_1$. Par conséquent, elles ne peuvent plus passer λ_1 fois par le point $(1, \beta - 1)$, car alors elles passeraient au moins λ_1 fois par les points $(1, \beta - 2)$, $(1, \beta - 3)$, ..., $(1, 1)$ et les courbes C_1 rencontreraient les courbes C''_0 en plus de p points confondus en A. Pour la même raison, les courbes C''_0 ne peuvent passer μ_1 fois par le point $(\alpha, \alpha - 1)$. Il en résulte que les courbes Γ''_0 qui correspondent sur Φ_1 aux courbes C''_0, sont découpées sur cette surface par les hyperplans passant par un point A'_1 commun aux courbes σ_1, σ_2.

Comme nous l'avons remarqué, on peut supposer r_0 aussi grand que l'on veut. Les courbes σ_1, σ_2, qui sont assujetties à la seule condition d'être rationnelles et rencontrées l'une en λ_1 points, l'autre en μ_1 points par les hyperplans de l'espace à $r_0 - 1$ dimensions qui contient Φ_1, peuvent supposées être des courbes normales et par suite dépourvues de points multiples. Le point A'_1 est donc simple pour ces courbes et les courbes C''_0 passent $\lambda_1 - 1$ fois par le point $(1, \beta - 1)$ et $\mu_1 - 1$ fois par le point $(\alpha, \alpha - 1)$.

Mais le point A'_1 peut être multiple pour la surface Φ_1. Observons qu'il provient d'un point infiniment voisin de A′ situé sur une génératrice commune aux deux composantes du cône tangent à Φ en A'. Par conséquent, A'_1 est en plus double pour la surface Φ_1.

Un point double pour une surface peut être composé d'une suite de points doubles biplanaires infiniment voisins successifs, terminé soit par un point double biplanaire ordinaire, soit par un point double conique. Dans le premier cas, il est équivalent à une suite de courbes rationnelles de degré -2, en nombre pair ; dans le second cas, à une suite analogue de courbes en nombre impair. Nous sommes donc conduit à supposer que le point A'_1 est équivalent à une suite de t courbes rationnelles de degré virtuel -2,

$$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_t,$$

chacune de ces courbes rencontrant la précédente et la suivante en un point, mais ne rencontrant pas les autres.

Sur la surface Φ, le point de diramation A' est équivalent à la suite de courbes

$$\sigma_1, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_t, \sigma_2,$$

la courbe σ_1 rencontrant ρ_1 en un point, mais ne rencontrant pas les autres courbes et la courbe σ_2 rencontrant ρ_t en un point, mais ne rencontrant pas les autres courbes.

Observons que le système $|C''_0|$ étant unique par construction, les courbes σ_1, σ_2 de Φ_1 ne peuvent se rencontrer en dehors de A'_1.

Cela étant, on a

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma'_0 + \sigma_1 + \rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_t + \sigma_2,$$

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma''_0 + \sigma_2 + 2(\rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_t) + \sigma_2.$$

On en conclut que σ_1 est de degré virtuel $-(\lambda_1 + 1)$ et la courbe σ_2 de degré virtuel $-(\mu_1 + 1)$.

16. Les courbes C_1 passent simplement par le point $(1, \beta - 1)$, par conséquent les courbes Γ_1, sur Φ_1, rencontrent en un point la courbe σ_1. D'autre part, on a

$$p\Gamma_0 \equiv p\Gamma_1 + \xi_1\sigma_1 + \zeta_1\rho_1 + \zeta_2\rho_2 + \ldots + \zeta_t\rho_t + \xi_2\sigma_2 + \Delta,$$

Δ étant un terme qui provient des autres points de diramation de la surface Φ.

Exprimons que la courbe σ_2 ne rencontre que la courbe ρ_t

parmi les courbes figurant dans la relation précédente. Nous avons

$$\zeta_t - (\mu_1 + 1)\xi_2 = 0.$$

En exprimant que la courbe ρ_t ne rencontre que ρ_{t-1} et σ_2, on a

$$\zeta_{t-1} - 2\zeta_t + \xi_2 = 0.$$

On obtient de même

$$\zeta_{t-2} - 2\zeta_{t-1} + \zeta_t = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\zeta_1 - 2\zeta_2 + \zeta_3 = 0,$$
$$\xi_1 - 2\zeta_1 + \zeta_2 = 0$$

et enfin, en écrivant que σ_1 rencontre Γ_1 en un point

$$p - \xi_1(\lambda_1 + 1) + \rho_1 = 0.$$

De ces relations, on déduit

$$\zeta_t = (\mu_1 + 1)\xi_2, \ \zeta_{t-1} = (2\mu_1 + 1)\xi_2, \ \zeta_{t-2} = (3\mu_1 + 1)\xi_2, \dots$$
$$\dots, \ \zeta_2 = [(t-1)\mu_1 + 1]\xi_2, \ \zeta_1 = (t\mu_1 + 1)\xi_2,$$
$$\xi_1 = [(t+1)\mu_1 + 1]\xi_2,$$
$$p = \xi_2[\lambda_1\mu_1 t + \lambda_1\mu_1 + \lambda_1 + \mu_1].$$

Comme p est premier, on en déduit $\xi_2 = 1$ et

$$p = \lambda_1\mu_1 t + \lambda_1\mu_1 + \lambda_1 + \mu_1.$$

On a ensuite

$$\alpha = \lambda_1 t + \lambda_1 + 1,$$
$$\beta = \mu_1 t + \mu_1 + 1.$$

La relation fonctionnelle liant Γ_0 et Γ_1 s'écrit

$$p\Gamma_0 \equiv p\Gamma_1 + \mu_1[(t+1)\sigma_1 + t\rho_1 + (t-1)\rho_2 + \dots +$$
$$2\rho_{t-1} + \rho_t] + \sigma_1 + \rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_t + \sigma_2.$$

Les courbes Γ_α rencontrent la courbe σ_2 en un point et un raisonnement analogue au précédent conduit à la relation fonctionnelle

$$p\Gamma_0 \equiv p\Gamma_\alpha + \lambda_1[\rho_1 + 2\rho_2 + \dots + (t-1)\rho_{t-1} + t\rho_t +$$
$$(t+1)\sigma_2] + \sigma_1 + \rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_t + \sigma_2.$$

17. Dans les relations précédentes, t peut être pair ou impair. En mettant ce fait en évidence, on parvient au résultat suivant :

Le point de diramation A' de la surface Φ correspondant à un point uni de seconde espèce et de la première catégorie de l'involution I_p, *est multiple d'ordre* $\lambda_1 + \mu_1$ *pour la surface. Le cône tangent en ce point à la surface se compose de deux cônes rationnels l'un d'ordre* λ_1, *l'autre d'ordre* μ_1, *ayant une seule génératrice commune. Au point* A' *est infiniment voisin un point double biplanaire suivi d'un certain nombre de points doubles infiniment voisins successifs.*

Cette suite se compose de k *points doubles biplanaires dont le dernier est ordinaire si*

$$\mathrm{p} = (2\mathrm{k} + 1)\,\lambda_1\mu_1 + \lambda_1 + \mu_1$$

et on a alors

$$\alpha = (2\mathrm{k} + 1)\lambda_1 + 1, \quad \beta = (2\mathrm{k} + 1)\mu_1 + 1.$$

Cette suite se compose de k *points doubles biplanaires suivis d'un point double conique si*

$$p = (2\mathrm{k} + 2)\lambda_1\mu_1 + \lambda_1 + \mu_1$$

et on a alors

$$\alpha = (2\mathrm{k} + 2)\lambda_1 + 1, \quad \beta = (2\mathrm{k} + 2)\mu_1 + 1.$$

Si $p = 3$, on a nécessairement $\alpha = 2$, $\beta = 2$, $\lambda_1 = \mu_1 = 1$, $k = 0$. Le point A' est double biplanaire ordinaire pour la surface Φ.

Si $p = 5$, trois cas peuvent se présenter :

a) $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $k = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\mu_1 = 2$. Le point A' est triple pour la surface Φ, le cône tangent se décomposant en un plan et un cône du second ordre coupant le plan suivant une seule droite.

b) $\alpha = 3$, $\beta = 2$, $k = 0$, $\lambda_1 = 2$, $\mu_1 = 1$. La singularité de A' est la même que dans le cas précédent.

c) $\alpha = \beta = 4$, $k = 1$, $\lambda_1 = 2$, $\mu_1 = 1$. La surface Φ possède en A' un point double biplanaire auquel est infiniment voisin un point double biplanaire ordinaire.

Envisageons encore le cas $\alpha = \beta$, d'où $\lambda_1 = \mu_1$. On ne peut avoir

$$p = (2k + 2)\ \lambda_1\mu_1 + \lambda_1 + \mu_1,$$

car p serait divisible par 2. On a donc

$$p = (2k+1)\lambda_1\mu_1 + \lambda_1 + \mu_1 = \lambda_1[(2k+1)\lambda_1 + 2] = \lambda_1(\alpha + 1).$$

Comme p est premier et α supérieur à l'unité, on a $\lambda_1 = \mu_1 = 1$, $\alpha = \beta = p - 1$. Le point A' est double biplanaire pour la surface Φ et celle-ci possède k points doubles biplanaires dont le dernier est ordinaire, infiniment voisins successifs de A'.

18. Nous nous occuperons maintenant de la structure du point uni A et nous commencerons par examiner le cas où $\alpha = \beta$; comme nous venons de le voir, nous avons alors $\lambda_1 = \mu_1 = 1$,

$$\alpha = \beta = p - 1, \qquad p = 2k + 3.$$

Les solutions de la congruence

$$\lambda + (p-1)\mu \equiv 0, \qquad (\text{mod. } p)$$

sont alors

$$\lambda_i = \mu_i = i, \qquad (i = 1,\ 2, \ldots,\ \nu).$$

Les courbes C_0'' ont en A un point double et passent simplement par les points $(1, 1)$, $(1, 2)$, ..., $(1, p-2)$ et $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, ..., $(\alpha, p-2)$.

Les courbes C_0' ont en A un point quadruple et ne peuvent plus passer par les points $(1, p-2)$, $(\alpha, p-2)$, puisque la somme des multiplicités aux points de chaque suite principale est égale à p.

Comme les courbes C_0'' ont deux de leurs tangentes en A confondues avec AA_1 et avec AA_α, elles passent au plus deux fois par les premiers points de chacune des suites principales. Supposons qu'elles passent deux fois par les points $(1, 1)$, $(1, 2)$, ..., $(1, x)$ et une fois par le point $(1, x+1)$. Nous devons avoir

$$4 + 2x + 1 = p = 2k + 3,$$

d'où $x = k - 1$. Les courbes C_0'' passent par un point infiniment voisin du point simple $(1, k)$, point que nous désignerons par $(1, k, 1)$.

De même, les courbes C_0'' passent deux fois par les points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, ..., $(\alpha, k-1)$, une fois par le point (α, k) et une fois par un point $(\alpha, k, 1)$ infiniment voisin du précédent.

Reprenons la surface Φ_1 et projetons-la du point A_1' sur un hyperplan de l'espace ambiant ; nous obtenons une surface Φ_2, d'ordre $n - 4$, sur laquelle apparaissent les droites ρ_1, ρ_{2k} images du domaine du premier ordre de A'_1 sur Φ_1. Ces droites se coupent en un point A'_2 double biplanaire pour Φ_2 si $k > 1$, simple pour cette surface si $k = 1$. Aux courbes C''_0 correspondent sur Φ_2 les sections hyperplanes Γ''_0 de cette surface. Les droites ρ_1, ρ_{2k} correspondent aux domaines des points $(1, k, 1)$, $(\alpha, k, 1)$ qui sont donc des points unis de première espèce de l'involution I_p.

Les courbes C'''_0 ont un point sextuple en A, trois tangentes étant confondues avec AA_1 et trois avec AA_α, dans l'hypothèse $k > 1$. Projetons la surface Φ_2 de A'_2 sur un hyperplan de l'espace ambiant ; nous obtenons une surface Φ_3, d'ordre $n - 6$, dont les sections hyperplanes Γ'''_0 correspondent aux courbes C'''_0. Sur cette surface apparaissent deux droites ρ_2, ρ_{2k-1} images du domaine du premier ordre de A'_2 sur Φ_2. Ces droites se coupent en un point A'_3 qui est double biplanaire ou simple pour la surface Φ_3 suivant que k est supérieur ou égal à 2.

Les droites ρ_2, ρ_{2k-1} sont les images de deux points P_1, P_α unis de première espèce pour I_p, situés dans le voisinage d'un certain ordre de A, simple pour les courbes C'''_0. On voit donc que sur chacune de ces courbes, le point A est l'origine de deux branches superlinéaires l'une passant simplement par P_1, l'autre simplement par P_α.

Cela étant, supposons que les courbes C'''_0 passent trois fois par les points $(1, 1)$, $(1, 2)$, ..., $(1, x)$ et y fois par le point $(1, x + 1)$, y étant compris entre 0 et 3. Nous devons avoir

$$6 + 3x + y = 2k + 3 ;$$

nous avons deux hypothèses à faire :

$k = 3\eta + 1$. On a alors $3x + y = 6\eta - 1$, d'où $x = 2\eta - 1$, $y = 2$. Les courbes C'''_0 passent trois fois par les points $(1, 1)$, $(1, 2)$, ..., $(1, 2\eta - 1)$, deux fois par le point $(1, 2\eta)$, une fois par un point uni de seconde espèce $(1, 2\eta, 1)$ infiniment voisin de $(1, 2\eta)$ et une fois par un point uni de première espèce $(1, 2\eta, 1, 1)$, infiniment voisin de $(1, 2\eta, 1)$. Le point $(1, 2\eta, 1, 1)$ coïncide avec le point que nous avions désigné par P_1.

$k = 3\eta + 2$. On a alors $3x + y = 6\eta + 1$, $y = 1$, $x = 2\eta$. Les courbes C'''_0 passent trois fois par les points $(1, 1)$, $(1, 2)$, ..., $(1, 2\eta)$, une fois par le point $(1, 2\eta + 1)$, une fois par deux points unis $(1, 2\eta+1, 1)$, $(1, 2\eta+1, 2)$ infiniment voisins successifs de $(1, 2\eta+1)$, le premier uni de seconde espèce, le second uni de première espèce et coïncidant avec P_1.

L'hypothèse $k = 3\eta$ ne doit pas être considérée car p serait alors divisible par 3.

On arrive à des conclusions analogues pour l'autre branche des courbes C_0'''.

Le raisonnement peut être poursuivi si $k > 2$. Le point A est, sur toute courbe $C_0^{(i)}$, l'origine de deux branches superlinéaires. Le dernier point commun à toutes les courbes $C_0^{(i)}$ sur une de ces branches est simple pour les courbes, uni de première espèce pour I_p et à son domaine correspond une des courbes $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{2k}$.

En particulier, les courbes $C_0^{(\nu)}$ $(\nu = k+1)$ ont en A la multiplicité $2k+2$ et passent simplement par une première suite de points infiniment voisins successifs $(1, 1)$, $(1, 1, 1)$, ..., $(1, 1, k)$ unis de seconde espèce pour I_p sauf le dernier, qui est uni de première espèce, et par une seconde suite de points infiniment voisins successifs $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 1, 1)$, ..., $(\alpha, 1, k)$ unis de seconde espèce pour I_p, sauf le dernier qui est uni de première espèce. Les domaines des points $(1, 1, k)$, $(\alpha, 1, k)$ ont pour homologues sur Φ les courbes rationnelles ρ_k, ρ_{k+1}.

Nous avons appelé les points A des points unis symétriques à cause de la symétrie des comportements des branches des courbes C_0', C_0'', ... par rapport aux deux suites principales.

19. Nous allons maintenant supposer $\alpha \neq \beta$ et, pour préciser, $\alpha < \beta$, d'où $\lambda_1 < \mu_1$. Observons que λ_1 et μ_1 doivent être premiers entre eux, car autrement p ne serait pas premier.

Rappelons que nous avons

$$p = (t+1)\lambda_1\mu_1 + \lambda_1 + \mu_1, \quad \alpha = (t+1)\lambda_1 + 1,$$
$$\beta = (t+1)\mu_1 + 1.$$

Les solutions des congruences

$$\lambda + \alpha\mu \equiv 0, \quad \mu + \beta\lambda \equiv 0, \qquad (\mathrm{mod.}\ p)$$

peuvent se mettre sous la forme

$$\lambda = m\alpha + n\lambda_1, \quad \mu = n\mu_1 - m,$$

où, m, n sont des entiers positifs tels que

$$m(\alpha - 1) + n(\lambda_1 + \mu_1) < p.$$

Elles peuvent également se mettre sous la forme

$$\lambda = n'\lambda_1 - m', \quad \mu = m'\beta + n'\mu_1,$$

en posant

$$m' = -m, \quad n' = (t + 1)m + n.$$

Projetons la surface Φ_1 du point A_1 sur un hyperplan de l'espace ambiant et soit Φ_2 la surface obtenue.

Si $t = 0$, il correspond sur Φ_2 un domaine du point A'_1 sur Φ_1 une droite exceptionnelle, le point A'_1 étant simple pour Φ_1.

Si $t = 1$, il correspond sur Φ_2 au domaine du point A'_1 de Φ_1 une conique ρ_1, le point A'_1 étant double conique pour Φ_1.

Si $t \geqslant 2$, il correspond sur Φ_2 au domaine du point A'_1 de Φ_1 deux droites ρ_1, ρ_t se coupant en un point A'_2 simple pour Φ_2 si $t = 2$ et double si $t > 2$.

Aux courbes σ_1, σ_2 correspondent sur Φ_2 deux courbes que nous continuerons à désigner par les mêmes symboles et qui sont respectivement d'ordres $\lambda_1 - 1$, $\mu_1 - 1$. Dans le second cas ($t = 1$), ces courbes s'appuyent sur la conique ρ_1, dans le troisième ($t \geqslant 2$), σ_1 rencontre ρ_1 et σ_2 rencontre ρ_t en un point.

Aux sections hyperplanes Γ''_0 de Φ_2 correspondent sur F les courbes C''_0. Le système $|C''_0|$ correspond à la solution λ_2, μ_2 telle que $\lambda_2 + \mu_2$ soit supérieur à $\lambda_1 + \mu_1$, mais inférieur à toutes les sommes $\lambda_3 + \mu_3, \ldots, \lambda_\nu + \mu_\nu$ provenant des autres solutions des congruences

$$\lambda + \alpha\mu \equiv 0, \quad \mu + \beta\lambda \equiv 0, \qquad (\text{mod. } p).$$

Cette solution λ_2, μ_2 est soit

$$\alpha + \lambda_1, \quad \mu_1 - 1,$$

soit

$$2\lambda_1, \quad 2\mu_1.$$

La première se présente si $\mu_1 > t\lambda_1$, la seconde si $\mu_1 < t\lambda_1$.

20. Considérons en premier lieu le cas $t = 0$. On a alors

$$p = \lambda_1\mu_1 + \lambda_1 + \mu_1, \quad \alpha = \lambda_1 + 1, \quad \beta = \mu_1 + 1.$$

On a $\lambda_2 = \alpha + \lambda_1 = 2\lambda_1 + 1$, $\mu_2 = \mu_1 - 1$.

Les courbes C_0 passent $2\lambda_1 + \mu_1$ fois par le point A et ont en ce point $2\lambda_1 + 1$ tangentes avec $AA\alpha$ et $\mu_1 - 1$ avec AA_1. Elles passent en outre $\mu_1 - 1$ fois par les points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, ..., $(\alpha, \alpha - 1)$.

