Extrait de *Mathésis*, LXI, 1952.

SUR QUELQUES TRANSFORMÉES RATIONNELLES D'UNE CONIQUE,

par M. Lucien Godeaux,
Professeur à l'Université de Liège.

Nous considérons une conique inscrite dans le triangle de référence et nous remplaçons les coordonnées courantes x_1, x_2, x_3 par x_1^p, x_2^p, x_3^p ; on obtient ainsi une transformée rationnelle de la conique qui présente des particularités intéressantes.

1. L'équation d'une conique inscrite dans le triangle de référence peut, par un choix convenable du point unitaire, s'écrire

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3 - 2x_3x_1 - 2x_1x_2 = 0.$$

Elle peut aussi se mettre sous la forme

$$(-x_1 + x_2 + x_3)^2 - 4x_2x_3 = 0.$$

Sous cette forme, on voit qu'elle est l'enveloppe de la droite

$$\lambda^2x_2 + \lambda(-x_1 + x_2 + x_3) + x_3 = 0.$$

Nous allons remplacer les coordonnées courantes x_1, x_2, x_3 respectivement par x_1^p, x_2^p, x_3^p, p étant un entier positif. Nous obtiendrons ainsi la courbe d'ordre $2p$,

$$\varphi_p \equiv x_1^{2p} + x_2^{2p} + x_3^{2p} - 2x_2^px_3^p - 2x_3^px_1^p - 2x_1^px_2^p = 0.$$

Nous étudierons en premier lieu les cas $p = 2$, $p = 3$ puis passerons au cas où p est quelconque.

2. L'équation de la courbe $\varphi_2 = 0$ peut s'écrire sous la forme

$$(-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 - 4x_2^2x_3^2 = 0$$

et par conséquent cette courbe se compose des quatre droites

$$\left.\begin{array}{ll} x_1 + x_2 + x_3 = 0, & -x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, & x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Les coniques

$$\lambda^2x_2^2 + \lambda(-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + x_3^2 = 0 \qquad (2)$$

sont donc inscrites dans le quadrilatère formé par ces quatre droites. Ces coniques sont autopolaires par rapport au triangle de référence.

Inversement, considérons un quadrilatère et prenons son triangle diagonal comme triangle de référence. En choisissant un des côtés du quadrilatère comme droite unitaire, on peut écrire les équations des quatre côtés sous la forme (1). L'équation des coniques inscrites a donc la forme (2) et par conséquent : *Les coniques inscrites dans un quadrilatère sont autopolaires par rapport au triangle diagonal de ce quadrilatère.*

3. Faisons $p = 3$ et considérons la sextique C d'équation

$$\varphi_3 \equiv x_1^6 + x_2^6 + x_3^6 - 2x_2^3x_3^3 - 2x_3^3x_1^3 - 2x_1^3x_2^3 = 0.$$

Cette courbe rencontre les côtés du triangle de référence chacun en trois points. La droite $x_1 = 0$ par exemple est rencontrée par C aux points

$$(0,\ 1,\ 1),\ (0,\ 1,\ \varepsilon),\quad (0,\ 1,\ \varepsilon^2),$$

où ε est une racine cubique primitive de l'unité.

Envisageons l'un quelconque $(0,\ 1,\ a)$ de ces points. Les dérivées partielles de φ_3 sont nulles en ce point et un calcul simple montre que les tangentes à la courbe sont données par

$$(x_2 - ax_3)^2 = 0\ ;$$

le point est donc de rebroussement.

Pour obtenir les points d'intersection de la courbe avec la tangente $x_2 - ax_3 = 0$, projetons cette intersection du point $(0,\ 1,\ 0)$ sur la droite $x_2 = 0$. On obtient

$$x_1^3(x_1^3 - 4x_3^3) = 0$$

et par conséquent, au point $(0,\ 1,\ a)$, la tangente de rebroussement rencontre la courbe en trois points confondus ; c'est donc un point de rebroussement ordinaire.

