SEANCE DU 19 MARS 1953

Remarque sur la surface de bigenre un d'Enriques

par LUCIEN GODEAUX
Membre de la Société

On sait qu'au moment où Castelnuovo recherchait les conditions de rationnalité d'une surface, Enriques construisit une surface dépourvue de courbe canonique et possèdant une courbe bicanonique d'ordre zéro. C'est la surface du sixième ordre passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre ($p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$) (1). Plus tard, Enriques a montré que cette surface est l'image d'une involution du second ordre, privée de points unis, appartenant à une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$) (2). Dans cette courte note, nous donnons une nouvelle démonstration de cette propriété.

Nous considérons la variété de Segre, V_3^6, de l'espace S_7, représentant les ternes de points de trois ponctuelles. M. Burniat a montré que la section de cette variété par une hyperquadrique est une surface F de genres un ($p_a = P_4 = 1$) (3). Si l'on part de trois transformations birationnelles involutives

(1) *Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche* (Mem. Soc. Ital. delle Scienze, 1896, pp. 1-81); *Sopra le superficie algebriche di bigenere uno* (Idem., 1906, pp. 327-352). Voir aussi notre exposé sur *Les surfaces algébriques non rationnelles de genres arithmétique et géométrique nuls* (Act. Scient., nº 123, Paris, Hermann, 1934).

(2) *Un' osservazione relativa alle superficie di bigenere uno* (Rend. Accad. Bologna, 1907-1908, pp. 40--45).

(3) P. BURNIAT, *Note sur certaines variétés de Segre* (Bull. Acad. roy. de Belgique, 1938, pp. 690-692).

sur les trois ponctuelles, on obtient, dans S_7, une homographie harmonique ayant comme axes deux espaces à trois dimensions, transformant V_3^6 en soi. Si l'on prend pour déterminer F une hyperquadrique transformée en soi par l'homographie, on obtient une involution du second ordre sur cette surface, privée de points unis et dont l'image est la surface d'Enriques la plus générale.

La méthode suivie ici est sans doute susceptible de généralisation car la section de la variété de Segre $V_n^{n!}$ par une hyperquadrique est une variété à $n-1$ dimensions dont les systèmes canonique et pluri-canoniques sont d'ordre zéro ([4]).

1. Considérons trois ponctuelles (x), (y), (z) et soient respectivement x_0 et x_1, y_0 et y_1, z_0 et z_1 les coordonnées projectives de leurs points. Posons

$$X_{ikl} = x_i y_k z_l, \quad (i,\ k,\ l = 0,\ 1),$$

et interprétons les X comme coordonnées d'un point X d'un espace S_7, linéaire, à sept dimensions. Le lieu du point X donné par les équations précédentes est la variété de Segre V_3^6 représentant les ternes de points des ponctuelles (x), (y), (z).

Les équations de V_3^6 s'écrivent

$$\left\| \begin{matrix} X_{000} & X_{010} & X_{001} & X_{011} \\ X_{100} & X_{110} & X_{101} & X_{111} \end{matrix} \right\| = 0,$$

$$\left\| \begin{matrix} X_{000} & X_{100} & X_{001} & X_{101} \\ X_{010} & X_{110} & X_{011} & X_{111} \end{matrix} \right\| = 0,$$

$$\left\| \begin{matrix} X_{000} & X_{100} & X_{010} & X_{110} \\ X_{001} & X_{101} & X_{011} & X_{111} \end{matrix} \right\| = 0.$$

Chacun de ces groupes d'équations représente une variété V_4^4 contenant V_3^6.

Pour obtenir une représentation point par point de V_3^6 sur

([4]) Voir notre note *Sur les variétés appartenant à la variété de Segre représentant les points de n ponctuelles* (Bull. Soc. roy. Sc. de Liège, 1938, pp. 520-524).

un espace S_3, disposons du facteur de proportionnalité des coordonnées sur les ponctuelles données pour avoir $x_0 = y_0 = z_0$ et interprétons x_0, x_1, y_1, z_1 comme coordonnées d'un espace S_3. A une section hyperplane de V_3^6 correspond une surface cubique φ d'équation

$$\lambda_{000}x_0^3 + x_0^2(\lambda_{100}x_1 + \lambda_{010}y_1 + \lambda_{001}z_1) +$$
$$+ x_0(\lambda_{011}y_1z_1 + \lambda_{101}x_1z_1 + \lambda_{110}x_1y_1) + \lambda_{111}x_1y_1z_1 = 0.$$

Les ∞^7 surfaces φ passent par les côtés du triangle déterminé dans le plan $x_0 = 0$ par les plans $x_1=0$, $y_1=0$, $z_1 = 0$ et doublement par les sommets de ce triangle. Nous désignerons les sommets du triangle par O_1, O_2, O_3.

A la surface F section de V_3^6 par une hyperquadrique Q correspond dans S_3 une surface F', du sixième ordre, passant doublement par les côtés du triangle $O_1\,O_2\,O_3$ et quatre fois par les sommets. Nous allons montrer que F' est de genres un ($p_a = P_4 = 1$).

2. On peut représenter une surface φ soit φ_0 point par point sur un plan σ de telle sorte qu'aux sections planes de φ correspondent des cubiques γ_3 passant par les sommets A_1, A_2, A_3 d'un triangle et par trois points A_4, A_5, A_6 situés le premier sur $A_2\,A_3$, le second sur $A_3\,A_1$, le troisième sur $A_1\,A_2$. Aux points des droites $A_2\,A_3$, $A_3\,A_1$, $A_1\,A_2$ correspondent respectivement sur φ_0 les domaines des points doubles O_1, O_2, O_3; aux domaines des points A_1, A_2, A_3 correspondant respectivement les droites O_2O_3, O_3O_1, O_1O_2.