Les courbes C''_0 passent $\lambda_1 - 1$ fois par le point $(1, \beta - 1)$ et à la droite exceptionnelle qui correspond au domaine du point A'_1 sur Φ_2, correspond le domaine d'un point P, uni de première espèce pour I_p, simple pour les courbes C''_0. On en conclut que les courbes C''_0 passent $2\lambda_1 + 1$ fois par les points $(1, 1)$, $(1, 2)$, ..., $(1, x)$, y fois par le point $(1, x + 1)$ et $\lambda_1 - 1$ fois par les points $(1, x + 2)$, ..., $(1, \beta - 1)$, où y est un nombre compris en λ_1 et $2\lambda_1$ et pouvant être égal à l'un de ces nombres.

En exprimant que les courbes C''_0 sont rencontrées en p points confondus en A par les courbes C_1, on trouve

$$(\lambda_1 + 2)x + y = \mu_1 - 1\,; \qquad (\lambda_1 \leqslant y \leqslant 2\lambda_1).$$

Posons

$$\mu_1 = \theta(\lambda_1 + 2) + h + 1, \qquad (h < \lambda_1 + 2).$$

Si $h > \lambda_1 - 1$, on posera $x = \theta$, $y = h$. Si $h < \lambda_1 - 1$, on prendra $x = \theta - 1$ et $y = h + \lambda_1 + 2$. Observons que l'on ne peut avoir $h = \lambda_1 - 1$, car alors, on aurait $p = (\lambda_1 + 2)(\theta\lambda_1 + \theta + \lambda_1)$ et p ne serait pas premier.

Les courbes C''_0 passent par le point uni $(1, x + 1, 1)$ avec une multiplicité égale à $y - \lambda_1 + 1$. Elles passeront par les points $(1, x + 1, 2)$. $(1, x + 1, 3)$, ... de manière que la somme des multiplicités en ces points $(1, x + 1,1)$, $(1, x + 1, 2)$, ... soit égale à $2\lambda_1 - y + 1$.

Nous allons montrer que les nombres $y - \lambda_1 + 1$, $2\lambda_1 - y + 1$ sont premiers entre eux. En effet, s'ils avaient un facteur commun, ce facteur diviserait $\lambda_1 + 2$ et $y + 3$; par conséquent, il diviserait également $\mu_1 + 2$. Mais on a $p = (\lambda_1 + 2)(\mu_1 + 1) - (\mu_1 + 2)$ et p ne serait pas premier.

Cela étant, posons

$$2\lambda_1 - y + 1 = \theta_1(y - \lambda_1 + 1) + h_1.$$

Les courbes C''_0 passent $y - \lambda_1 + 1$ fois par les points $(1, x + 1, 1)$, $(1, x + 1, 2)$, ..., $(1\ x + 1, \theta_1)$ et h_1 fois par $(1, x + 1, \theta_1 + 1)$, ces points étant unis pour I_p, de seconde espèce et étant d'autre part infiniment voisins successifs du point $(1, x + 1)$.

Posons ensuite

$$y - \lambda_1 + 1 = \theta_2 h_1 + h_2.$$

Les courbes C_0'' passent h_1 fois par les points unis de seconde espèce $(1, x + 1, \theta_1 + 1, 1), \ldots, (1, x + 1, \theta_1 + 1, \theta_2)$ infiniment voisins successifs du point $(1, x + 1, \theta_1 + 1)$ et h_2 fois par le point $(1, x + 1, \theta_1 + 1, \theta_2 + 1)$, infiniment voisin de $(1, x + 1, \theta_1 + 1, \theta_2)$. Et ainsi de suite. Comme $2\lambda_1 - y + 1$ et $y - \lambda_1 + 1$ sont premiers entre eux, on parviendra finalement à un point simple, uni de première espèce, commun à toutes les courbes C_0''. Le domaine de ce point correspond au domaine du point A_1' sur Φ_1 ou encore à la droite exceptionnelle qui représente ce domaine sur Φ_2.

L'étude des courbes C_0''', $C_0^{(4)}$, ... se poursuivra de la même manière, mais en laissant à λ_1, μ_1 des valeurs non spécifiées, on est conduit rapidement à des notations compliquées. Il nous paraît plus utile de traiter un cas où λ_1, μ_1 ont des valeurs numériques.

21. Supposons $\lambda_1 = 2$, $\mu_1 = 3$, d'où $p = 11$, $\alpha = 3$, $\beta = 4$. Les solutions des congruences

$$\lambda + 3\mu \equiv 0, \quad \mu + 4\lambda \equiv 0, \qquad (\text{mod. } 11).$$

sont $\lambda_1 = 2$, $\mu_1 = 3$; $\lambda_2 = 5$, $\mu_2 = 2$; $\lambda_3 = 1$, $\mu_3 = 7$; $\lambda_4 = 8$, $\mu_4 = 1$; $\lambda_5 = 4$, $\mu_5 = 6$.

Les courbes C_0' passent cinq fois par A, trois fois par les points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$ et deux fois par les points $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$. Nous représenterons le schéma de leur comportement en A par

$$\begin{array}{ll} & A^5,\ (\alpha,\ 1)^3,\ (\alpha,\ 2)^3, \\ (1,\ 1)^2, & \\ (1,\ 2)^2, & \\ (1,\ 3)^2, & \end{array}$$

en indiquant en exposant les multiplicités des points.

En appliquant la méthode précédente, on trouve que le comportement des courbes C_0'' en A a pour schéma

$$\begin{array}{ll} & A^7,\ (\alpha,\ 1),^2\ (\alpha,\ 2)^2. \\ (1, 1, 3)^1,\ (1, 1, 2)^1,\ (1, 1, 1)^1, & (1, 1)^2, \\ & (1,\ 2)^1, \\ & (1,\ 3)^1. \end{array}$$

La même méthode, en intervertissant les rôles des deux suites principales, donne le comportement en A des courbes C_0'''' par le schéma

$$\begin{array}{lll} & A^8, & (\alpha, 1)^2, \quad (\alpha, 2)^1. \\ (1, 1)^1, & & (\alpha, 1, 1)^1, \\ (1, 2)^1, & & (\alpha, 1, 2)^1, \\ (1, 3)^1. & & (\alpha, 1, 3)^1, \\ & & (\alpha, 1, 4)^1, \\ & & (\alpha, 1, 5)^1. \end{array}$$

Pour les courbes $C_0^{(4)}$, on trouve le schéma

$$\begin{array}{ll} & A^9, (\alpha, 1)^1, (\alpha, 2)^1. \\ (1, 1, 3)^2, (1, 1, 2)^2, (1, 1, 1)^2, (1, 1)^2, & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad (1, 2)^0, & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad (1, 3)^0. & \end{array}$$

et pour les courbes $C_0^{(5)}$,

$$\begin{array}{ll} & A^{10}, \quad (\alpha, 1)^1, (\alpha, 2)^0. \\ (1, 1, 3)^1, (1, 1, 2)^1, (1, 1, 1)^1, (1, 1)^1, & (\alpha, 1, 1)^1, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad (1, 2)^0, & \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad (1, 3)^0. & (\alpha, 1, 5)^1. \end{array}$$

Sur la surface Φ_1, les courbes σ_1, σ_2 sont une conique et une cubique gauche se coupant en un point A_1' simple pour la surface. Les courbes Γ_0'' sont découpées par les hyperplans passant par A_1', les courbes Γ_0'''' par les hyperplans passant par la tangente à σ_2 en A_1', les courbes $\Gamma_0^{(4)}$, homologues des courbes $C_0^{(4)}$, par les hyperplans tangents en A_1' aux courbes σ_1, σ_2, les courbes $\Gamma_0^{(5)}$, homologues des courbes $C_0^{(5)}$, par les hyperplans tangents à σ_1 et osculateurs à σ_2 en A_1'.

Les courbes Γ_0'', Γ_0'''', $\Gamma_0^{(4)}$, $\Gamma_0^{(5)}$ appartiennent totalement au système $|\Gamma_0'|$.

22. Nous allons maintenant étudier le cas $t = 1$, d'où

$$p = 2\lambda_1\mu_1 + \lambda_1 + \mu_1, \quad \alpha = 2\lambda_1 + 1, \quad \beta = 2\mu_1 + 1$$

Les courbes C_0' passent $\lambda_1 + \mu_1$ fois par A, μ_1 fois par chacun des points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, ..., $(\alpha, \alpha - 1)$ et λ_1 fois par les points $(1, 1)$, $(1, 2)$, ..., $(1, \beta - 1)$.

On a $\lambda_2 = 3\lambda_1 + 1$, $\mu_2 = \mu_1 - 1$. Les courbes C_0'' passent donc

$3\lambda_1 + \mu_1$ fois par A et $\mu_1 - 1$ fois par chacun des points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2), \ldots, (\alpha, \alpha - 1)$.

Supposons qu'elles passent $3\lambda_1 + 1$ fois par les points $(1, 1)$, $(1, 2), \ldots, (1, x)$, y fois par le point $(1 \;\; x + 1)$ et $\lambda_1 - 1$ fois par les autres points $(1, x + 2), \ldots, (1, \beta - 1)$. Cela se justifie par le fait que les courbes Γ_0'' sont découpées sur la surface Φ_1 par les hyperplans passant par A_1' et que, d'autre part, sur la surface Φ_2, les courbes σ_1, σ_2 sont d'ordres respectifs $\lambda_1 - 1$, $\mu_1 - 1$ et qu'il existe sur cette surface une conique ρ_1 rencontrant σ_1 et σ_2 chacune en un point. La conique ρ_1 représente le domaine de A_1' sur Φ_1 et donc correspond au domaine d'un point P, uni de première espèce pour I_p, commun à toutes les courbes C_0''. Il en résulte que sur chaque courbe C_0'', le point A est l'origine d'une branche superlinéaire qui passe nécessairement par le point $(1, 1)$ et qui a le point P comme point double.

En exprimant que les courbes C_1 rencontrent les courbes C_0'' en p points confondus en A, on a

$$2x(\lambda_1 + 1) + y = 2\mu_1 - (\lambda_1 + 1).$$

Posons

$$\mu_1 = \theta(\lambda_1 + 1) + h, \qquad (h < \lambda_1 + 1)$$

d'où

$$2x(\lambda_1 + 1) + y = (2\theta - 1)(\lambda_1 + 1)h + 2h.$$

On ne peut avoir $h = \lambda_1$, car alors, on aurait

$$p = (\lambda_1 + 1)(2\theta\lambda_1 + \theta + 2h_1)$$

et p ne serait pas premier. Cela étant, on prendra

$$x = \theta - 1, \quad y = 2h + \lambda_1 + 1.$$

La branche superlinéaire dont il est question plus haut se détachera de la suite principale au point $(1, x + 1)$ et passera par le point $(1, x + 1,1)$ et par d'autres points infiniment voisins du précédent. Nous devrons comparer les nombres

$$3\lambda_1 + 1 - y = 2(\lambda_1 - h),$$

différence entre les multiplicités des points $(1, x)$, $(1, x + 1)$ pour les courbes C_0'', et

$$y - (\lambda_1 - 1) = 2(h + 1),$$

différence entre les multiplicités des points $(1, x+1)$ et $(1, x+2)$ pour les mêmes courbes.

Si les nombres $\lambda_1 - h$ et $h+1$ ont un facteur commun, ce facteur divise aussi $\lambda_1 + 1$, donc également $\mu_1 + 1$. Or, on a

$$p = 2(\lambda_1 + 1)(\mu_1 + 1) - (\lambda_1 + 1) - (\mu_1 + 1)$$

et p ne serait pas premier. Il en résulte que les nombres $2(\lambda_1 - h)$ et $2(h+1)$ ont pour plus grand commun diviseur 2.

Posons

$$\lambda_1 - h = \theta_1(h+1) + h_1.$$

Les courbes C_0'' passent $2(h+1)$ fois par les points unis $(1, x+1, 1), \ldots, (1, x+1, \theta_1)$ infiniment voisins successifs de $(1, x+1)$ et $2h_1$ fois par le point $(1, x+1, \theta_1+1)$, infiniment voisin de $(1, x+1, \theta_1)$. On posera ensuite

$$h + 1 = \theta_2 h_1 + h_2$$

et les courbes C_2'' passeront $2h_1$ fois par les points $(1, x+1, \theta_1+1, 1), \ldots, (1, x+1, \theta_1+1, \theta_2)$ infiniment voisins successifs de $(1, x+1, \theta_1+1)$ et $2h_2$ fois par le point $(1, x+1, \theta_1+1, \theta_2+1)$, infiniment voisin de $(1, x+1, \theta_1+1, \theta_2)$. Et ainsi de suite. On parviendra finalement au point P, double pour les courbes C_0'', uni de première espèce pour I_p.

On aura ensuite

$$\lambda_3 = 5\lambda_1 + \mu_1, \quad \mu_3 = \mu_1 - 2 \quad \text{si} \quad 3\lambda_1 < \mu_1$$

ou

$$\lambda_3 = 2\lambda_1, \quad \mu_3 = 2\mu_1 \quad \text{si} \quad 3\lambda_1 > \mu_1.$$

23. Envisageons la première hypothèse. Les courbes C_0''' passent $3\lambda_1 + \mu_1$ fois par A, $\mu_1 - 2$ tangentes étant confondues avec AA_1 et $3\lambda_1 + 2$ avec AA_ν. Elles passent $\mu_1 - 2$ fois par chacun des points $(\alpha, 1), (\alpha, 2), \ldots, (\alpha, \alpha - 1)$. Sur la surface Φ_2, les courbes Γ_0''' sont découpées par les hyperplans passant par un point de la courbe σ_2. Ce point ne peut appartenir à σ_1 (qui ne rencontre pas σ_2 sur Φ_2), donc les courbes C_0''' passent $\lambda_1 - 1$ fois par le point $(1, \beta - 1)$. Il en résulte que les courbes C_0''' ne peuvent plus passer deux fois par P, car autrement les courbes C_1 rencontreraient les courbes C_0''' en plus de p points confondus en A. Par suite, sur Φ_2, les courbes Γ_0''' sont découpées par les hyperplans passant par le point commun aux courbes σ_2, ρ_1.

Le point A est, sur chaque courbe C_0''', l'origine d'une branche superlinéaire passant par les points $(1, 1), \ldots, (1, x+1), (1, x+1, 1), \ldots, (1, x+1, \theta_1+1), \ldots$ et aboutissant au point P, qui est simple puisque les courbes Γ_0'''' ne rencontrent plus la conique ρ_1 qu'en un point. Les points $(1, x+2), (1, x+3), \ldots, (1, \beta-1)$ étant multiples d'ordre $\lambda_1 - 1$ pour les courbes C_0''', on pourra calculer la multiplicité pour ces courbes des points $(1, x+1)$ et $(1, x)$. Cela étant, il doit exister sur chaque courbe C_0''' une branche superlinéaire d'origine A, passant par $(1, 1)$, quittant la suite principale en un des points $(1, 1), (1, 2), \ldots, (1, x)$, et aboutissant à un point P_1, uni de première espèce pour I_3, simple pour les courbes C_0''', dont le domaine correspond à celui du point commun à ρ_1 et à σ_2 sur la surface Φ_2.

24. Envisageons ensuite la seconde hypothèse : $\lambda_3 = 2\lambda_1$, $\mu_3 = 2\mu_1$, $3\lambda_1 > \mu_1 > \lambda_1$.

Les courbes C_0''' passant $2(\lambda_1 + \mu_1)$ fois par le point A, ne peuvent plus passer $\mu_1 - 1$ fois par le point $(a, a-1)$ car autrement C_a rencontreraient les courbes C_0''' en plus de p points confondus en A. Il en résulte que sur la surface Φ_2, les courbes Γ_0''' sont découpées par les hyperplans passant par un point de la courbe σ_2 et que le point $(a, a-1)$ est multiple d'ordre $\mu_1 - 2$ pour les courbes C_0'''. De plus, le point par lequel passent les hyperplans des courbes Γ_0''' ne peut appartenir à la courbe σ_1 et les courbes C_0''' doivent passer $\lambda_1 - 1$ fois par le point $(1, \beta-1)$.

Sur une courbe C_0''', le point A est l'origine d'une branche superlinéaire qui doit passer par le point $(a, 1)$ et par un point P', uni de première espèce pour I_p. Le domaine de ce point correspond à celui du point commun aux courbes Γ_0'''' sur Φ_2. Nous supposerons donc que les courbes C_0''' passent $2\mu_1$ fois par les points $(a, 1), (a, 2), \ldots, (a, x')$, y' fois par le point $(a, x'+1)$, $\mu_1 - 2$ fois par les points $(a, x'+2), \ldots, (a, a-1)$. En exprimant que les courbes C_0''' sont coupées par les courbes C_a en p points confondus en A, on a

$$x'(\mu_1 + 2) + y' = 3\lambda_1 - 2, \quad (\mu_1 - 1 \leqslant y' \leqslant 2\mu_1 - 1).$$

Posons

$$3\lambda_1 = \theta'(\mu_1 + 2) + h', \qquad (h \leqslant \mu_1 + 1).$$

Si $h' = \mu_1 + 1$, on prendra $x' = \theta'$, $y' = \mu_1 - 1$. On voit tout de suite que les courbes C_0''' passent simplement par les points $(\alpha, \theta'+1, 1)$, $(\alpha, \theta'+1, 2)$, ..., $(\alpha, \theta'+1, \mu_1+1)$, ce dernier étant uni de première espèce et coïncidant avec P'.

On ne peut avoir $h' = \mu_1$, car alors

$$p = (\mu_1 + 2)\ (2\lambda_1 - \theta')$$

ne serait pas premier.

Si l'on a $h' < \mu_1$, on prendra

$$x' = \theta' - 1, \quad y' = \mu_1 + h'$$

Les points $(\alpha, \theta'-1)$, (α, θ'), $(\alpha, \theta'+1)$ sont alors respectivement multiples d'ordres $2\mu_1$, $\mu_1 + h'$, $\mu_1 - 2$. Le point $(\alpha, \theta', 1)$ sera multiple d'ordre $h'+2$ et on pourra procéder comme on l'a déjà fait plus haut. Tout revient à chercher le plus grand commun diviseur des nombres $\mu_1 - h'$ et $h'+2$; ce plus grand commun diviseur sera la multiplicité du point P' pour les courbes C_0'''. Or, on a

$$p = (\mu_1 + 2)\ (2\lambda_1 - \theta' + 1) - (h' + 2),$$

donc, p étant premier, $\mu_1 - h'$ et $h'+2$ sont premiers entre eux et le point P' est simple pour les courbes C_0'''.

Le point $(1, \beta - 1)$ est, comme nous l'avons vu, multiple d'ordre $\lambda_1 - 1$ pour les courbes C_0'''. Comme le domaine du point commun à toutes les courbes Γ_0''' sur Φ_2 correspond à celui de P', il faut nécessairement que les courbes C_0''' ne passent plus qu'une fois par P (dont le domaine correspond à ρ_1). Par suite, les courbes Γ_0''' sont découpées par Φ_2 par les hyperplans passant par le point commun aux courbes σ_2, ρ_1, dont le domaine correspond donc à celui de P'.

Les courbes C_0''' passent $2\lambda_1$ fois par les points $(1, 1)$, ..., $(1, \theta - 1)$, y_1 fois par le point $(1, \theta)$, $\lambda_1 - 1$ fois par les points $(1, \theta + 1)$, ..., $(1, \beta - 1)$. En exprimant que les courbes C_1 rencontrent les courbes C_0''' en p points confondus en A, on trouve $y_1 = \lambda_1 + h$. Il en résulte que les courbes C_0''' passent par chacun des points $(1, \theta + 1, 1)$, ..., P avec une multiplicité égale à la moitié de celle des courbes C_0''.

Observons que dans chacun des cas étudiés ($3\lambda_1 < \mu_1$ ou $3\lambda_1 > \mu_1$), les courbes Γ_0''' appartiennent totalement au système $|\Gamma_0''|$.

25. Nous allons maintenant développer deux exemples. Pour le premier, nous prendrons $\lambda_1 = 2$, $\mu_1 = 7$, d'où $3\lambda_1 < \mu_1$. Nous avons alors

$$p = 37, \quad \alpha = 5, \quad \beta = 15.$$

Le schéma du comportement des courbes C'_0 en A est

$$\begin{array}{ll} & A^9, \ (\alpha, 1)^7, (\alpha, 2)^7, (\alpha, 3)^7, (\alpha, 4)^7, \\ (1, 1)^2, & \\ (1, 2)^2, & \\ \vdots & \\ (1, 14)^2. & \end{array}$$

Nous avons $\lambda_2 = 7$, $\mu_2 = 6$ et d'après la théorie que nous avons développée plus haut, on trouve que le comportement des courbes C''_0 au point A est caractérisé par le schéma

$$\begin{array}{rl} & A^{13}, \quad (\alpha, 1)^6, (\alpha, 2)^6, (\alpha, 3)^6, (\alpha, 4)^6, \\ & (1, 1)^7, \\ (1, 2, 1)^2, & (1, 2)^5, \\ (1, 2, 1, 1)^2. & (1, 3)^1, \\ & \vdots \\ & (1, 14)^1. \end{array}$$

On a ensuite $\lambda_3 = 12$, $\mu_3 = 5$ et, pour le comportement des courbes C'''_0 au point A, le schéma

$$\begin{array}{rl} & A^{17}, (\alpha, 1)^5, (\alpha, 2)^5, (\alpha, 3)^5, (\alpha, 4)^5, \\ (1, 1, 7),^1 \ldots, & (1, 1, 1)^1, (1, 1)^5, \\ & (1, 2, 1)^1, (1, 2)^3, \\ & (1, 2, 1, 1)^1. (1, 3)^1, \\ & \vdots \\ & (1, 14)^1. \end{array}$$

Les valeurs de λ_4, μ_4 sont $\lambda_4 = 4$, $\mu_4 = 14$. Le schéma du comportement des couches $C_0^{(4)}$ au point A est

$$\begin{array}{rll} & A^{18}, & (\alpha, 1)^7, (\alpha, 2)^4, (\alpha, 3)^4, (\alpha, 4)^4. \\ & (1, 1)^4, & (\alpha, 1, 1)^3, \\ (1, 2, 1)^1, & (1, 2)^3, & (\alpha, 1, 2)^3, \\ (1, 2, 1, 1)^1. & (1, 3)^1, & (\alpha, 1, 3)^1, (\alpha, 1, 3, 1)^1, (\alpha, 1, 3, 2)^1. \\ & \vdots & \\ & (1, 14)^1. & \end{array}$$

Sur la surface Φ_2, les courbes $\Gamma_0^{(4)}$, homologues des courbes $C_0^{(4)}$, sont découpées par les hyperplans touchant la courbe σ_2 au point de rencontre de celle-ci avec la conique ρ_1. Au domaine du point infiniment voisin de ce point sur σ_2, correspond le domaine du point $(a, 1, 3, 2)$, uni de première espèce pour I_p.

26. Le second exemple correspond aux valeurs $\lambda_1 = 2, \mu_1 = 3$ $(3\lambda_1 > \mu_1)$. On a

$$p = 17, \quad \alpha = 5, \quad \beta = 7.$$

Le comportement des courbes C_0' au point A a pour schéma

$$\begin{array}{ll} & A^5,\ (a, 1)^3,\ (a, 2)^3,\ (a, 3)^3,\ (a, 4)^3. \\ (1, 1)^2, & \\ (1, 2)^2, & \\ \vdots & \\ (1, 6)^2. & \end{array}$$

On a $\lambda_2 = 7$, $\mu_2 = 2$, donc pour les courbes C_0''', on a le schéma

$$\begin{array}{ll} & A^9,\ (a, 1)^2,\ (a, 2)^2,\ (a, 3)^2,\ (a, 4)^2. \\ (1, 1, 2)^2,\ (1, 1, 1)^2,\ (1, 1)^3, & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (1, 2)^1, & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (1, 6)^1. & \end{array}$$

On a $\lambda_3 = 4$, $\mu_3 = 6$, donc le comportement des courbes C''' au point A est fixé par le schéma

$$\begin{array}{ll} \qquad\qquad\qquad\qquad A^{10}, & (a, 1)^4,\ (a, 2)^1,\ (a, 3)^1,\ (a, 4)^1. \\ (1, 1, 2)^1,\ (1, 1, 1)^1,\ (1, 1)^2, & (a, 1, 1)^2,\ (a, 1, 1, 1)^1, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (1, 2)^1, & \qquad\qquad (a, 1, 1, 1, 1)^1. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (1, 6)^1. & \end{array}$$

On a ensuite $\lambda_4 = 1$, $\mu_4 = 10$. Il en résulte que les courbes $C_0^{(4)}$ passent simplement par les points $(1, 1), \ldots, (1, 6)$; elles ne peuvent plus passer par le point $(1, 1, 2)$ et par conséquent, sur la surface Φ_2, les courbes $\Gamma_0^{(4)}$ ne rencontrent plus la conique ρ_1 ; ces courbes sont donc découpées par les hyperplans passant par la tangente à ρ_1 au point de rencontre de cette conique avec σ_2. Il en résulte que les courbes $C_0^{(4)}$ passent une fois par le point

$(\alpha, 4)$. On trouve facilement que le comportement des courbes $C^{(4)}$ en A est fixé par le schéma

$$\begin{array}{lll} A^{11}, & (\alpha, 1)^3, & (\alpha, 2)^1, (\alpha, 3)^1, (\alpha, 4)^1. \\ (1, 1)^1, & (\alpha, 1, 1)^2, & \\ \vdots & (\alpha, 1, 2)^2, & \\ (1, 6)^1. & (\alpha, 1, 3)^2, & \\ & (\alpha, 1, 4)^1, \ (\alpha, 1, 4, 1)^1. & \end{array}$$

Au domaine du point infiniment voisin sur ρ_1 du point (ρ_1, σ_2) correspond le domaine du point $(\alpha, 1, 4, 1)$ sur F.

On a $\lambda_5 = 12$, $\mu_5 = 1$. Les courbes $C_0^{(5)}$ passent simplement par les points $(\alpha, 1), \ldots, (\alpha, 4)$ et ne peuvent plus passer par le point $(1, 6)$. On en conclut qu'aux courbes $C_0^{(5)}$ correspondent sur Φ_2 les courbes $\Gamma_0^{(5)}$ découpées par les hyperplans contenant la conique ρ_1. Le comportement des courbes $C_0^{(5)}$ au point A a pour schéma

$$\begin{array}{ll} & A^{13}, \ (\alpha, 1)^1, \ (\alpha, 2)^1, \ (\alpha, 3)^1, \ (\alpha, 4)^1. \\ (1, 1, 2)^4, \ (1, 1, 1)^4, \ (1, 1)^4, & \\ \qquad\qquad (1, 2)^0. & \end{array}$$

Les courbes $\sigma_1, \rho_1, \sigma_2$ ont respectivement pour degrés virtuels -3, -2, -4 et on a

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0' + \sigma_1 + \rho_1 + \sigma_2,$$
$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0'' + \sigma_1 + 2\rho_1 + \sigma_2,$$
$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0^{(5)} + \sigma_1 + 3\rho_1 + \sigma_2.$$

Les courbes Γ_0''', $\Gamma_0^{(4)}$ appartiennent totalement au système $|\Gamma_0''|$.

27. Nous allons enfin supposer $t \geqslant 2$. Rappelons que nous avons

$$p = (t + 1)\lambda_1\mu_1 + \lambda_1 + \mu_1, \alpha = (t + 1)\lambda_1 + 1, \beta = (t + 1)\mu_1 + 1$$

et que nous supposons $\alpha < \beta$, d'où $\lambda_1 < \mu_1$.

Les valeurs de λ_2, μ_2 sont

$$\lambda_2 = 2\lambda_1, \ \mu_2 = 2\mu_1 \quad \text{si} \quad \mu_1 < t\lambda_1,$$

et

$$\lambda_2 = \alpha + \lambda_1, \ \mu_2 = \mu_1 - 1 \quad \text{si} \quad \mu_1 > t\lambda_1.$$

Envisageons le premier cas. Projetons la surface Φ_1 du point A_1' sur un hyperplan de l'espace ambiant. Aux courbes C_0'' correspondent les sections hyperplanes de la surface Φ_2 ainsi obtenue et sur cette surface, les courbes σ_1, σ_2 sont respectivement d'ordre $\lambda_1 - 1$, $\mu_1 - 1$. De plus, au domaine du point A_1' de Φ_1 correspondent deux droites ρ_1, ρ_t. Ces droites correspondent à deux points unis P_1, P_t de première espèce, du domaine de A et les courbes C_0'' passent $\lambda_1 - 1$ fois par le point $(1, \beta - 1)$ et $\mu_1 - 1$ fois par le point $(\alpha, \alpha - 1)$.

Supposons que les courbes C_0'' passent $2\lambda_1$ fois par les points $(1, 1)$, $(1, 2)$, ..., $(1, x)$, y fois par le point $(1, x + 1)$ et $\lambda_1 - 1$ fois par les points $(1, x + 2)$. ..., $(1, \beta - 1)$. En exprimant que les courbes C_1 coupent les courbes C_0'' en p points confondus en A, on obtient

$$(\lambda_1 + 1)x + y = t\mu_1 - 1.$$

Posons

$$t\mu_1 = \theta(\lambda_1 + 1) + h, \qquad (h \leqslant \lambda_1)$$

et observons que l'on a

$$p = (\lambda_1 + 1)\,(\theta\lambda_1 + \mu_1) + \lambda_1\,(h + 1).$$

Si l'on avait $h = \lambda_1$, p serait divisible par $\lambda_1 + 1$, ce qui est impossible. On a donc $h < \lambda_1$. D'autre part, y doit être compris entre $\lambda_1 - 1$ et $2\lambda_1$. On doit donc avoir

$$x = \theta - 1, \qquad y = \lambda_1 + h.$$

Au point $(1, \theta)$, multiple d'ordre $y = \lambda_1 + h$ pour les courbes C_0'', est infiniment voisin un point $(1, \theta, 1)$, multiple d'ordre

$$y - (\lambda_1 - 1) = h + 1.$$

Observons que la différence entre la multiplicité des points $(1, \theta - 1)$, $(1, \theta)$, soit

$$2\lambda_1 - (\lambda_1 + h) = \lambda_1 - h$$

et le nombre $h + 1$ sont des nombres premiers entre eux, sans quoi, p ne serait pas premier. En procédant comme il a été fait plus haut, on voit qu'au point $(1, \theta, 1)$ font suite des points unis (de seconde espèce sauf le dernier) infiniment voisins successifs, communs à toutes les courbes C_0''. Le dernier point de la suite est simple pour les courbes et uni de première espèce pour I_p ; c'est précisément le point P_1.

On trouve de même qu'en posant

$$t\lambda_1 = \theta'(\mu_1 + 1) + h',$$

les courbes C_0'' passent $2\mu_1$ fois par les points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, ..., $(\alpha, \theta' - 1)$, $\mu_1 + h'$ fois par le point (α, θ'), et $\mu_1 - 1$ fois par les points $(\alpha_1, \theta' + 1)$, ..., $(\alpha, \alpha - 1)$. Ces courbes passent de plus par un certain nombre de points fixes, infiniment voisins successifs de (α, θ'), unis de seconde espèce pour I_p sauf le dernier, qui est uni de première espèce et simple pour les courbes, coïncidant avec le point P_t.

Cela étant, on peut avoir soit

$$\lambda_3 = 3\lambda_1, \quad \mu_3 = 3\mu_1 \quad \text{si} \quad 2\mu_1 < (t-1)\lambda_1,$$

soit

$$\lambda_3 = \alpha + \lambda_1, \quad \mu_3 = \mu_1 - 1 \quad \text{si} \quad 2\mu_1 > (t-1)\lambda_1.$$

Dans le premier cas, on trouvera, en répétant le raisonnement précédent, que les courbes C_0''' passent simplement par deux points unis de première espèce P_2, P_{t-1}, dont les domaines correspondent aux courbes ρ_2, ρ_{t-1}. Nous reviendrons plus loin sur ce cas.

Dans le second cas, les courbes C_0''' passent $(t+2)\lambda_1 + \mu_1$ fois par A et $\mu_1 - 1$ fois par les points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, ..., $(\alpha, \alpha - 1)$; elles ne peuvent donc plus passer par le point P_t. Il en résulte que sur la surface Φ_2, les courbes Γ_0''' homologues des courbes C_0''', sont découpées par les hyperplans passant par un point de la droite ρ_t.

Nous aurons à distinguer deux cas suivant que les courbes C_0''' passent $\lambda_1 - 1$ fois où $\lambda_1 - 2$ fois par le point $(1, \beta - 1)$. Dans le premier cas, les courbes C_0''' ne peuvent plus passer par le point P_1 car autrement elles seraient rencontrées en plus de p points par les courbes C_1. Les courbes Γ_0''' sont découpées sur Φ_2 par les hyperplans passant par le point A_2' commun aux droites ρ_1, ρ_t.

Si $t = 2$, il existe une suite de points unis appartenant aux courbes C_0''' et précisément à une branche superlinéaire d'origine A de chacune de ces courbes, terminée par un point P', uni de première espèce pour I_p, dont le domaine correspond à celui du point A_2' commun aux droites ρ_1, ρ_t sur Φ_2, point qui est simple pour cette surface. Cette suite de points est consécutive à un point de la suite (1, 1), (1, 2), ..., $(1, \beta - 1)$.

Si $t = 3$, on a un résultat analogue, mais le point P' est double pour les courbes C_0''' et son domaine correspond à la courbe ρ_2.

Soit $t > 3$, il existe, sur chaque courbe C_0''', deux branches superlinéaires d'origine A, contenant le point (1, 1). Sur chacune de ces branches, il y a un certain nombre de points unis de I_p, infiniment voisins successifs à un point de la suite (1, 1), (1, 2), ..., $(1, \beta - 1)$, appartenant à toutes les courbes C_0''', le dernier point de cette suite étant uni de première espèce et simple pour les courbes. Les deux points unis de première espèce ainsi obtenus correspondent aux courbes ρ_2, ρ_{t-1}.

Supposons au contraire que le point $(1, \beta - 1)$ soit multiple d'ordre $\lambda_1 - 2$ pour les courbes C_0'''. Alors, les courbes Γ_0''' sont découpées, sur la surface Φ_2, par les hyperplans passant par un point de σ_1 et par un point de ρ_t. Pour respecter les notations introduites au début, nous supposerons que le point P_t correspond à ρ_1 et le point P_1 à ρ_t. Les courbes Γ_0''' passent alors par le point A_{12}', commun à ρ_1 et à σ_1, point qui est simple pour la surface.

Les courbes C_0''' doivent passer une fois par le point P_1 et ces courbes ont donc le même comportement le long de la suite de points $(1, \theta, 1)$, ..., P_1 que les courbes C_0''. Il en résulte que les courbes C_0''' passent $\lambda_1 + h - 1$ fois par le point $(1, \theta)$ et $2\lambda_1 - 1$ fois par le point $(1, \theta - 1)$. Au domaine du point simple A_{12}' correspond le domaine du point P' proche de A. On est donc conduit à supposer que les courbes C_0''' passent $\alpha + \lambda_1$ fois par les points (1, 1), (1, 2), ..., $(1, x)$, y fois par le point $(1, x + 1)$, $2\lambda_1 - 1$ fois par les points $(1, x + 2)$, ..., $(1, \theta' - 1)$, $\lambda_1 + h - 1$ fois par $(1, \theta')$ et $\lambda_1 - 2$ fois par les points $(1, \theta' + 1)$, ..., $(1, \beta - 1)$. Au point $(1, x + 1)$ seront infiniment voisins successifs des points $(1, x + 1, 1)$, ..., uni pour I_p, appartenant à toutes les courbes C_0'''. Le dernier sera le point P', uni de première espèce, simple pour les courbes C_0'''. On aura d'ailleurs

$$(t\lambda_1 + 2)x + y = (t + 2)\mu_1 - (t - 2)\lambda_1 - 1,$$
$$2\lambda_1 \leqslant y \leqslant (t + 2)\lambda_1.$$

La discussion se fera comme dans les cas précédents.

28. Supposons que l'on ait $\mu_1 > t\lambda_1$ et par suite

$$\lambda_2 = \alpha + \lambda_1, \quad \mu_2 = \mu_1 - 1.$$

Les courbes C_0'' passent $\alpha + \lambda_1 + \mu_1 - 1$ fois par A et $\mu_1 - 1$ fois par les points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, ..., $(\alpha, \alpha - 1)$. Elles passent $\lambda_1 - 2$ fois par le point $(1, \beta - 1)$. Ces courbes doivent passer une fois par deux points P_1, P_t du domaine de A, dont les domaines sont représentés par les droites ρ_1, ρ_t de Φ_2. Sur une courbe C_0'', le point A est l'origine de deux branches superlinéaires dont les premiers points sont communs à toutes les courbes C_0''. Une de ces branches passe par les points $(1, 1)$, ..., $(1, x_1)$ et par une suite de points $(1, x_1, 1)$, ... infiniment voisins successifs de $(1, x_1)$, le dernier point de cette suite étant le point P_1, uni de première espèce pour I_p. L'autre branche passe par les points $(1, 1)$, ..., $(1, x_2)$ et par une suite de points $(1, x_2, 1)$, ... infiniment voisins successifs de $(1, x_2)$, le dernier point de cette suite étant P_t, uni de première espèce.

On peut maintenant avoir soit

$$\lambda_3 = 2\lambda_1, \mu_3 = 2\mu_1 \qquad \text{si } \mu_1 < (2t+1)\lambda_1,$$
$$\lambda_3 = 2\alpha + \lambda_1 = (2t+3)\lambda_1 + 2, \mu_3 = \mu_1 - 2 \quad \text{si } \mu_1 > (2t+1)\lambda_1.$$

Dans la première hypothèse, on procèdera comme au début du paragraphe précédent et on trouvera que les courbes C_0''' passent $2(\lambda_1 + \mu_1)$ fois par A, $2\lambda_1$ fois par les points $(1, 1)$, $(1, 2)$, ..., $(1, \theta - 1)$, $\lambda_1 + h$ fois par le point $(1, \theta)$, $\lambda_1 - 1$ fois par les points $(1, \theta + 1)$, ..., $(1, \beta - 1)$ et par une suite de points $(1, \theta, 1)$, ..., infiniment voisins successifs de $(1, \theta)$, suite se terminant par un point P_2, uni de première espèce pour I_p, simple pour les courbes C_0''', dont le domaine est représenté par la droite ρ_2. On trouvera ensuite que les courbes C_0''' passant $t\lambda_1 - 1$ fois par le point $(\alpha, 1)$, à cause de $\mu_1 > t\lambda_1$, $\mu_1 - 1$ fois par les points $(\alpha, 2)$, ..., $\alpha(\alpha - 1)$ et par une suite de points $(\alpha, 1, 1)$, ... infiniment voisins successifs de $(\alpha, 1)$, suite se terminant par un point P_{t-1}, uni de première espèce pour I_p, simple pour les courbes C_0''' dont le domaine est représenté par la droite ρ_{t-1}.