A la section de φ_0 par une autre surface φ correspond dans σ une courbe du neuvième ordre qui doit comprendre deux fois chacun des côtés du triangle $A_1\,A_2\,A_3$ et par conséquent une cubique δ_3 passant simplement par les points A_4, A_5, A_6.

A la section de φ_0 par la surface F' correspond dans σ une courbe du 18e ordre qui doit comprendre quatre fois chacun des côtés du triangle $A_1\,A_2\,A_3$ et par conséquent une courbe ψ_6 du sixième ordre ayant des points doubles en A_4, A_5, A_6. Cette courbe ψ_6 est de genre sept et correspond à une section hyperplane de la surface F.

La surface F est d'ordre douze; on vérifie d'ailleurs qu'une courbe ψ_6 et une courbe δ_3 se rencontrent en douze points en dehors des points A_4, A_5, A_6.

Le système des sections hyperplanes de F a donc le genre 7, le degré 12 et la dimension 7.

Observons d'autre part, que les adjointes à la surface F' sont les quadriques passant deux fois par les sommets du triangle $O_1O_2O_4$ et simplement par les côtés du triangle. Il existe une seule quadrique satisfaisant à ces conditions; elle est formée du plan $x_0 = 0$ compté deux fois. On en conclut que F' a le genre géométrique $p_g = 1$ et que par conséquent F est bien une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$).

3. Supposons maintenant que nous ayons, sur les ponctuelles (x), (y), (z), les involutions

$$\frac{x'_0}{x_0} = \frac{x'_1}{-x_1}, \quad \frac{y'_0}{y_0} = \frac{y'_1}{-y_1}, \quad \frac{z'_0}{z_0} = \frac{z'_1}{-z_1};$$

il leur correspond, dans S_7, l'homologie harmonique H,

$$\rho X'_{ikl} = (-1)^{i+k+l} X_{ikl},$$

qui a pour axes ponctuels deux espaces linéaires à trois dimensions, à savoir l'espace σ_1 d'équations

$$X_{100} = X_{010} = X_{001} = X_{111} = 0$$

et l'espace σ_2 d'équations

$$X_{000} = X_{011} = X_{101} = X_{110} = 0.$$

Nous poserons, pour abréger,

$$X_{000} = X_0, X_{011} = X_1, X_{101} = X_2, X_{110} = X_3,$$
$$X_{111} = Y_0, X_{100} = Y_1, X_{010} = Y_2, X_{001} = Y_3,$$

de sorte que les équations de H s'écriront

$$\rho X'_i = X_i, \rho Y'_i = -Y_i, \qquad (i = 0, 1, 2, 3).$$

La variété V_3^6 est transformée en elle-même par H et nous supposerons qu'il en est de même de l'hyperquadrique Q, dont l'équation s'écrira

$$\Phi(X_0, X_1, X_2, X_3) + \Psi(Y_0, Y_1, Y_2, Y_3) = 0,$$

où Φ, Ψ sont des formes quadratiques.

La surface F est transformée en elle-même par H et contient donc une involution I du second ordre, dépourvue de points unis.

Il est facile de construire une surface image de cette involution en projetant par exemple la surface F de l'espace σ_2 sur l'espace σ_1.

Des équations de V_3^6, on tire facilement

$$\rho Y_0 = X_1X_2X_3, \rho Y_1 = X_2X_3X_0, \rho Y_2 = X_3X_0X_1, \rho Y_3 = X_0X_1X_2, \quad (1)$$

$$\rho = \sqrt{X_0X_1X_2X_3}\,.$$

On en déduit que dans l'espace σ_1, l'image de l'involution est une surface Φ_1 d'équation.

$$X_0X_1X_2X_3\,\Phi(X_0, X_1, X_2, X_3) + \\ + \Psi(X_1X_2X_3, X_2X_3X_0, X_3X_0X_1, X_0X_1X_2) = 0,$$

c'est-à-dire la surface du sixième ordre d'Enriques, passant doublement par les arêtes du tétraèdre de référence, de bigenre un ($p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$).

Aux sections de F par les hyperplans

$$\lambda_0 Y_0 + \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2 + \lambda_3 Y_3 = 0$$

correspondent sur Φ_1 les sections par les surfaces

$$\lambda_0 X_1X_2X_3 + \lambda_1 X_2X_3X_0 + \lambda_2 X_3X_0X_1 + \lambda_3 X_0X_1X_2 = 0,$$

sections qui forment, comme on sait, l'adjoint au système des sections planes de Φ_1.

En projetant F de σ_1 sur σ_2, on obtiendrait une surface Φ_2 analogue, que l'on peut d'ailleurs déduire de Φ_1 par la transformation birationnelle (1) entre σ_1 et σ_2.

4. On peut aussi considérer la surface F_0 section de V_3^6 par l'hyperquadrique

$$\Sigma\, a_{ik} X_i Y_k = 0, \quad (i,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ 3).$$

Sur F_0, H détermine une involution du second ordre possédant huit points unis, sommets de la pyramide de référence dans l'espace S_7.

En projetent F_0 de σ_2 sur σ_1 par exemple, on obtient une surface du quatrième ordre possédant des points doubles coniques aux sommets du tétraèdre de référence.

Liège, le 6 mars 1953.