Si l'on a $\lambda_3 = (2t+3)\lambda_1 + 2$, $\mu_3 = \mu_1 - 2$, les courbes C_0''' passent $(2t+3)\lambda_1 + \mu_1$ fois par le point A et $\mu_1 - 2$ fois par les points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, ..., $(\alpha, \alpha - 1)$, donc les courbes Γ_0''' sont découpées sur la surface Φ_2 par les hyperplans passant par un point de σ_2. D'autre part, les courbes C_0''' doivent passer $\lambda_1 - 1$

fois par $(1, \beta - 1)$, car autrement les courbes σ_1, σ_2 auraient un point commun sur Φ_2 ; elles ne peuvent donc plus passer par les deux points P_1, P_t. Les hyperplans des courbes Γ_0''' sur Φ_2 doivent donc passer par le point commun à la courbe σ_2 et à la droite ρ_t, donc les courbes C_0''' passent par le point P_1 mais non par le point P_t.

Au domaine du point commun à σ_2, ρ_t sur Φ_2, point qui est simple pour la surface, correspond sur F le domaine d'un point P_0, uni de première espèce pour I_p, simple pour les courbes C_0'''. Sur chacune de ces courbes, il existe une branche superlinéaire d'origine A, passant par les points $(1, 1)$, $(1, 2)$, ..., $(1, x_0)$ et par une suite de points $(1, x_0, 1)$, ..., unis pour l'involution, se terminant au point P_0.

La détermination des nombres x_1, x_2, x_0 exige l'étude du comportement au point A des courbes $C_0^{(4)}$, $C_0^{(5)}$, ... On devra se rappeler que la différence entre les multiplicités des courbes C_0'' (ou C_0''') aux points $(1, x_1 - 1)$, $(1, x_1)$ et celle des multiplicités des mêmes courbes aux points $(1, x_1)$, $(1, x_1 + 1)$, doivent être des nombres premiers entre eux. Il en est de même pour les points $(1, x_2 - 1)$, $(1, x_2)$, $(1, x_2 + 1)$ et $(1, x_0 - 1)$, $(1, x_0)$ et $(1, x_0 + 1)$.

29. Nous allons actuellement étudier deux exemples. Le premier est donné par

$$p = 53,\ \alpha = 10,\ \beta = 16,\ t = 2,\ \lambda_1 = 3,\ \mu_1 = 5.$$

Nous avons

$$\lambda_2 = 6,\ \mu_2 = 10\ ;\ \lambda_3 = 13,\ \mu_3 = 4\ ;\ \lambda_4 = 2,\ \mu_4 = 21\ ;\ \lambda_5 = 9,\ \mu_5 = 15.$$

Comme nous l'avons vu, les courbes C_0' passent 8 fois par le point A, cinq fois par les points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, ... $(\alpha, 9)$ et trois fois par les points $(1, 1)$, $(1, 2)$, ..., $(1, 15)$. Le point A est multiple d'ordre huit pour la surface Φ et si n est l'ordre de celle-ci, la surface Φ_1 est d'ordre $n - 8$ et contient deux courbes rationnelles σ_1, d'ordre trois, σ_2, d'ordre cinq, se coupant en un point A_1', double biplanaire ordinaire pour la surface.

D'après la théorie exposée plus haut, le schéma du comportement des courbes C_0'' au point A est le suivant :

$$A^{16},\ (\alpha, 1)^5,\quad (\alpha, 2)^4,\ \ldots,\ (\alpha, 9)^4.$$

$$\begin{array}{lll}
 & (1, 1)^6, & (\alpha, 1, 1)^1, \\
(1, 2, 1)^1, & (1, 2)^5, & (\alpha, 1, 2)^1, \\
(1, 2, 1, 1)^1, & (1, 3)^2, & \quad\vdots \\
(1, 2, 1, 2)^1. & \quad\vdots & (\alpha, 1, 5)^1. \\
 & (1, 15)^2. &
\end{array}$$

Au domaine du point (1, 2, 1, 3) correspond, sur la surface Φ_2, la droite ρ_1 et au domaine du point $(\alpha, 1, 5)$, la droite ρ_2. La surface Φ_2 est d'ordre $n - 10$.

Le comportement des courbes C_0''' au point A est, d'après ce que nous avons vu, caractérisé par le schéma

$$\begin{array}{rl}
 & A^{17}, (\alpha,1)^4, \ldots, (\alpha, 9)^4. \\
(1, 1, 1)^5, & (1, 1)^8, \\
(1, 1, 1, 1, 4)^1, \ldots (1, 1, 1, 1, 1)^1,\ (1, 1, 1, 1)^1, & (1, 2)^2, \\
 & (1, 3)^1, \\
 & \quad\vdots \\
 & (1, 15)^2.
\end{array}$$

Le domaine du point (1, 1, 1, 1, 4) a pour homologue, sur Φ_2, le domaine du point A_2' commun à ρ_1, ρ_2, point simple de la surface.

Les courbes $C_0^{(4)}$ ont la multiplicité 23 en A et ne peuvent plus passer que trois fois par $(\alpha, 9)$; leur comportement en A a pour schéma

$$A^{23},\ (\alpha, 1)^6,\ (\alpha, 2)^3,\ \ldots,\ (\alpha, 9)^3.$$

$$\begin{array}{ll}
(1, 1)^2, & (\alpha, 1, 1)^3, \\
(1, 2)^2, & (\alpha_1, 1, 2)^3, \\
\quad\vdots & \quad\vdots \\
(1, 15)^2. & (\alpha, 1, 5)^3.
\end{array}$$

Sur la surface Φ_2, les courbes $\Gamma_0^{(4)}$, homologues des courbes $C_0^{(4)}$, sont découpées par les hyperplans passant par la droite ρ_2.

Le schéma du comportement en A des courbes $C_0^{(5)}$ est

$$A^{24},\ (\alpha,\ 1)^6,\ (\alpha,\ 2)^3,\ \ldots,\ (\alpha,\ 9)^3.$$

$$\begin{array}{ll}
 & (1, 1)^9, \\
(1, 2, 1)^2, & (1, 2)^7, \\
(1, 2, 1, 1)^2, & (1, 3)^1, \\
(1, 2, 1, 2)^2. & \quad\vdots \\
 & (1, 15)^1.
\end{array}$$

Aux courbes $C_0^{(5)}$ correspondent sur la surface Φ_2 les courbes $\Gamma_0^{(5)}$ découpées par les hyperplans passant par les droites ρ_1 et ρ_2.

On a
$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0' + \sigma_1 + \rho_1 + \rho_2 + \sigma_2,$$
$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0'' + \sigma_1 + 2(\rho_1 + \rho_2) + \sigma_2,$$
$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0^{(4)} + \sigma_1 + 2\rho_1 + 3\rho_2 + \sigma_2,$$
$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0^{(5)} + \sigma_1 + 3(\rho_1 + \rho_2) + \sigma_2.$$

Les courbes Γ_0''' appartiennent totalement au système $|\Gamma_0''|$.

30. Le second exemple est donné par
$$p = 73,\ \alpha = 10,\ \beta = 22,\ t = 2,\ \lambda_1 = 3,\ \mu_1 = 7.$$

On a
$$\lambda_2 = \alpha + \lambda_1 = 13,\ \mu_2 = \mu_1 - 1 = 6\ ;\ \lambda_3 = 2\lambda_1 = 6\ ;$$
$$\mu_3 = 2\mu_1 = 14\ ;$$
$$\lambda_4 = 2\alpha + \lambda_1 = 23,\ \mu_4 = \mu_1 - 2 = 5\ ;\ \lambda_5 = \alpha + 2\lambda_1 = 16,$$
$$\mu^5 = 2\mu_1 - 1 = 13,$$
$$\lambda_6 = 3\lambda_1 = 9,\ \mu_6 = 3\mu_1 = 21\ ;\ \lambda_7 = \lambda_1 - 1 = 2,$$
$$\mu_7 = \beta + \mu_1 = 31.$$

Les courbes C_0' passent dix fois par A, sept fois par les points $(\alpha, 1), \ldots, (\alpha, 9)$ et trois fois par les points $(1, 1), \ldots, (1, 21)$. Le point de diramation A′ est multiple d'ordre dix pour la surface Φ. Si n est l'ordre de celle-ci, la surface Φ_1 est d'ordre $n - 10$ et contient deux courbes rationnelles σ_1, σ_2, d'ordres trois et sept, se coupant en un point A_1' double biplanaire ordinaire pour la surface.

Les courbes C_0'' passent 19 fois par A et six fois par les points $(\alpha, 1), \ldots, (\alpha, 9)$. Il y a deux branches superlinéaires d'origine A, passant par $(1, 1)$ et contenant l'une le point P_1 représenté par ρ_1, l'autre le point P_2 représenté par ρ_2. Nous commencerons par l'examen du comportement des courbes C_0''' au point A. On trouve facilement que celui-ci a pour schéma

$$\begin{array}{rl}
A^{20}, & (\alpha, 1)^{13}, (\alpha, 2)^5, \ldots, (\alpha, 9)^5. \\
(1, 1)^6, & (\alpha, 1, 1)^1, (\alpha, 1, 1, 1)^1, \ldots, (\alpha, 1, 1, 7)^1. \\
(1, 2)^6, & \\
(1, 3, 1)^1, (1, 3)^5, & \\
(1, 3, 1, 1)^1, (1, 4)^2, & \\
(1, 3, 1, 2)^1. \quad \vdots & \\
(1, 21)^2. &
\end{array}$$

Le domaine du point (1, 3, 1, 2) correspond à l'une des droites ρ_1, ρ_2 et les courbes C''_0 doivent donc passer simplement par les points (1, 3, 1), (1, 3, 1, 1) et (1, 3, 1, 2). On en déduit facilement le schéma du comportement en A des courbes C''_0, à savoir

$$\begin{array}{rl}
 & A^{19},\ (\alpha, 1)^6, \ldots, (\alpha, 9)^6. \\
(1, 1, 6)^1, \ldots, (1, 1, 1)^1, & (1, 1)^7, \\
 & (1, 2)^6, \\
(1, 3, 1)^1, & (1, 3)^5, \\
(1, 3, 1, 1)^1, & (1, 4)^2, \\
(1, 3, 1, 2)^1. & \vdots \\
 & (1, 21)^2.
\end{array}$$

Sur la surface Φ_2, d'ordre $n - 12$, se trouvent tracées la conique σ_1, deux droites ρ_1, ρ_2 et une courbe σ_2 d'ordre six. La droite ρ_1 correspond au domaine du point (1, 3, 1, 2) et la droite ρ_2 à celui du point (1, 1, 6). Les courbes Γ''''_0 sont découpées sur Φ_2 par les hyperplans passent par le point A'_{22} commun à ρ_2 et à σ_2, car les courbes C''''_0 ne passent plus par le point (1, 1, 6) et n'ont plus que la multiplicité 5 au point (α, 21). Le domaine du point (α, 1, 1, 7) correspond à celui du point A'_{22} sur la surface Φ_2, point simple pour cette surface.

Le comportement des courbes $C^{(4)}_0$ en A a pour schéma

$$\begin{array}{rl}
 & A^{28},\ (\alpha, 1)^5, \ldots, (\alpha, 9)^5. \\
(1, 1, 6)^3, \ldots, (1, 1, 1)^3, & (1, 1)^5, \\
 & (1, 2)^2, \\
 & \vdots \\
 & (1, 21)^2.
\end{array}$$

Aux courbes $C^{(4)}_0$ correspondent sur Φ_2 les sections $\Gamma^{(4)}_0$ par les hyperplans passant par la droite ρ_2.

Les schémas des comportements en A des courbes $C^{(5)}_0$, $C^{(6)}_0$, $C^{(7)}_0$ sont les suivants : Pour les courbes $C^{(5)}_0$,

$$\begin{array}{rll}
 & A^{29},\ (\alpha, 1)^{12}, (\alpha, 2)^4, \ldots, (\alpha, 9)^4. & \\
(1, 1, 6)^2, \ldots, (1, 1, 1)^2, & (1, 1)^4 & (\alpha, 1, 1)^1, (\alpha, 1, 1, 1)^1, \ldots, (\alpha, 1, 1, 7)^1. \\
 & (1, 2)^2, & \\
 & \vdots & \\
 & (1, 21)^2. &
\end{array}$$

Pour les courbes $C_0^{(6)}$,

$$\begin{array}{llll} & & & A^{30}, (\alpha, 1)^{11}, (\alpha, 2)^4, \ldots, (\alpha, 9)^4. \\ (1, 1, 6)^1, \ldots, (1, 1, 1)^1, & (1, 1)^3, & (\alpha, 1, 1)^7, & \\ & (1, 2)^2, & (\alpha, 1, 2)^3, (\alpha, 1, 2, 1)^3, (\alpha, 1, 2, 2)^1, & \\ & \vdots & & (\alpha, 1, 2, 2, 1)^1, \\ & (1, 21)^2. & & (\alpha, 1, 2, 2, 2)^1. \end{array}$$

Pour les courbes $C_0^{(7)}$,

$$\begin{array}{ll} & A^{31}, (\alpha, 1)^{10}, (\alpha, 2)^4, \ldots, (\alpha, 9)^4. \\ (1, 1)^2, & (\alpha, 1, 1)^6, \\ \vdots & (\alpha, 1, 2)^6, \\ (1, 21)^2. & (\alpha, 1, 3)^6, \\ & (\alpha, 1, 4)^1, (\alpha, 1, 4, 1)^1, \ldots, (\alpha, 1, 4, 5)^1. \end{array}$$

Sur la surface Φ_2, aux courbes $C_0^{(5)}$ correspondent les sections $\Gamma_0^{(5)}$ par les hyperplans passant par ρ_2, ces courbes passent par le point A'_{22}. Aux courbes $C_0^{(6)}$ et $C_0^{(7)}$ correspondent sur Φ_2 les courbes $\Gamma_0^{(6)}$, $\Gamma_0^{(7)}$ découpées par des hyperplans passant également par la droite ρ_2 ; les courbes $\Gamma_0^{(6)}$ touchent la droite ρ_2 au point A'_{22} et les courbes $\Gamma_0^{(7)}$ osculent cette droite au même point.

Nous avons

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma'_0 + \sigma_1 + \rho_1 + \rho_2 + \sigma_2,$$
$$\Gamma_0 \equiv \Gamma''_0 + \sigma_1 + 2(\rho_1 + \rho_2) + \sigma_2,$$
$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0^{(4)} + \sigma_1 + 2\rho_1 + 3\rho_2 + \sigma_2.$$

Les courbes Γ'''_0 appartiennent totalement au système $|\Gamma''_0|$ et les courbes $\Gamma_0^{(5)}$, $\Gamma_0^{(6)}$, $\Gamma_0^{(7)}$ au système $|\Gamma_0^{(4)}|$.

31. Pour terminer l'étude des points unis de seconde espèce de la première catégorie, nous considérerons le cas où l'on a

$$(i - 1)\mu_1 < (t - i + 2)\lambda_1,$$

pour $i = 2, 3, \ldots$ $(2i < t + 3)$.

Pour toutes les valeurs possibles de i, nous avons alors

$$i(\lambda_1 + \mu_1) < \alpha + \lambda_1 + \mu_1 - 1$$

et par conséquent

$$\lambda_i = i\lambda_1, \quad \mu_i = i\mu_1.$$

Il en résulte que les courbes $C_0^{(i)}$ passent $\lambda_1 - 1$ fois par le point $(1, \beta - 1)$ et $\mu_1 - 1$ fois par le point $(\alpha, \alpha - 1)$.

Supposons que les courbes $C_0^{(i)}$ passent $i\lambda_1$ fois par les points $(1, 1), \ldots, (1, x)$, y fois par le point $(1, x + 1)$ et λ_{i-1} fois par les points $(1, x + 2), \ldots, (1, \beta - 1)$. En exprimant que les courbes $C_0^{(i)}$ sont rencontrées en p points réunis en A par les courbes C_1, on a

$$[(i - 1)\lambda_1 + 1]x + y = (t - i + 2)\mu_1 - (i - 2)\lambda_1 - 1.$$

On posera

$$(t - i + 2)\mu_1 = \theta_i[(i - 1)\lambda_1 + 1] + h_i, \ [h_i < (i - 1)\lambda_1 + 1],$$

et en remarquant que l'on a

$$p = (\theta_i\lambda_1 + \mu_1)[(i - 1)\lambda_1 + 1] + \lambda_1(h_i + 1).$$

on verra que h_i doit être inférieur à $(i - 1)\lambda_1$. On est conduit à poser

$$x = \theta_i - 1, \qquad y = \lambda_1 + h_i.$$

La différence entre les multiplicités des courbes $C_0^{(i)}$ aux points $(1, \theta_i - 1)$, $(1, \theta_i)$ et celle entre les multiplicités des mêmes courbes aux points $(1, \theta_i)$, $(1, \theta_i + 1)$ sont des nombres premiers entre eux. Par conséquent, les courbes $C_0^{(i)}$ ont en commun un certain nombre de points unis $(1, \theta_i, 1), \ldots$, infiniment voisins successifs de $(1, \theta_i)$, situés sur une branche superlinéaire d'origine A, se terminant par un point P_i, simple pour les courbes et uni de première espèce pour l'involution I_p.

De même, si l'on pose

$$(t - i + 2)\lambda_1 = \theta_i'[(i - 1)\mu_1 + 1] + h_i',$$

les courbes $C_0^{(i)}$ passent $i\mu_1$ fois par les points $(\alpha, 1), \ldots, (\alpha, \theta_i' - 1)$, $\mu_1 + h_i'$ fois par le point (α, θ_i'), $\mu_1 - 1$ fois par les points $(\alpha, \theta_i' + 1), \ldots, (\alpha, \alpha - 1)$ et par une suite de points $(\alpha, \theta_i', 1), \ldots$ infiniment voisins successifs de (α, θ_i'), situés sur une branche superlinéaire d'origine A, se terminant par un point P_i' simple pour les courbes et uni de première espèce pour l'involution I_p.

Retournons à la surface Φ_1. On obtient Φ_2 en projetant Φ_1 du point A_1' commun aux courbes σ_1, σ_2 sur un hyperplan. Les droites ρ_1, ρ_t tracées sur Φ_2 se coupent en un point P_2' et on obtient Φ_3

en projetant Φ_2 de A'_2 sur un hyperplan. En continuant de la sorte, on obtient une suite des surfaces $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_i, \ldots$ dont les sections hyperplanes sont respectivement les courbes $\Gamma_0^{(1)}$, $\Gamma_0^{(2)}, \ldots, \Gamma_0^{(i)}, \ldots$ qui correspondent aux courbes $C_0^{(1)}, C_0^{(2)}, \ldots$, $C_0^{(i)}, \ldots$ Sur la surface Φ_i se trouvent deux droites ρ_{i-1}, ρ_{t-i+2}, qui représentent les domaines respectivement des points P_i, P'_i.

Supposons $t = 2k$; les développements précédent sont valables pour $i \leqslant k + 1$ et la dernière surface obtenue Φ_{k+1} contient deux droites ρ_k, ρ_{k+2} se coupant en un point A'_{k+1} simple pour la surface.

Considérons les courbes $C_0^{(k+2)}$. On a

$$\alpha + \lambda_1 + \mu_1 - 1 < (k + 2)(\lambda_1 + \mu_1)$$

et par suite

$$\lambda_{k+2} = \alpha + \lambda_1, \quad \mu_{k+2} = \mu_1 - 1.$$

Les courbes $C_0^{(k+2)}$ passent $(2k + 2)\lambda_1 + \mu_1$ fois par A, $\mu_1 - 1$ fois par les points $(\alpha, 1), (\alpha, 2), \ldots, (\alpha, \alpha - 1)$. Si nous posons

$$(2k + 1)\mu_1 = [(2k + 1)\lambda_1 + 2]\theta + h,$$

on voit, en raisonnant comme précédemment, que les courbes passent $(2k + 2) + 1$ fois par les points $(1, 1), \ldots, (1, \theta - 1)$, $\lambda_1 + h + 1$ fois par le point $(1, \theta)$, $\lambda_1 - 1$ fois par les points $(1, \theta + 1), \ldots, (1, \beta - 1)$. Les différences entre les multiplicités des points $(1, \theta - 1)$, $(1, \theta)$ et entre les multiplicités des points $(1, \theta)$ et $(1, \theta + 1)$ sont respectivement

$$(2k + 1)\lambda_1 - h), \quad h + 2.$$

Si ces nombres n'étaient pas premiers entre eux, il en serait de mêmes des nombres $(2k + 1)\ \lambda_1 + 2$ et $h + 2$. Comme on peut écrire

$$(2k + 1)(\mu_1 - \lambda_1) = [(2k + 1)\lambda_1 + 2](\theta - 1) + h + 2,$$

un facteur commun à $(2k + 1)\ \lambda_1 + 2$ et à $h + 2$ devrait diviser $\mu_1 - \lambda_1$ et comme on peut écrire

$$p = [(2k + 1)\lambda_1 + 2]\mu_1 + \lambda_1 - \mu_1,$$

p ne serait pas premier. Il en résulte que les courbes $C_0^{(k+2)}$ ont en commun une suite de points $(1, \theta, 1), \ldots$, infiniment voisins successifs de $(1, \theta)$ situés sur une branche superlinéaire d'origine A, dont le dernier Point P est uni de première espèce.

pour I_p et simple pour les courbes. Le domaine du point P correspond à celui du point simple A'_{k+1} de Φ_{k+1} sur cette surface.

Supposons maintenant $t = 2k + 1$. Le point A'_{k+1} est double conique pour la surface Φ_{k+1}. En répétant le raisonnement précédent, on est conduit à poser

$$(k + 1)\mu_1 = [(k + 1)\lambda_1 + 1]\lambda + h$$

et les courbes $C_0^{(k+2)}$ passent $(2k + 3)\lambda_1 + 1$ fois par les points $(1, 1), \ldots, (1, \theta - 1)$, $\lambda_1 + 2h + 1$ fois par $(1, \theta)$, $\lambda_1 - 1$ fois par $(1, \theta + 1), \ldots, (1, \beta - 1)$. Les nombres $(k + 1)\lambda_1 - h$ et $h + 1$ sont premiers entre eux et les différences entre les multiplicités des courbes aux points $(1, \theta - 1)$, $(1, \theta)$ d'une part, aux points $(1, \theta)$, $(1, \theta + 1)$ d'autre part, c'est-à-dire les nombres

$$2(k + 1)\lambda_1 - 2h, \quad 2h + 2$$

ont pour facteur commun 2. Les courbes $C_0^{(k+2)}$ passent par une suite de points $(1, \theta, 1), \ldots$ infiniment voisins successifs de $(1, \theta)$, situés sur une branche superlinéaire, se terminant par un point P, double pour les courbes, uni de première espèce pour I_p. Sur la surface Φ_{k+1} se trouvent tracées les droites ρ_k, ρ_{k+2} et le domaine du point P correspond au domaine ρ_{k+1} du point A'_{k+1}.

III. Points unis de seconde espèce et de seconde catégorie.

32. Supposons que A soit un point uni de seconde espèce et de la seconde catégorie et que nous ayons précisément

$$\lambda_1 + \alpha\mu_1 = hp, \quad \mu_1 + \beta\lambda_1 = p,$$

h étant supérieur à l'unité et λ_1, μ_1 étant la solution des congruences

$$\lambda + \alpha\mu \equiv 0, \qquad \mu + \beta\lambda \equiv 0, \qquad (\text{mod. } p) \quad (1)$$

telle que $\lambda_1 + \mu_1$ soit minimum.

Les courbes C'_0 passent $\lambda_1 + \mu_1$ fois par le point A et λ_1 fois par les $\beta - 1$ points $(1, 1), (1, 2), \ldots, (1, \beta - 1)$. Nous allons montrer que les courbes C'_0 passent un certain nombre de fois par le point $(\alpha, \alpha - 1)$.

Sur les courbes C'_0, le point A est l'origine d'un certain nombre de branches passant par le point $(\alpha, 1)$ et comprenant des suites de points infiniment voisins successifs du précédent, mais de seconde espèce pour l'involution, chaque suite se terminant par un point uni de première espèce. Soient $P_1, P_2, \ldots, P_k$ ces points et $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k$ leurs multiplicités pour les courbes C'_0.

Considérons la surface Φ_1, dont les sections hyperplanes Γ'_0 correspondent aux courbes C'_0. Au domaine du point $(1, \beta - 1)$ correspond une courbe rationnelle σ_1 d'ordre λ_1 ; aux domaines des points $P_1, P_2, \ldots, P_k$ correspondent des courbes $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$, rationnelles, d'ordres respectifs $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k$.

Aux courbes C_α, qui passent simplement par les points A, $(\alpha, 1), \ldots, (\alpha, \alpha - 1)$, correspondent sur Φ_1 des courbes Γ_α qui doivent rencontrer une des courbes $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$, par exemple τ_k, en un point variable. Il en résulte que le point P_k coïncide avec le point $(\alpha, \alpha - 1)$. Les courbes C'_0 passent donc par ce point. Elles y passent d'ailleurs avec une multiplicité $\mu'_1 = \nu_k$ inférieure à μ_1, car les courbes C_α coupent les courbes C'_0 en p points confondus en A.

Pour conserver les notations antérieures, nous désignerons par $\sigma_2 \equiv \tau_k$ la courbe qui correspond, sur Φ_1, au domaine du point $(\alpha, \alpha - 1)$. Cette courbe est rationnelle et d'ordre $\mu'_1 < \mu_1$.

Posons $\mu_1 = \mu'_1 + x_0$ et soient $\mu'_1 + x_1$, $\mu'_1 + x_2, \ldots, \mu'_1 + x_{\alpha-2}$ les multiplicités des points $(\alpha, 1), (\alpha, 2), \ldots, (\alpha, \alpha - 2)$ pour les courbes C'_0. On a

$$\lambda_1 + \alpha\mu'_1 + \sum_{i=0}^{\alpha-2} x_i = p,$$

donc

$$\lambda^* = \lambda_1 + \sum_{i=0}^{\nu-2} x_i, \quad \mu^* = \mu'_1$$

est une solution des congruences (1). Les courbes C^*_0 qui correspondent à cette solution passent $\lambda^* + \mu^*$ fois par A et $\mu^* = \mu'_1$ fois par les points $(\alpha, 1), (\alpha, 2), \ldots, (\alpha, \alpha - 1)$; elles ne passent donc plus par les points $P_1, P_2, \ldots, P_{k-1}$.

Aux courbes C^*_0 correspondent sur la surface Φ_1 des courbes Γ^*_0 découpées par des hyperplans rencontrant les courbes τ_1, $\tau_2, \ldots, \tau_{t-1}$ en des points fixes. Les points de rencontre avec τ_1 par exemple ne peuvent être distincts, car les courbes C^*_0 ne peuvent passer par des points fixes situés dans le domaine du premier ordre de P_1. Par conséquent, les hyperplans qui découpent sur Φ_1 les courbes Γ_0^* ont un contact d'ordre $\nu_1 - 1$ en un point avec la courbe τ_1, un contact d'ordre $\nu_2 - 1$ en un point avec la courbe $\tau_2, \dots$, un contact d'ordre $\nu_{k-1} - 1$ en un point avec la courbe τ_{k-1}.

La surface Φ_1 s'obtient en projetant la surface Φ du point de diramation A' homologue du point A sur un hyperplan de l'espace ambiant. Il en résulte que le cône tangent à Φ en A' est le cône projetant de ce point l'ensemble des courbes $\sigma_1, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{k-1}, \sigma_2$; le point A' est donc multiple d'ordre

$$\lambda_1 + \mu_1' + \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_{k-1}$$

pour la surface Φ.

33. Considérons les systèmes linéaires de courbes $|C_0''|, |C_0'''|, \dots$ compris entre $|C_0'|$ et $|C_0^*|$. Aux courbes de ces systèmes correspondent sur Φ_1 des courbes $\Gamma_0'', \Gamma_0''', \dots$ dont chacune est un cas particulier des précédentes ; il en résulte que les courbes $\Gamma_0'', \Gamma_0''', \dots$ rencontrent la courbe σ_2 en μ_1' points variables, c'est-à-dire que les courbes $C_0'', C_0''', \dots$ passent toutes μ_1' fois par le point $(\alpha, \alpha - 1)$.

Fixons en particulier l'attention sur les courbes C_0''. Les courbes Γ_0'' qui leur correspondent sur Φ_1 sont découpées par les hyperplans passant par un point A_1' de la surface. Les courbes C_0 passant $\lambda_2 + \mu_2 > \lambda_1 + \mu_1$ fois par A, ne peuvent plus passer que $\lambda_1 - 1$ fois par le point $(1, \beta - 1)$ et par conséquent, le point A_1' appartient à la courbe σ_1. Pour la même raison, les courbes C_0'' ne peuvent plus passer que $\mu_1' + \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_{k-1} - 1$ fois par l'ensemble des points $(\alpha, \alpha - 1)$, $P_1, P_2, \dots, P_{k-1}$. Et comme elles passent μ_1' fois par $(\alpha, \alpha - 1)$, elles passent une fois de moins que les courbes C_0' par un des points $P_1, P_2, \dots, P_{k-1}$, par exemple par le point P_1. Le point A_1' est donc situé sur la courbe τ_1.

Parmi les systèmes $|C_0'''|, |C_0^{(4)}|, \dots, |C_0^*|$ se trouve un système soit $|C_0^{(i)}|$ tel que les courbes homologues $\Gamma_0^{(i)}$ sont découpées sur Φ_1 par les hyperplans ayant un contact d'ordre $\nu_1 - 1$ avec τ_1 en A_1'. Ces courbes $\Gamma_0^{(i)}$ rencontrent les courbes $\tau_2, \tau_3, \dots, \tau_{k-1}$ respectivement $\nu_2, \nu_3, \dots, \nu_{k-1}$ points variables. Désignons par ξ_i les hyperplans contenant les courbes $\Gamma_0^{(i)}$.

Les hyperplans ξ_i passant par un point de τ_1 distinct de A_1'

contiennent cette courbe et découpent, sur Φ_1, un système linéaire de courbes dont la dimension est inférieure d'une unité à celle de $|\Gamma_0^{(i)}|$, c'est donc le système $|\Gamma_0^{(i+1)}|$. Les courbes $\Gamma_0^{(i+1)}$ rencontrent la courbe τ_1 en un certain nombre de points variables et par conséquent les courbes $C_0^{(i+1)}$ passent un certain nombre de fois par le point P_1. Mais alors, comme la multiplicité de A pour les courbes $C_0^{(i+1)}$ est supérieure à celle du même point pour les courbes $C_0^{(i)}$, il faut que les courbes $C_0^{(i+1)}$ passent par un des points $P_2, P_3, \ldots, P_{k-1}$ avec une multiplicité inférieure d'une unité à celle des courbes $C_0^{(i)}$ au même point. Supposons, pour fixer les idées, que les courbes $C_0^{(i+1)}$ passent avec la multiplicité $\nu_2 - 1$ par le point P_2.

Les hyperplans contenant la courbe τ_1 découpent sur Φ_1 les courbes $\Gamma_0^{(i+1)}$ ne rencontrant plus la courbe τ_2 qu'en $\nu_2 - 1$ points, par conséquent la courbe τ_2 doit s'appuyer en un point A'_{12} sur la courbe τ_1.

Les hyperplans passant par la courbe τ_1 et ayant un contact d'ordre $\nu_2 - 1$ en A'_{12} avec la courbe τ_2 découpent sur Φ_1 des courbes auxquelles correspondent sur F des courbes ne passant plus par P_2. Les hyperplans contenant les courbes τ_1, τ_2 ne peuvent plus rencontrer une des courbes $\tau_3, \tau_{4+1} \ldots, \tau_{k-1}$, par exemple τ_3, qu'en $\nu_3 - 1$ points. La courbe τ_3 s'appuie donc en un point sur τ_2. Et ainsi de suite, la courbe τ_4 s'appuie en un point sur $\tau_3, \ldots$, la courbe τ_{k-1} en un point sur τ_{k-1}.

Nous allons voir d'ailleurs que l'on a $k = 2$.

34. Nous allons maintenant former des solutions des congruences (1).

Posons

$$p = a\alpha + b,$$

où b est inférieur à α. Une solution des congruences (1) est donnée par $\lambda = b$, $\mu = a$. D'autres solutions sont données par $\lambda = b + \alpha$, $\mu = a - 1$; $\lambda = b + 2\alpha$, $\mu = a - 2$; ... (à condition naturellement que ces nombres soient compris entre o et p). D'autres solutions seront $\lambda = 2b$, $\mu = 2a$; $\lambda = 3b$, $\mu = 3a$; ... Il est clair que pour qu'il existe une solution λ_1, μ_1 telle que l'on ait

$$\lambda_1 + \mu_1 < a + b,$$

il doit exister un entier positif r tel que

$$(r-1)b < a < rb. \tag{2}$$

On a alors la solution

$$\lambda = rb - a, \quad \mu = ra + 1$$

et pour que la somme $\lambda + \mu$ soit inférieure à $a + b$, on doit avoir

$$(r-1)\,(a+b) < a - 1. \tag{3}$$

Soit m le plus grand entier positif tel que l'on ait

$$ma < [m(r-1)+1]b. \tag{4}$$

Les congruences (1) admettent les solutions

$$\begin{array}{ll}
\lambda_1 = m[(r-1)b - a] + b, & \mu_1 = m[(r-1)a + 1] + a, \\
\lambda_2' = (m-1)[(r-1)b - a] + b, & \mu_1' = (m-1)[(r-1)a + 1] + a, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\lambda_{i+1}' = (m-i)[(r-1)b - a] + b, & \mu_{i+1}' = (m-i)[(r-1)a + 1] + a, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\lambda_m' = rb - a, & \mu_m' = ra + 1, \\
\lambda_{m+1}' = b, & \mu_{m+1}' = a.
\end{array}$$

On a

$$a + b > \ldots > \lambda_i' + \mu_i' > \ldots > \lambda_1 + \mu_1,$$

mais entre deux solutions λ_i', μ_i' et λ_{i+1}', μ_{i+1}', il peut exister d'autres solutions λ, μ telles que

$$\lambda_i' + \mu_i' < \lambda + \mu < \lambda_{i+1}' + \mu_{i+1}^i\,;$$

nous reviendrons plus loin sur ce point.

Observons que l'on a

$$\lambda_{i+1}' + a\mu_{i+1}' = [(m-i)\,(r-1)+1]p.$$

En particulier, pour $i = 0$, on trouve

$$h = m(r-1) + 1.$$

Par hypothèse, on a d'aileurs

$$m[(r-1)a + 1] + a + \beta\,\{\,m[(r-1)b - a] + b\,\} = p.$$

35. Désignons par $|\overline{C}_0^{(i)}|$ le système de courbes qui correspond à la solution λ_i', μ_i'. Le système $|\overline{C}_0^{(m+1)}|$ coïncide évidemment avec le système que nous avons appelé plus haut $|C_0^*|$ et on a donc $\mu'_1 = a$. Il en résulte que les courbes C'_0, $\bar{C}''_0$, $\bar{C}_0^{(1)}$, ..., $\bar{C}_0^{(m)}$ passent a fois par le point $(\alpha, \alpha - 1)$.

Envisageons les courbes $\bar{C}_0^{(m)}$; nous allons voir que sur chacune d'elles, le point A est l'origine d'une branche superlinéaire passant par les points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, ..., (α, x), $(\alpha, x + 1)$, $(\alpha, x + 1, 1)$, ... et finalement par un point fixe P, commun à toutes les courbes.

Les courbes $\bar{C}_0^{(m)}$ passent $r(a + b) - \alpha + 1$ par le point A ; supposons qu'elles passent $ra + 1$ fois par les points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, ..., (α, x), y $(> a)$ fois par le point $(\alpha, x + 1)$, a fois par les points $(\alpha, x + 2)$, ..., $(\alpha, \alpha - 1)$. En exprimant que la somme des multiplicités des courbes $\bar{C}_0^{(m)}$ aux points A, $(\alpha, 1)$, ..., $(\alpha, \alpha - 1)$ est égale à p, on trouve

$$[(r - 1)a + 1]x + y = \alpha - 1 - (r - 1)\ (a + b) + a.$$

Posons

$$\alpha - 1 - (r - 1)b = \theta[(r - 1)a + 1] + \eta\ ;$$

on a

$$x = \theta - 1, \quad y = a + \eta + 1.$$

Le point $(\alpha, \theta, 1)$, infiniment voisin du point (α, θ), multiple d'ordre $a + \eta + 1$ pour les courbes $\bar{C}_0^{(m)}$, appartient certainement aux courbes précédentes, avec la multiplicité au plus égale à $y - a = \eta + 1$.

Posons

$$\begin{aligned}
(r - 1)a - \eta &= \theta_1(\eta + 1) + h_1, \\
\eta + 1 &= \theta_2 h_1 + h_2, \\
h_1 &= \theta_3 h_2 + h_3, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
h_{t-2} &= \theta_t h_{t-1} + h_t, \\
h_{t-1} &= \theta_{t+1} h_t.
\end{aligned}$$

Les courbes $\bar{C}_0^{(m)}$ passent $\eta + 1$ fois par les points $(\alpha, \theta, 1)$, ..., $(\alpha, \theta, \theta_1)$, h_1 fois par les points $(\alpha, \theta, \theta_1 + 1)$, $(\alpha, \theta, \theta_1 + 1, 1)$, ..., $(\alpha, \theta, \theta_1 + 1, \theta_2)$, h_2 fois par les points $(\alpha, \theta, \theta_1 + 1, \theta_2 + 1)$, $(\alpha, \theta, \theta_1 + 1, \theta_2 + 1, 1)$, ... et ainsi de suite, jusqu'au moment où l'on arrivera à une suite de θ_{t+1} points multiples d'ordre h_t dont le dernier est le point P. Tous ces points sont infiniment voisins successifs du point (α, θ), ils sont unis de seconde espèce pour l'involution I, sauf le dernier, P, qui est uni de première espèce.

Le nombre h_t est le plus grand commun diviseur de $(r-1)a - \eta$ et de $\eta + 1$; nous allons voir que $h_t = 1$, c'est-à-dire que les nombres précédents sont premiers entre eux.

En effet, h_t divise $(r-1)a - \eta$ et $\eta + 1$, donc aussi $(r-1)a + 1$. Si l'on se reporte à la définition de θ, on voit que h_t divise également $\alpha - (r-1)b$, donc aussi

$$\alpha[(r-1)a+1] - [\alpha - (r-1)b] = (r-1)p.$$

p étant premier, h_t divise $r-1$. Mais h_t divise également $(r-1)a + 1$, donc aussi l'unité et par conséquent $h_t = 1$.

Les courbes $\overline{C}_0^{(m)}$ passent donc simplement par le point P.

Envisageons maintenant les courbes $\overline{C}_0^{(m-1)}$. On a

$$\lambda'_{m-1} = (2r-1)b - 2\alpha, \quad \mu'_{m-1} = (2r-1)a + 2.$$

Ces courbes passent $(2r-1)(a+b) - 2(\alpha - 1)$ fois par le point A. Supposons qu'elles passent $(2r-1)\,a + 2$ fois par les points $(\alpha, 1), (\alpha, 2), \ldots, (\alpha, x)$, $y(> a)$ fois par le point $(\alpha, x+1)$, a fois par les points $(\alpha, x+2), \ldots, \ldots, (\alpha, \alpha - 1)$. On doit avoir

$$2[(r-1)a+1]x + y = 2[\alpha - 1 - (r-1)(a+b)] + a,$$

d'où

$$x = \theta - 1, \quad y = a + 2\eta + 2.$$

La différence entre les multiplicités des courbes $\overline{C}_0^{(m-1)}$ aux points $(\alpha, \theta - 1)$ et (α, θ) est $2\,[(r-1)a - \eta]$ et la différence entre les multiplicités des mêmes courbes aux points (α, θ), $(\alpha, \theta + 1)$ est $2(\eta + 1)$. Ces nombres ont plus grand commun diviseur 2 et par conséquent les courbes $\overline{C}_0^{(m-1)}$ passent $2(\eta+1)$ fois par les points $(\alpha, \theta, 1), \ldots, (\alpha, \theta, \theta_1)$, $2h_1$ fois par les points $(\alpha, \theta, \theta_1 + 1), (\alpha, \theta, \theta_1 + 1{,}1), \ldots, (\alpha, \theta, \theta_1 + 1, \theta_2)$ et ainsi de suite ; elles passent finalement deux fois par le point P.

Un raisonnement analogue peut-être repris pour les courbes $\overline{C}_0^{(m-2)}, \ldots, \overline{C}''_0, C'_0$. On trouvera que le point P est respectivement multiple d'ordres $3, \ldots, m-1, m$ pour ces courbes.

Le point P est certainement un des points $P_1, P_2, \ldots, P_{k-1}$ et d'après le résultat qui vient d'être obtenu, un seul de ces points appartient aux courbes C'_0. Cela signifie que l'on a $k = 2$, le point P coïncidant avec le point P_1. Les courbes τ_2, τ_3, ..., τ_{k-1} n'existent donc pas. Nous désignerons par τ la courbe τ_1 ; son ordre est $\nu_1 = m$.

Nous pouvons énoncer le théorème suivant :

En un point de diramation de la surface Φ homologue d'un point uni de seconde espèce et de la deuxième catégorie, le cône tangent à cette surface se scinde en trois cônes rationnels.

Le point de diramation A' est donc multiple d'ordre

$$\lambda_1 + \nu_1 + \mu_1' = m[(r-1)b - a] + a + b + m.$$

36. Désignons par ξ_{m+1} les hyperplans qui découpent, sur la surface Φ_1, les courbes $\overline{C}_0^{(m+1)}$. Ces hyperplans ont un contact d'ordre $\nu_1 - 1$ avec la courbe τ au point A_1' et rencontrent la courbe τ_2 en $\mu_1' = a$ points.

Soient ξ_{m+2} les hyperplans passant par un point de τ distinct de A_1' ; ces hyperplans contiennent la courbe τ et découpent sur la surface Φ_1 des courbes que nous désignerons par $\overline{\Gamma}_0^{(m+2)}$. Ces courbes rencontrent certainement la courbe τ en des points variables et par conséquent les courbes $\overline{C}_0^{(m+2)}$ qui leur correspondent sur F passent certainement par le point P_1.

Supposons que les courbes $\overline{C}_0^{(m+2)}$ passent a fois par le point $(\alpha, \alpha - 1)$ et par conséquent a fois au moins par les points $(\alpha, \alpha - 2)$, ..., $(\alpha, \theta + 1)$. Comme elles passent par P_1, donc par le point $(\alpha, \theta, 1)$, elles passent certainement plus de a fois par les points $(\alpha, \theta - 1)$, $(\alpha, \theta - 2)$, ..., $(\alpha, 1)$. Comme les courbes $\overline{C}_0^{(m+1)}$ passent exactement a fois par les points $(\alpha, 1)$, ..., $(\alpha, \alpha - 1)$ et que leur multiplicité en A est inférieure à celle des courbes $\overline{C}_0^{(m+2)}$, on en conclut que la somme des multiplicités des courbes $\overline{C}_0^{(m+2)}$ aux points A, $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, ..., $(\alpha, \alpha - 1)$ est supérieure à la somme des multiplicités des courbes $\overline{C}_0^{(m+1)}$ aux mêmes points. Or, ces deux sommes doivent être égales à p et nous parvenons donc à une absurdité. On en conclut que les courbes $\overline{C}_0^{(m+2)}$ ne peuvent passer a fois par le point $(\alpha, \alpha - 1)$, mais y passent $a - 1$ fois, En d'autres termes, sur la surface Φ_1, les courbes τ et σ_2 ont un point commun A_1''.

37. Sur la surface Φ_1, les points A_1', A_2'' sont simples ou doubles.

Chacun de ces points peut être simple, double conique ou double biplanaire et dans ce dernier cas, il peut exister une suite de points doubles biplanaires infiniment voisins successifs se terminant soit par un point double biplanaire ordinaire, soit par un point double conique.

Nous supposerons que le point A_1' est équivalent à une suite de courbes rationnelles de degré -2.

$$\rho_1, \ \rho_2, \ldots, \rho_t,$$

dont chacune rencontre la précédente et la suivante en un point, mais ne rencontre pas les autres. De plus, la courbe ρ_1 rencontre σ_1 en un point et la courbe ρ_t rencontre τ en un point. Si $t = 0$, le point A_1' est simple pour la surface Φ_1, si t est pair, on a une suite de points doubles biplanaires terminée par un point double biplanaire ordinaire, si t est impair, on a une suite de points doubles biplanaires terminée par un point double conique.

De même, nous supposerons que le point A_1'' est équivalent à une suite de courbes rationnelles de degré virtuel -2,

$$\omega_1, \ \omega_2, \ldots, \omega_u,$$

dont chacune rencontre la précédente et la suivante en un point, mais ne rencontre pas les autres. De plus, ω_1 rencontre τ en un point et ω_u rencontre σ_2 en un point.

Dans ces conditions, on a

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0' + \sigma_1 + \rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_t + \tau + \omega_1 + \omega_2 + \ldots \\ + \omega_u + \sigma_2$$

et

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0'' + \sigma_1 + 2(\rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_t) + \tau + \omega_1 + \omega_2 + \ldots \\ + \omega_u + \sigma_2.$$

Les courbes rationnelles σ_1, τ, σ_2 ont respectivement les degrés virtuels $-(\lambda_1 + 1)$, $-(\nu_1 + 2) = -(m + 2)$, $-(\mu_1' + 1) = -(a + 1)$.

On peut trouver une relation entre les entiers t, u de la manière suivante : La courbe Γ_a satisfait à la relation fonctionnelle

$$p\Gamma_0 \equiv p\Gamma_a + f_1\sigma_1 + g_1\rho_1 + g_2\rho_2 + \ldots + g_t\rho_t + f\tau + l_1\omega_1 + \\ l_2\omega_2 + \ldots + l_u\omega_u + f_2\sigma_2.$$

Cette courbe Γ_a rencontre la courbe σ_2 en un point variable.

En calculant l'intersection de la courbe précédente successivement avec les courbes $\sigma_1, \rho_1, \ldots, \rho_t, \tau, \omega_1, \ldots, \omega_u$, on obtient les relations

$$g_1 = (\lambda_1 + 1)\, f_1,\; g_2 = (2\lambda_1 + 1)f_1, \ldots, g_t = (t\lambda_1 + 1)f_1,$$
$$f = [(t+1)\lambda_1 + 1]f_1,\; l_1 = [\lambda_1 \{m(t+1) + t + 2\} + m + 1]f_1,$$
$$l_2 = [\lambda_1\{2m(t+1) + t + 3\} + 2m + 1]f_1, \ldots,$$
$$l_u = [\lambda_1 \{um(t+1) + t + u + 1\} + um + 1]f_1,$$
$$f_2 = [\lambda_1 \{m(u+1)(t+1) + t + u + 2]\} + (u+1)m + 1]f_1.$$

En exprimant que Γ_a rencontre σ_2 en un point, on a

$$p = (a+1)f_2 - l_u.$$

Dans le second membre, on peut mettre f_1 en évidence et par conséquent, on a $f_1 = 1$ et

$$p = a\lambda_1[m(t+1)(u+1) + t + u + 2] + \lambda_1[m(t+1) + 1] + a[m(u+1) + 1] + m.$$

On a donc la relation fonctionnelle

$$p\Gamma_0 \equiv p\Gamma_a + \sigma_1 + \lambda_1[\rho_1 + 2\rho_2 + \ldots + t\rho_t + (t+1)\tau] + \rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_t + \tau$$
$$+ [\lambda_1 \{m(t+1) + 1\} + m][\omega_1 + 2\omega_2 + \ldots + u\omega_u + (u+1)\sigma_2]$$
$$+ [\lambda_1(t+1) + 1][\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_u + \sigma_2].$$

On trouve de même la relation fonctionnelle

$$p\Gamma_0 \equiv p\Gamma_1 + [a\{m(u+1) + u + 1\} + m][(t+1)\sigma_1 + t\rho_1 + \ldots + \rho_t]$$
$$+ [a(u+1) + 1]\,(\sigma_1 + \rho_1 + \ldots + \rho_t)$$
$$+ a[(u+1)\tau + u\omega_1 + \ldots + \omega_u]$$
$$+ \tau + \omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_u + \sigma_2,$$

exprimant que les courbes Γ_1 rencontrent la courbe σ_1 en un point.

38. Nous avons

$$m[(r-1)a + 1] + a + \beta\lambda_1 = p.$$

En remplaçant p par la valeur trouvée plus haut, on a

$$a\lambda_1[m(t+1)(u+1) + t + u + 2] + \lambda_1[m(t+1) + 1] + am(u + 2 - r) = \beta\lambda_1.$$

On a donc nécessairement

$$u = r - 2$$

et par conséquent

$$p = a\lambda_1[(t+1)h + r - 1] + \lambda_1[m(t+1) + 1] + ah + m,$$
$$\beta = a[(t+1)h + r - 1] + m(t+1) + 1,$$

en remarquant que

$$h = m(r-1) + 1.$$

Observons que l'on a

$$\lambda_1 = bh - m\alpha$$

et, en posant $p = a\alpha + b$,

$$bh(t+1) + b(r-1) + 1 = \alpha[m(t+1) + 1],$$

ou encore

$$b(r-1)[m(t+1) + 1] + b(t+1) + 1 = \alpha[m(t+1) + 1].$$

Il en résulte que $b(t+1) + 1$ doit être divisible par $m(t+1) + 1$, ce qui permet de déterminer t. Observons d'ailleurs que de $(r-1)\ b < \alpha$, on déduit $m < b$.

Traitons quelques exemples :

1) $p = 6\eta + 1$, $\alpha = 3\eta + 2$, η étant choisi de manière que p soit premier.

On a $a = 1$, $b = 3\eta - 1$. D'après la relation (2),

$$(r-1)\ (3\eta - 1) < 3\eta + 2 < r(3\eta - 1),$$

on a $r = 2$. Ensuite, par la relation (4),

$$m(3\eta + 2) < (m+1)\ \ (3\eta - 1),$$

on a $m = \eta - 1$.

L'expression

$$\frac{b(t+1) + 1}{m(t+1) + 1} = \frac{(3\eta - 1)\ (t+1) + 1}{(\eta - 1)\ (t+1) + 1}$$

doit être un entier. On peut l'écrire sous la forme

$$3 + \frac{2t}{(\eta - 1)\,(t+1) + 1},$$

ce qui entraîne $t = 0$. On a alors $\beta = 2\eta + 1$.

2) $p = 6\eta + 5$, $\alpha = 3\eta + 4$, η étant choisi de manière que p soit premier.

On a encore $a = 1$ et $b = 3\eta + 1$. De la relation (2),

$$(r - 1)\ (3\eta + 1) < 3\eta + 4 < r(3\eta + 1),$$

on déduit $r = 2$. De la relation (4),

$$m(3\eta + 4) < (m + 1)\ (3\eta + 1),$$

on déduit $m = \eta$.

$(3\eta + 1)\ (t + 1) + 1$ devant être divisible par $\eta(t + 1) + 1$, on a $t = 1$ et $\beta = 4\eta + 4$.

3) $p = 9\eta^2 - 3\eta + 1$, $\alpha = 6\eta^2 - \eta + 1$, η étant choisi de telle sorte que p soit premier.

On a $a = 1$, $b = 3\eta^2 - 2\eta$. La relation (2) donne

$$(r - 1)\ (3\eta^2 - 2\eta) < 6\eta^2 - \eta + 1 < r(3\eta^2 - 2\eta),$$

d'où $r = 3$. La relation (4) donne ensuite

$$m(6\eta^2 - \eta + 1) < (2m + 1)\ (3\eta^2 - 2\eta),$$

d'où $m = \eta - 1$.

La quantité

$$\frac{(3\eta^2 - 2\eta)(t + 1) + 1}{(n - 1)(t + 1) + 1} = 3\eta + 1 + \frac{t - (3\eta - 1)}{(\eta - 1)(t + 1) + 1},$$

doit être un entier, ce qui exige $t = 3\eta - 1$.

On a alors $\beta = 9\eta^2 - 6\eta + 3$.

39. La singularité du point de diramation A′ pour la surface Φ est complètement déterminée par ce qui précède. Nous allons cependant reprendre l'étude des systèmes $|C'_0|$, $|C''_0|$, ...

Reprenons tout d'abord le système $|C'_0|$ et cherchons à déterminer son degré effectif, c'est-à-dire le nombre de points absorbés par A dans l'intersection de deux courbes C'_0 ; si x est ce nombre, le degré effectif de $|C'_0|$ est $np - x$. Notons que x doit être multiple de p. Comme le point A′ est multiple d'ordre $\lambda_1 + a + m$ pour la surface Φ, on doit précisément avoir $x = p(\lambda_1 + a + m)$.

Rappelons que les courbes C'_0 passent $\lambda_1 + \mu_1$ fois par A, λ_1 fois par les $\beta - 1$ points $(1, 1)$, $(1, 2)$, ..., $(1, \beta - 1)$, μ_1 fois par les $\theta - 1$ points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, ..., $(\alpha, \theta - 1)$, $a + m\ (\eta + 1)$

fois par le point (α, θ), a fois par les points $(\alpha, \theta + 1), \ldots, (\alpha, \alpha - 1)$, $m\,(\eta + 1)$ fois par θ_1 points infiniment voisins successifs de (α, θ), $h_1 m$ fois par θ_2 points successifs des précédents, ..., $h_{t-1}\, m$ fois par θ_t points infiniment voisins successifs, enfin $h_t m = m$ fois par θ_{t+1} points faisant suite aux précédents et dont le dernier est P_1 (nº 34).

Observons que l'on a

$$h_{t-1} h_t = \theta_{t+1} h_t^2,$$
$$h_{t-2} h_{t-1} = \theta_t h_{t-1}^2 + h_{t-1} h_t,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$h_1 h_2 = \theta_3 h_2^2 + h_2 h_3,$$
$$h_1(\eta + 1) = \theta_2 h_1^2 + h_1 h_2,$$
$$[(r - 1)a - \eta](n + 1) = \theta_1(\eta + 1)^2 + h_1(\eta + 1),$$

d'où par addition,

$$[(r - 1)a - \eta](\eta + 1) = \theta_1(\eta + 1)^2 + \theta_2 h_1^2 + \ldots + \theta_{t+1} h_t^2.$$

Il en résulte que les points infiniment voisins de (α, θ) appartenant à toutes les courbes C_0' absorbent

$$(\eta + 1)[(r - 1)a - \eta]m^2$$

points de l'intersection de deux de ces courbes.

Cela étant, on doit avoir

$$(\lambda_1 + \mu_1)^2 + (\beta - 1)\lambda_1^2 + (\theta - 1)\mu_1^2 + (a + m\eta + m)^2$$
$$+ (\alpha - 1 - \theta)a^2 + m^2(\eta + 1)[(r - 1)a - \eta] = p(\lambda_1 + a + m).$$

Cette relation se vérifie identiquement.

Si π est le genre des sections hyperplanes de la surface Φ, les courbes C_0 ont le genre $p(\pi - 1) + 1$. Supposons que la singularité des courbes C_0' en A abaisse le genre de $\frac{1}{2}$ X unités. Les courbes Γ_0' ont le genre $\pi - (\lambda_1 + a + m - 1)$ et dans la correspondance entre une courbe Γ_0' et la courbe C_0' homologue, il y a $\lambda_1 + a + m$ points de diramation ; la formule de Zeuthen donne

$$2p[\pi - 1 - (\lambda_1 + a + m - 1)] + (p - 1)\,(\lambda_1 + a + m)$$
$$= 2p(r - 1) - X,$$

d'où

$$X = (\lambda_1 + a + m)\,(p + 1) - 2p.$$

Si i est la multiplicité pour les courbes C'_0 d'un point du domaine de A, on a

$$X = \Sigma i^2 - \Sigma i.$$

Mais $\Sigma i^2 = p(\lambda_1 + a + m)$, donc

$$\Sigma i = 2p - (\lambda_1 + a + m).$$

Observons que la somme des multiplicités des courbes C'_0 au point A et soit aux points $(1, 1), \ldots, (1, \beta - 1)$, soit aux points $(\alpha, 1), \ldots, (\alpha, \alpha - 1)$, vaut p. Donc

$$2p - (\lambda_1 + \mu_1) + m[\theta_1(\eta + 1) + \theta_2 h_2 + \ldots + \theta_t h_{t-1} + \theta_{t+1}]$$
$$= 2p - (\lambda_1 + a + m)$$

et enfin

$$m[\theta_1(\eta + 1) + \theta_2 h_1 + \theta_3 h_2 + \ldots + \theta_t h_{t-1} + \theta_{t+1}]$$
$$= \mu_1 - a - m = am\ (r - 1),$$

$$\theta_1(\eta + 1) + \theta_2 h_1 + \theta_3 h_2 + \ldots + \theta_t h_{t-1} + \theta_{t+1} = a(r - 1).$$

40. Comme nous l'avons vu, les courbes C''_0 ont la multiplicité $m - 1$ au point P_1 et la multiplicité a aux points $(\alpha, \alpha - 1), \ldots, (\alpha, \theta + 1)$. Elles ont la multiplicité $(m - 1)(\eta + 1)$ aux points $(\alpha, \theta, 1), \ldots, (\alpha, \theta, \theta_1)$, la multiplicité $(m - 1)\, h_1$ au point $(\alpha, \theta, \theta_1 + 1)$, donc la multiplicité $(m - 1)(\eta + 1) + a$ au point (α, θ) et la multiplicité

$$(m - 1)\,[(r - 1)a + 1] + a = \mu'_2$$

au point $(\alpha, \theta - 1)$. On a donc $\mu_2 \geqslant \mu'_2$.

Sur la surface Φ_1, les courbes Γ''_0 sont découpées par les hyperplans passant par le point A'_1 commun aux courbes σ_1 et τ.

On peut avoir $\mu_2 > \mu'_2$ lorsque l'on a

$$\lambda_2 = 2\lambda_1, \quad \mu_2 = 2\mu_1.$$

Cela exige

$$2(\lambda_1 + \mu_1) < \lambda'_2 + \mu'_2,$$

c'est-à-dire

$$[(m + 1)\,(r - 1) + 1](a + b) < (m + 1)\,(\alpha - 1),$$

inégalité compatible avec les inégalités écrites plus haut.

Considérons la surface Φ_2 dont les sections hyperplanes sont les courbes Γ''_2. Sur cette surface sont tracées : la courbe σ_1, d'ordre $\lambda_1 - 1$; la droite ρ_1, rencontrant σ_1 en un point ; la droite ρ_t, rencontrant ρ_1 en un point (simple si $t = 2$, double si $t > 2$) ; la courbe τ, d'ordre $m - 1$, rencontrant ρ_t en un point ; la courbe σ_2, d'ordre a, rencontrant τ en un point.

Les courbes C''_0 passent plus de μ'_2 fois par $(\alpha, 1)$, donc sur chacune de ces courbes, le point A est l'origine d'une branche superlinéaire passant par le point $(\alpha, 1)$ et par une suite de points fixes dont le dernier, Q_1, est uni de première espèce pour l'involution et simple pour les courbes C''_0. Le domaine de Q_1 correspond à la droite ρ_1.

De même, les courbes C''_0 passent par une suite de points fixes dont le dernier, Q_t, est uni de première espèce et simple pour les courbes. Sur chaque courbe C''_0, le point A est l'origine d'une branche superlinéaire passant par le point $(1, 1)$ et par le point Q_t. Le domaine de Q_t correspond à la droite ρ_t.

Si $\mu_2 = \mu'_2$, $\lambda_2 = \lambda'_2$, le point A est, sur chaque courbe C''_0, l'origine de deux branches superlinéaires passant par le point $(1, 1)$ et par des suites de points fixes se terminant respectivement à des points Q_1, Q_t, unis de première espèce et simples pour les courbes. Les domaines de Q_1, Q_t correspondent respectivement aux droites ρ_1, ρ_t.

Nous ne pousserons pas plus avant l'étude des systèmes $|C'''_0|$, ... ; cette étude ne présente de difficulté qu'en vertu des nombreuses notations que l'on doit introduire. Dans chaque cas particulier, elle est simple.

41. Résumons les résultats obtenus.

En un point de diramation homologue d'un point uni de seconde espèce et deuxième catégorie, le cône tangent à la surface Φ se scinde en trois cônes rationnels (σ_1), (τ), (σ_2).

Si l'on pose

$$p = a\alpha + b, \qquad (b < \alpha),$$

il existe un nombre r *tel que l'on ait*

$$(r - 1)b < \alpha < rb, \quad (r - 1)(a + b) < \alpha - 1,$$

et un nombre m *tel que l'on ait*

$$m\alpha < [m(r - 1) + 1]b.$$

Le cône (σ_1) *a l'ordre*

$$\lambda_1 = \mathrm{m}[(\mathrm{r} - 1)\mathrm{b} - \alpha] + \mathrm{b},$$

le cône (τ), *l'ordre* m *et le cône* (σ_2), *l'ordre* a.

Les cônes (σ_1), (σ_2) *ne se rencontrent pas en dehors du sommet, mais rencontrent chacun le cône* (τ) *suivant une droite, ces deux droites étant distinctes.*

Le point infiniment voisin du point de diramation sur la droite commune aux cônes (σ_1), (τ), *peut être double pour la surface et être équivalent à* t *courbes rationnelles de degré vitruel* -2, t *étant l'entier tel que* $\mathrm{b}(\mathrm{t} + 1) + 1$ *soit divisible par* $\mathrm{m}(\mathrm{t} + 1) + 1$. *Le point infiniment voisin du point de diramation sur la droite commune aux cônes* (τ), (σ_2) *peut être double pour la surface et être dans ce cas équivalent à un ensemble de* $\mathrm{r} - 2$ *courbes rationnelles de degré* -2.

La valeur de t peut s'obtenir par la relation

$$(t + 1)[bm(r - 1) + b - m\alpha) = \alpha - 1 - b(r - 1).$$

Traitons rapidement un exemple : Supposons $p = 211$, $\alpha = 60$. On a $a = 3$, $b = 31$, $r = 2$, $m = 1$, $t = 13$. Ensuite, on a

$$\lambda_1 = 2, \quad \mu_1 = 7.$$

Le point de diramation A′ est pour la surface Φ multiple d'ordre six, le cône tangent se décomposant en un cône rationnel du second ordre, un cône rationnel du troisième ordre n'ayant aucune génératrice commune avec le précédent et un plan rencontrant chacun des deux cônes suivant une droite.

IV. Points unis de seconde espèce et de troisième catégorie.

42. Si A est un point uni de seconde espèce et de troisième catégorie, on a

$$\lambda_1 + \alpha\mu_1 = h_\alpha p, \quad \mu_1 + \beta\lambda_1 = h_\beta p,$$

h_α et h_β étant des entiers supérieurs à l'unité.

Considérons les courbes C'_0. Sur chacune de ces courbes, le point A est l'origine d'un certain nombre de branches ayant un certain nombre de points fixes (unis pour l'involution) en commun. Nous supposerons précisément que sur les branches contenant le point (1, 1), les derniers points fixes sont P_1, P_2, ..., P_k, respectivement multiples d'ordres $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k$ pour les courbes C'_0 ; ces points sont unis de première espèce pour l'involution I. Sur les branches contenant le point $(\alpha, 1)$, les derniers points fixes seront P'_1, P'_2, ..., P'_l, unis de première espèce pour l'involution I, respectivement multiples d'ordres $\nu'_1, \nu'_2, \ldots, \nu'_l$ pour les courbes C'_0.

Sur la surface Φ_1, dont les sections hyperplanes Γ'_0 correspondent aux courbes C'_0, aux domaines des points P_1, P_2, ..., P_k correspondent des courbes $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$ et aux domaines des points P'_1, P'_2, ..., P'_l, des courbes $\tau'_1, \tau'_2, \ldots, \tau'_l$. Aux courbes C_1, qui passent simplement par les points A, (1, 1), ..., $(1, \beta - 1)$, correspondent des courbes Γ_1 qui doivent rencontrer une des courbes $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$ en un point variable. Ce sera par exemple τ_k et le point P_k coïncide avec le point $(1, \beta - 1)$.

De même, les courbes Γ_α, homologues des courbes C_α, passant simplement par les points A, $(\alpha, 1)$, ..., $(\alpha, \alpha - 1)$, doivent rencontrer en un point variable l'une des courbes $\tau'_1, \tau'_2, \ldots, \tau'_l$, par exemple τ'_l. Il en résulte que le point P'_l coïncide avec le point $(\alpha, \alpha - 1)$.

Soient $\lambda'_1 = \nu_k$ la multiplicité du point $(1, \beta - 1)$ pour les courbes C'_0 et $\mu'_1 = \nu'_l$ celle du point $(\alpha, \alpha - 1)$ pour les mêmes courbes.

Désignons par $\lambda'_1 + x_1, \lambda'_1 + x_2, \ldots, \lambda'_1 + x_{\beta-2}$ les multiplicités des points (1, 1), (1, 2), ..., $(1, \beta - 2)$ pour les courbes C'_0 et posons $\lambda_1 = \lambda'_1 + x_0$. Les courbes C_1 rencontrant les courbes C'_0 en p points confondus en A, on a

$$\mu_1 + \beta\lambda'_1 + \sum_0^{\beta-2} x_i = p.$$

Par conséquent,

$$\lambda^* = \lambda'_1, \quad \mu^* = \mu_1 + \Sigma x_i$$

est une solution des congruences

$$\lambda + \alpha\mu \equiv 0, \quad \mu + \beta\lambda \equiv 0, \quad (\text{mod. } p). \tag{1}$$

Les courbes C^*_0 qui correspondent à cette solution passent λ'_1 fois par les points (1, 1), (1, 2), ..., $(1, \beta - 1)$. Il leur correspond sur Φ_1 des courbes Γ^*_0 découpées par des hyperplans ayant avec les courbes $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{k-1}$, des contacts d'ordres $\nu_1 - 1$, $\nu_2 - 1$ ..., $\nu_{k-1} - 1$ respectivement.

Envisageons les courbes C''_0 ; elles passent λ'_1 fois par le point $(1, \beta - 1)$ et comme $\lambda_2 + \mu_2 > \lambda_1 + \mu_1$, il faut qu'elles passent une fois au moins par un des points $P_1, P_2, \ldots, P_{k-1}$, par exemple par P_1. Reprenons le raisonnement fait à propos des points unis de la seconde catégorie. Les courbes $C_0^{(i)}$ auxquelles correspondent des courbes $\Gamma_0^{(i)}$ contenant τ_1 comme partie, doivent passer une fois de moins par un des points $P_2, P_3, \ldots, P_{k-1}$, par exemple par P_2. La courbe τ_2 s'appuie donc en un point sur τ_1. De même, la courbe τ_3 doit s'appuyer en un point sur $\tau_2, \ldots$, la courbe τ_{k-1} en un point sur τ_{k-2}.

Un raisonnement analogue montre que sur Φ_1, la courbe τ'_2 s'appuie en un point sur τ'_1, la courbe τ'_3 en un point sur $\tau'_2, \ldots$, la courbe τ'_{l-1} en un point sur τ'_{l-2}.

Notons que sur Φ_1, les courbes Γ''_0 sont découpées par les hyperplans passant par un point A'_1 commun aux courbes τ_1, τ'_1.

43. Nous pouvons former, comme dans le cas des points de la seconde catégorie, les premières solutions des congruences (1).

Posons

$$p = b_1\beta + a_1,$$

où a_1 est inférieur à β. Pour que h_β soit supérieur à l'unité, il doit exister un entier r_1 tel que

$$(r_1 - 1)a_1 < \beta < r_1 a_1, \quad (r_1 - 1)\,(a_1 + b_1) < \beta - 1.$$

Soit m_1 le plus grand entier satisfaisant à l'inégalité

$$m_1\beta < [m_1(r_1 - 1) + 1]a_1.$$

Parmi les solutions des congruences (1), on a

$$\lambda'_{i+1} = (m_1 - i)[(r_1 - 1)b_1 + 1] + b_1,$$
$$\mu'_{i+1} = (m_1 - i)[(r_1 - 1)a_1 - \beta] + a_1,$$
$$(i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m_1).$$

En particulier, on a, pour $i = 0$,

$$\lambda_1 = m_1[(r_1 - 1)b_1 + 1] + b_1, \ \mu_1 = m_1[(r_1 - 1)a_1 - \beta] + a_1$$

et par suite

$$h_\beta = m_1(r_1 - 1) + 1,$$
$$\lambda_1 = b_1 h_\beta + m_1, \quad \mu_1 = a_1 h_\beta - m_1\beta.$$

Posons de même

$$p = a_2 \alpha + b_2,$$

où $b_2 < \alpha$. Pour que le nombre h_α soit supérieur à l'unité, il doit exister un entier r_2 tel que

$$(r_2 - 1) b_2 < \alpha < r_2 b_2, \quad (r_2 - 1)(a_2 + b_2) < \alpha - 1.$$

Soit alors m_2 le plus grand entier tel que

$$m_2 \alpha < [m_2(r_2 - 1) + 1] b_2.$$

Parmi les solutions des congruences (1) se trouvent les solutions

$$\begin{aligned} \lambda''_{i+1} &= (m_2 - i)\,[(r_2 - 1) b_2 - \alpha) + b_2, \; \mu''_{i+1} \\ &= (m_2 - i)\,[(r_2 - 1) a_2 + 1] + a_2, \\ &\quad (i = 0, 1, 2, \ldots, m_2). \end{aligned}$$

En particulier, on a, pour $i = 0$,

$$\lambda_1 = m_2\,[(r_2 - 1) b_2 - \alpha] + b_2, \quad \mu_1 = m_2[(r_2 - 1) a_2 + 1] + a_2$$

et par conséquent

$$h_\alpha = m_2(r_2 - 1) + 1,$$
$$\lambda_1 = b_2 h_\alpha - m_2 \alpha, \quad \mu_1 = a_2 h_\alpha + m_2.$$

44. Nous pouvons maintenant démontrer que l'on a $k = l = 2$. Tout d'abord, pour $i = m_1$, on a

$$\lambda'_{m_1+1} = b_1, \quad \mu'_{m_1+1} = a_1,$$

d'où $\lambda'_1 = b_1$. De même, pour $i = m_2$, on a

$$\lambda''_{m_2+1} = b_2, \quad \mu''_{m_2+1} = a_2$$

et par suite $\mu'_1 = a_2$.

Les courbes C'_0 passent donc b_1 fois par le point $(1, \beta - 1)$ et a_2 fois par le point $(\alpha, \alpha - 1)$.

Posons

$$\beta - 1 - (r_1 - 1) a_1 = \theta_1[(r_1 - 1) b_1 + 1] + \eta_1.$$

Les courbes qui correspondent à la solution λ'_{m_1}, μ'_{m_1} (pour $i = m_1 - 1$), passent $r_1(a_1 + b_1) - \beta + 1$ fois par le point A, $r_1 b_1 + 1$ fois par les points $(1, 1)$, $(1, 2)$, ..., $(1, \theta_1 - 1)$, $b_1 + \eta_1 + 1$ fois par le point $(1, \theta_1)$, b_1 fois par les points $(1, \theta_1 + 1)$, ...,

$(1, \beta - 1)$. Elles passent en outre par une suite de points infiniment voisins successifs du point $(1, \theta_1)$ dont le premier, $(1, \theta_1, 1)$, est multiple d'ordre $\eta_1 + 1$ et le dernier, que nous désignerons par P, est simple pour les courbes. Les nombres $(r_1 - 1)\, b_1 - \eta_1$ et $\eta_1 + 1$ sont en effet premiers entre eux.

On en déduit que les courbes correspondant à la solution λ'_i, μ'_i des congruences (1) passent $m_1 - i$ fois par le point P. En particulier, les courbes C'_0 passent m_1 fois par le point P. Celui-ci est un des points $P_1, P_2, \ldots, P_{k-1}$ et les $k - 2$ autres points ne peuvent exister. On a donc $k = 2$ et sur la surface Φ_1, au domaine du point P_1, multiple d'ordre m_1 pour les courbes C'_1, correspond une courbe rationnelle τ_1 d'ordre $\nu_1 = m_1$.

Posons maintenant

$$\alpha - 1 - (r_2 - 1)b_2 = \theta_2[(r_2 - 1)a_2 + 1] + \eta_2.$$

Les courbes qui correspondent à la solution λ'_{m_2}, μ'_{m_2} (pour $i = m_2 - 1$), passent $r_2(a_2 + b_2) - \alpha + 1$ fois par le point A, $r_2 a_2 + 1$ fois par les points $(\alpha, 1), (\alpha, 2), \ldots, (\alpha, \theta_2 - 1)$, $a_2 + \eta_2 + 1$ fois par le point (α, θ_2), a_2 fois par les points $(\alpha, \theta_2 + 1), \ldots, (\alpha, \alpha - 1)$ et en outre par une série de points infiniment voisins successifs du point (α, θ_2) dont le premier, $(\alpha, \theta_2, 1)$ est multiple d'ordre $\eta_2 + 1$ pour les courbes et dont le dernier, qui sera désigné par P′, est simple. En effet, les nombres $(r_2 - 1)a_2 - \eta_2$, $\eta_2 + 1$ sont premiers entre eux.

Les courbes qui correspondent à la solution λ''_i, μ''_i passent $m_2 - i$ fois par P′ et en particulier, les courbes C'_0 passent m_2 fois par P′. Il en résulte qu'il ne peut exister qu'un seul point $P'_1, P'_2, \ldots, P'_{l-1}$ et que ce point coïncide avec P′. On a donc $l = 2$.

Nous modifierons nos notations et désignerons dorénavant par P_2 le point P′ dont il vient d'être question. La courbe qui lui correspond sur la surface Φ_1 sera désignée par τ_2 et son ordre est donc m_2.

En un point de diramation correspondant à un point uni de seconde espèce et de la troisième catégorie, le cône tangent à la surface Φ se scinde en quatre cônes rationnels.

Le point A′ est multiple d'ordre $b_1 + m_1 + m_2 + a_2$ pour la surface Φ.

De ce qui précède, on conclut que les courbes C'_0 passent

$$h_\beta(a_1 + b_1) - m_1(\beta - 1) = h_\alpha(a_2 + b_2) - m_2(\alpha - 1)$$

fois par le point A ;

$b_1 h_\beta + m_1$ fois par les points $(1, 1), \ldots, (1, \theta_1 - 1)$;

$b_1 + m_1(\eta_1 + 1)$ fois par le point $(1, \theta_1)$;

b_1 fois par les points $(1, \theta_1 + 1), \ldots, (1, \beta - 1)$;

$a_2 h_\alpha + m_2$ fois par les points $(\alpha, 1), \ldots, (\alpha, \theta_2 - 1)$;

$a_2 + m_2(\eta_2 + 1)$ fois par le point (α, θ_2) ;

a_2 fois par les points $(\alpha, \theta_2 + 1), \ldots, (\alpha, \alpha - 1)$;

$m_1(\eta_1 + 1)$ fois par le point $(1, \theta_1, 1), \ldots, m_1$ fois par le point P_1 ;

$m_2(\eta_2 + 1)$ fois par le point $(\alpha, \theta_2, 1), \ldots, m_2$ fois par le point P_2.

45. Considérons les sections de la surface Φ_1 par les hyperplans ayant en A_1', avec la courbe τ_1, un contact d'ordre $\nu_1 - 1 = m_1 - 1$ et désignons par $\Gamma_0^{(i)}$ ces sections. Il leur correspond sur F des courbes $C_0^{(i)}$ ne passant plus par P_1 et passant précisément b_2 fois par les points $(1, 1), \ldots, (1, \beta - 1)$. Envisageons ensuite les courbes $\Gamma_0^{(i)}$ passant par un point de τ_1 distinct de A_1' ; elles comprennent ces courbes comme partie et les courbes $\Gamma_0^{(i)} - \tau_1$ rencontrent certainement τ_1 en quelques points variables. Les courbes qui leur correspondent sur F passent donc par P_1 avec une certaine multiplicité et comme la multiplicité de ces courbes en A est supérieure à celle des courbes $C_0^{(i)}$, il faut que les courbes en question passent $b_2 - 1$ fois par le point $(1, \beta - 1)$. On en conclut que sur la surface Φ_1, les courbes σ_1 et τ_1 se rencontrent en un point A_{11}'.

On démontre de même que les courbes τ_2 et σ_2 se rencontrent en un point A_{12}'.

Les points A_1', A_{11}', A_{12}' peuvent être simples ou doubles pour la surface Φ_1. Nous supposerons que :

Le point A_1' est équivalent à un ensemble de t courbes rationnelles $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_t$, de degré virtuel -2 ;

Le point A_{11}' est équivalent à un ensemble de u_1 courbes rationnelles $\omega_{11}, \omega_{12}, \ldots, \omega_{1u_1}$ de degré virtuel -2 ;

Le point A_{12}' est équivalent à un ensemble de u_2 courbes rationnelles $\omega_{21}, \omega_{22}, \ldots, \omega_{2u_2}$ de degré virtuel -2.

On aura alors la relation fonctionnelle

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0' + \sigma_1 + \omega_{11} + \omega_{12} + \cdots + \omega_{1u_1} + \tau_1 + \rho_1 + \rho_2 + \cdots + \rho_t + \tau_2 + \omega_{21} + \omega_{22} + \cdots + \omega_{2u_2} + \sigma_2.$$

On en conclut que les courbes σ_1, τ_1, τ_2, σ_2 ont respectivement les degrés virtuels

$$-(b_1+1),\ -(m_1+2),\ -(m_2+2),\ -(a_2+1).$$

Les courbes Γ''_0 satisfont à la relation fonctionnelle

$$\Gamma'_0 \equiv \Gamma''_0 + \rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_t.$$

Les courbes Γ_1 rencontrent la courbe σ_1 en un point variable et donnant lieu à la relation fonctionnelle

$$p\Gamma_0 \equiv p\Gamma_1 + l_{11}\sigma_1 + \Sigma g_{1i}\omega_{1i} + l_{12}\tau_1 + \Sigma g_i\rho_i + l_{22}\tau_2 + \Sigma g_{2i}\omega_{2i} + l_{21}\sigma_2 + \Delta,$$

Δ provenant de la présence d'autres points de diramation.

Considérons les intersections de Γ_1 avec les courbes σ, τ, ω, ρ en commençant par σ_2 ; nous trouvons, en faisant abstraction du facteur l_{21}, qui figure dans tous les seconds membres,

$$g_{2u_2} = a_2 + 1, \ldots, g_{21} = u_2a_2 + 1,\quad l_{22} = (a_2+1)a_2 + 1\ ;$$
$$g_t = [(u_2+1)(m_2+1) + 1]a_2 + m_2 + 1, \ldots,$$
$$g_1 = [(u_2+1)(tm_2+1) + 1]a_2 + tm_2 + 1,$$
$$l_{12} = [(u_2+1)\{(t+1)m_2+1\} + 1]a_2 + (t+1)m_2 + 1, \ldots$$

L'intersection avec σ_1 donnera

$$p = (b_1+1)l_{11} - g_{11}$$

et on en déduira la valeur de p. Le second membre contiendra en facteur l_{21}, nécessairement égal à l'unité et on obtiendra ainsi

$$\begin{aligned} p = {} & [\mathrm{M}(u_1+1)(u_2+1) + (u_1+1)m_1 + (u_2+1)m_2]a_2b_1 \\ & + [(u_1+1)\mathrm{M} + m_2]b_1 + [(u_2+1)\mathrm{M} + m_1]a_2 \\ & + (tm_2+1)[(u_2+1)b_1 + 1]a_2, \end{aligned}$$

en posant

$$\mathrm{M} = (t+1)m_1m_2 + m_1 + m_2.$$

La considération des courbes Γ_α, qui rencontrent σ_2 en un point variable, donne

$$\begin{aligned} p = {} & [\mathrm{M}(u_1+1)(u_2+1) + (u_1+1)m_1 + (u_2+1)m_2]a_2b_1 \\ & + [(u_1+1)\mathrm{M} + m_2]b_1 + [(u_2+1)\mathrm{M} + m_1]a_2 \\ & + (tm_1+1)\ [(u_1+1)a_2 + 1]b_1. \end{aligned}$$

On doit donc avoir

$$(tm_1 + 1)[(u_1 + 1)a_2 + 1]b_1 = (tm_2 + 1)[(u_2 + 1)b_1 + 1]a_2. \quad \text{(I)}$$

On remarquera en outre que p étant premier, a_2 et b_1 doivent être premiers entre eux.

De la relation (I), on déduit que, a_2 doit diviser $tm_1 + 1$ et b_1, $tm_2 + 1$.

46. On peut arriver à d'autres relations entre les nombres introduits en observant que le point A absorbe $p(a_2 + b_1 + m_1 + m_2)$ des intersections de deux courbes C'_0.

Remarquons tout d'abord que l'on a

$$\lambda_1 = m_1[(r_1 - 1)b_1 + 1] + b_1 = m_2[(r_2 - 1)b_2 - \alpha] + b_2, \quad (2)$$

$$\mu_1 = m_1[(r_1 - 1)a_1 - \beta] + a_1 = m_2[(r_2 - 1)a_2 + 1] + a_2. \quad (3)$$

Dans l'intersection de deux courbes C'_0, les points $(1, 1), \ldots, (1, \beta - 1), (1, \theta_1, 1), \ldots, P_1$ absorbent

$$m_1[m_1\{(r_1 - 1)b_1 + 1\} + 2b_1][\beta - 1 - (r_1 - 1)(a_1 + b_1)] + (\beta - 1)b_1^2$$

points et les points $(\alpha, 1), \ldots, (\alpha, \alpha - 1), (\alpha_1\theta_2, 1), \ldots, P_2$,

$$m_2[m_2\{(r_2 - 1)a_2 + 1\} + 2a_1][\alpha - 1 - (r_2 - 1)(a_2 + b_2)] + (\alpha - 1)a_2^2$$

points.

En calculant le nombre de points absorbés en A dans l'intersection de deux courbes C'_0 en tenant compte des relations (1), (2) pour éliminer α et β, on trouve

$$m_1[(r_1 - 1)b_1 + 1](a_1 - a_2) + m_2[(r_2 - 1)a_2 + 1)(b_2 - b_1] + u_2(b_2 - b_1) + b_1(a_1 - a_2) = p(m_1 + m_2),$$

c'est-à-dire

$$(a_1 - a_2)\lambda_1 + (b_2 - b_1)\mu_1 = p(m_1 + m_2). \quad (4)$$

De la relation (4), on peut déduire les valeurs de α, β en remplaçant λ_1 par la seconde des valeurs (2) et μ_1 par la seconde des valeurs (3), ce qui donne α, ou en remplaçant λ_1, μ_1 par les premières des valeurs (2), (3), ce qui donne β. On trouve ainsi

$$(a_1m_2 + a_2m_1)\alpha = [m_2(r_2 - 1) + 1](a_1b_2 - a_2b_1) - (b_1m_2 + b_2m_1),$$

et

$$(b_1 m_2 + b_2 m_1)\beta = [m_1(r_1 - 1) + 1](a_1 b_2 - a_2 b_1) \\ - (a_1 m_2 + a_2 m_1).$$

47. Il semble difficile d'obtenir des relations entre les nombres u_1, u_2, t d'une part et les nombres r_1, r_2, m_1, m_2 d'autre part. Les seconds se déterminent aisément lorsque l'on connait p, α et β ; les premiers devront être déterminés par l'analyse complète des singularités des courbes C'_0, C''_0, ... au point A. Nous nous bornerons à l'énoncé suivant :

En un point de diramation d'un point uni de seconde espèce et de la troisième catégorie, le cône tangent à la surface Φ se scinde en quatre cônes rationnels (σ_1), (τ_1), (τ_2), (σ_2).

Les nombres p *et* α *étant donnés, on détermine le nombre* β *compris entre* 0 *et* p *par la condition*

$$\alpha\beta - 1 \equiv 0, \qquad (\text{mod. } p).$$

Si l'on pose

$$\mathrm{p} = \mathrm{a}_1 + \mathrm{b}_1\beta,\ (\mathrm{a}_1 < \beta)\ ;\ \mathrm{p} = \mathrm{a}_2\alpha + \mathrm{b}_2,\ (\mathrm{b}_2 < \alpha),$$

il existe des nombres r_1, r_2 *tels que*

$$(\mathrm{r}_1 - 1)\mathrm{a}_1 < \beta < \mathrm{r}_1\mathrm{a}_1,\quad (\mathrm{r}_1 - 1)(\mathrm{a}_1 + \mathrm{b}_1) < \beta - 1\ ;$$
$$(\mathrm{r}_2 - 1)\mathrm{b}_2 < \alpha < \mathrm{r}_2\mathrm{b}_2,\quad (\mathrm{r}_2 - 1)(\mathrm{a}_2 + \mathrm{b}_2) < \alpha - 1$$

et deux entiers m_1, m_2, *les plus élevés possible, tels que*

$$\mathrm{m}_1\beta < [\mathrm{m}_1(\mathrm{r}_1 - 1) + 1]\mathrm{a}_1,$$
$$\mathrm{m}_2\alpha < [\mathrm{m}_2(\mathrm{r}_2 - 1) + 1]\mathrm{b}_2.$$

Les courbes C'_0 *ont alors en* A *la multiplicité*

$$\mathrm{m}_1[(\mathrm{r}_1 - 1)(\mathrm{a}_1 + \mathrm{b}_1) - \beta + 1] + \mathrm{a}_1 + \mathrm{b}_1$$
$$= \mathrm{m}_2[(\mathrm{r}_2 - 1)(\mathrm{a}_2 + \mathrm{b}_2) - \alpha + 1] + \mathrm{a}_2 + \mathrm{b}_2.$$

Les cônes (σ_1) ; (τ_1) *ont une génératrice commune et le point infiniment voisin de* A' *sur cette génératrice peut être double pour la surface et équivalent à une suite de courbes rationnelles de degré* — 2,

Les cônes (τ_1), (τ_2) *ont une génératrice commune et le point infiniment voisin de* A' *sur cette génératrice peut être double pour la surface et équivalent à un ensemble de courbes rationnelles de degré* — 2, *Les cônes* (τ_2), (σ_2) *ont en commun une génératrice et le point infiniment voisin de* A′ *sur celle-ci peut être double pour la surface et équivalent à un ensemble de courbes rationnelles de degré* -2.

Les cônes (σ_1) *et* (τ_2), (σ_1) *et* (σ_2), (τ_1) *et* (σ_2) *ne se rencontrent pas en dehors du sommet.*

V. Relations entre les invariants des surfaces F et Φ.

48. Désignons par $|\Lambda|$ le système canonique de la surface Φ. On sait que les courbes canoniques d'une surface rencontrent en $\nu - 2$ points une courbe rationnelle de degré virtuel $-\nu$ tracée sur la surface.

Cela étant, supposons que A′ soit un point de diramation de Φ homologue d'un point uni de seconde espèce et de la troisième catégorie. Il est équivalent à l'ensemble de courbes rationnelles

$$\sigma_1,\ \omega_{11},\ \ldots,\ \omega_{1u_1},\ \tau_1,\ \rho_1,\ \ldots,\ \rho_t,\ \tau_2,\ \omega_{21},\ \ldots,\ \omega_{2u_2},\ \sigma_2.$$

Les courbes σ_1, τ_1, τ_2, σ_2 ont respectivement les degrés virtuels $-(b_1+1)$, $-(m_1+2)$, $-(m_2+2)$, $-(a_2+1)$, les autres ont le degré virtuel -2. Par conséquent, seules les quatre premières courbes sont rencontrées par les courbes canoniques Λ, respectivement en b_1-1, m_1, m_2, a_2-1 points.

Conservons les notations du paragraphe IV. Aux courbes Λ correspondent sur la surface F des courbes L′ passant b_1-1 fois par le point $(1, \beta-1)$, m_1 fois par le point P_1, m_2 fois par le point P_2 et a_2-1 fois par le point $(\alpha, \alpha-1)$. Il en résulte que les courbes L′ passent b_2-1 fois par les points $(1, \beta-1)$, $(1, \beta-2)$, ..., $(1, \theta_1+1)$, $b_1+m_1(\eta_1+1)-1$ par le point $(1, \theta_1)$,

$$m_1[(r_1-1)b_1+1]+b_1-1=\lambda_1-1$$

fois par les points $(1, \theta_1-1)$, $(1, \theta_1-2)$, ..., $(1, 1)$, a_2-1 fois par les points $(\alpha, \alpha-1)$, $(\alpha, \alpha-2)$, ..., (α, θ_2+1), $a_2+m_2(\eta_2+1)-1$ fois par le point (α, θ_2),

$$m_2[(r_2-1)a_2+1]+a_2-1=\mu_1-1$$

fois par les points (α, θ_2-1), (α, θ_2-2), ..., $(\alpha, 1)$.

Par conséquent, les courbes L′ passent $\lambda_1+\mu_1-2$ fois par le point A.

Nous désignerons par H le nombre des points d'intersection de deux courbes L' absorbés en A.

Si le point A' est l'homologue d'un point uni de seconde espèce et de deuxième catégorie, le même raisonnement peut être tenu ; il suffit d'ailleurs de supposer soit $m_1 = 0$, soit $m_2 = 0$.

Si le point A' correspond à un point uni de seconde espèce et de la première catégorie, il suffira de supposer $m_1 = 0$, $m_2 = 0$.

Supposons enfin que le point A' soit l'homologue d'un point uni de première espèce ; il est équivalent à une courbe rationnelle de degré virtuel $-p$, rencontrée en $p-2$ points par les courbes Λ. Les courbes L' passent donc $p-2$ fois par le point A, avec des tangentes variables et on a $H = (p-2)^2$.

Si $p^{(1)}$ est le genre linéaire de la surface F et $\pi^{(1)}$ celui de la surface Φ, en comparant les degrés des systèmes canoniques $|\Lambda|$ de Φ et $|L|$ de F, on a

$$p^{(1)} - 1 = p(\pi^{(1)} - 1) + \Sigma H, \tag{1}$$

la sommation étant étendue à tous les points de diramation de Φ.

49. Soient I l'invariant de Zeuthen-Segre de F, I' celui de Φ. Nous allons établir la relation existant entre ces deux nombres.

Considérons un faisceau de sections hyperplanes Γ_0 de Φ et soit δ le nombre de courbes de ce faisceau qui ont un point double, c'est-à-dire le nombre d'hyperplans d'un faisceau tangents à la surface Φ.

Parmi les courbes Γ_0 du faisceau considéré, se trouve une courbe Γ_0 passant par A', c'est-à-dire la courbe

$$\Gamma'_0 + \sigma_1 + \Sigma\omega_{1i} + \tau_1 + \Sigma\rho_i + \tau_2 + \Sigma\omega_{2i} + \sigma_2.$$

Cette courbe possède

$$K = b_1 + m_1 + m_2 + a_2 + u_1 + t + u_2 + 3$$

points doubles.

Si A'_1 correspond à un point uni de seconde espèce et de seconde catégorie, on calcule K de la même manière et on trouve

$$K = b_1 + m_1 + a_2 + u + t + 2.$$

Dans le cas où A'_1 est l'homologue d'un point uni de première catégorie, on a

$$K = b_1 + a_2 + t + 1.$$

Enfin, si A'_1 correspond à un point uni de première espèce, on a $K = p$.

On en conclut, n étant l'ordre de Φ et π le genre de ses sections hyperplanes Γ_0,

$$I' = \delta + \Sigma K - n - 4\pi, \tag{2}$$

la sommation s'étendant à tous les points de diramation de Φ.

Pour calculer I, on utilisera la méthode de C. Segre pour introduire cet invariant.

Commençons par observer qu'à une courbe Γ_0 possédant un point double correspond sur F une courbe C_0 possédant p points doubles, par conséquent, dans un faisceau de courbes C_0, il y a δ courbes comptant pour $p\delta$ courbes ayant un point double. De plus, pour calculer I, il faut tenir compte des courbes C_0 du faisceau passant par les points unis de l'involution.

Considérons un faisceau de courbes C_0 et un faisceau $|D|$ de courbes D quelconques et soit T la courbe lieu des points où une courbe C_0 du faisceau touche une courbe D. M. Severi [1] a établi que l'on a ($|L|$ étant le système canonique de F)

$$T \equiv L + 2C_0 + 2D$$

et par conséquent, si l'on désigne par C_{0a} l'adjoint à $|C_0|$,

$$T \equiv C_{0a} + C_0 + 2D.$$

On en conclut que la courbe T se comporte, en un point uni A comme une adjointe à C_0 passant par ce point, c'est-à-dire comme une adjointe à une courbe C'_0.

Considérons, sur la courbe T, une branche d'origine A ; soit m le nombre des points d'intersection de cette branche avec les différentes branches d'origine A sur une courbe C'_0. Sur la branche de la courbe T considérée, le point A compte pour $m - 1$ points de contact ordinaires des courbes C_0, D. Faisons la somme des nombres obtenus pour les différentes branches d'origine A de la courbe T. On obtient ainsi le nombre K' exprimant que la courbe C'_0 du faisceau de courbes C_0 équivaut à autant de courbes C_0 ayant un point double. On en conclut que l'invariant de Zeuthen-Segre I de F a pour valeur

[1] F. SEVERI, *Serie, sistemi d'equivalenze et correspondenze algebriche sulle varietà algebriche* (Rome, éd. Cremonese, 1942). Voir p. 199 et suiv.

$$I = p\delta + \Sigma K' - pn - 4p\pi + 4p - 4, \tag{3}$$

la sommation étant étendue à tous les points unis de l'involution. On observera en effet que $|C_0|$ est de degré pn et de genre $p(\pi - 1) + 1$.

Éliminons δ entre les relations (2), (3) ; on obtient

$$I + 4 = p(I' + 4) - \Sigma(K' - pK). \tag{4}$$

50. Connaissant les relations entre les genres linéaires des surfaces F et Φ, on peut trouver la relation que lie les genres arithmétiques de ces deux surfaces en utilisant la formule de Noether

$$p^{(1)} + I = 12p_a + 9.$$

En désignant par p_a le genre arithmétique de F et par p'_a celui de Φ, on trouve

$$12(p_a + 1) = 12p(p'_a + 1) + \Sigma(K' - pK + H). \tag{5}$$

Une involution étant donnée et la structure de chacun de ses points unis et de chacun des points de diramation correspondants étant connue, il sera facile de calculer l'apport $K' - pK + H$ de chacun de ces points dans la formule précédente.

Les relations (1), (4) et (5) auraient pu se déduire de formules très générales dues à M. Severi [1] et donnant les relations entre les invariants de deux surfaces liées par une correspondance algébrique à indices quelconques. Nous avons préféré reprendre le calcul dès le début.

---

[1] F. Severi, *Sulle relazioni che legano i caratteri invarianti di due superficie in corrispondenza algebrica* (Rendiconti. Istituto Lombardo, 1903, pp. 495-511).

BIBLIOGRAPHIE

Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (Actualités scient., N° 270. Paris, Hermann, 1935).

Sur la structure des points unis des homographies cycliques appartenant à une surface algébrique (Mémoires in-8° de l'Acad. roy. de Belgique, 1938).

Sur les surfaces multiples ayant un nombre fini de points de diramation (Annales de l'École Norm. Sup., 1938, pp. 193-222).

Sur les points de diramation des surfaces multiples (Bulletin de la Soc. roy. de Liège, 1940, pp. 54-66, 67-79, 128-137).

Remarques sur les surfaces multiples ayant un nombre fini de points de diramation (Bulletin des Sciences Mathématiques, 1940, pp. 245-256).

Sur les points unis symétriques des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (Revista de la Universidad de Tucuman, 1940, pp. 283-291).

Sur la structure des points unis des homographies cycliques du plan (Mémoires in-8° de l'Acad. roy. de Belgique, 1941).

Recherches sur les points unis isolés des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique, 1948, pp. 206-228, 290-302, 646-650).

Les points unis des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (Annales de l'École Norm. Sup., 1948, pp. 189-210.

Sur les points de diramation isolés des surfaces multiples (Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique, 1949, pp. 15-30, 270-284, 285-292, 532-541, 636-641, 828-833, 834-840).

Sur certaines surfaces multiples n'ayant qu'un nombre fini de points de diramation (Annali di Matematica, 1949, 4e série, t. XXVIII, pp. 89-106).

Détermination des singularités d'une surface multiple en certains points de diramation (Annales de l'École Norm. Sup., 1950, pp. 1-13).

Structure des points de diramation d'une surface multiple d'ordre 29 (Mémoires in-8° de l'Acad. roy. de Belgique, 1950).

Application de la théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (Colloque de Géométrie algébrique de Liège, 1949, Liège, Thone et Paris, Masson, 1950, pp. 177-195).

Sur le calcul des invariants d'une surface multiple ayant un nombre fini de *points de diramation* (Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique, 1950, pp. 170 179).

Étude de certains points de diramation isolés de surfaces multiples (Idem, 1950, pp. 368-382).

Sur un point de diramation heptuple d'une surface multiple (Idem., 1950, pp. 672-677).

Sur les courbes tracées sur une surface multiple (Idem., 1950, pp. 678-682).

Recherches sur les points de diramation des surfaces multiples (Idem., 1951, pp. 111-120).

Sur quelques surfaces algébriques représentant des involutions cycliques (Idem., 1951, pp. 819-825, 826-835, 938-949, 1106-1119).