La courbe C *du sixième ordre possède neuf points de rebroussement ordinaires, situés trois par trois sur les côtés d'un triangle ; les tangentes de rebroussement aux points situés sur un des côtés du triangle passent par le sommet opposé.*

Observons que les courbes du faisceau

$$\varphi_3 + \mu(x_1x_2x_3)^2 = 0$$

ont des points doubles aux points de rebroussement de C. Les tangentes à ces courbes au point $(0,\ 1,\ a)$ par exemple sont

$$9(x_2 - ax_3)^2 + \mu a^2x_1^2 = 0.$$

Le faisceau considéré est donc un *faisceau de* HALPHEN.

4. L'équation de la courbe C pouvant s'écrire sous la forme

$$(-x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)^2 - 4x_2^3x_3^3 = 0,$$

on voit que cette courbe est l'enveloppe de la famille de cubiques planes

$$\lambda^2 x_2^3 + \lambda(-x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + x_3^3 = 0,$$

famille dépourvue de points-base.

La courbe C est également l'enveloppe de la famille de cubiques

$$\lambda^2 x_2^2 x_3 + \lambda(-x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + x_2 x_3^2 = 0,$$

qui admet pour points-base les points de rebroussement de la courbe C situés sur les droites $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.

Enfin, la courbe C est encore l'enveloppe de deux autres familles de cubiques

$$\lambda^2 x_3^2 x_1 + \lambda(x_1^3 - x_2^3 + x_3^3) + x_3 x_1^2 = 0,$$

$$\lambda^2 x_1^2 x_2 + \lambda(x_1^3 + x_2^3 - x_3^3) + x_1 x_2^2 = 0.$$

Les courbes de la première famille passent par les points de rebroussement de la courbe C situés sur les droites $x_3 = 0$, $x_1 = 0$ et les courbes de la seconde famille par ceux de ces points situés sur les droites $x_1 = 0$, $x_2 = 0$.

5. Supposons maintenant p pair et posons $p = 2\nu$.

La courbe

$$\varphi_{2\nu} = x_1^{4\nu} + x_2^{4\nu} + x_3^{4\nu} - 2x_2^{2\nu}x_3^{2\nu} - 2x_3^{2\nu}x_1^{2\nu} - 2x_1^{2\nu}x_2^{2\nu} = 0$$

se décompose en quatre courbes d'ordre ν

$$x_1^\nu \pm x_2^\nu \pm x_3^\nu = 0,$$

les signes $\pm$ étant indépendants.

Les courbes de la famille

$$\lambda^2 x_2^{2\nu} + \lambda(-x_1^{2\nu} + x_2^{2\nu} + x_3^{2\nu}) + x_3^{2\nu} = 0$$

ont pour enveloppe les quatre courbes précédentes.

Il en est de même des courbes des familles

$$\lambda^2 x_2^{2\nu-i} x_3^i + \lambda(-x_1^{2\nu} + x_2^{2\nu} + x_3^{2\nu}) + x_2^i x_3^{2\nu-i} = 0,$$

pour $i = 1, 2, \ldots, \nu - 1$. En intervertissant les rôles des coordonnées

x_1, x_2, x_3, on trouve encore $2\nu - 2$ autres familles de courbes ayant les quatre courbes en question comme enveloppes.

6. Considérons le cas où p est impair et posons $p = 2\nu + 1$. La courbe C, d'équation

$$\varphi_{2\nu+1} \equiv x_1^{4\nu+2} + x_2^{4\nu+2} + x_3^{4\nu+2} - 2(x_2x_3)^{2\nu+1} - 2(x_3x_1)^{2\nu+1} - \\ 2(x_1x_2)^{2\nu+1} = 0,$$

coupe chacun des côtés du triangle de référence en $2\nu + 1$ points. En raisonnant comme dans le cas $\nu = 1$, on voit que ces points sont des points doubles de rebroussement.

Soit $(0, 1, a)$ un de ces points, a étant une racine primitive d'ordre $2\nu + 1$ de l'unité. La tangente de rebroussement a pour équation

$$x_2 - a^{2\nu}x_3 = 0.$$

En projetant sur la droite $x_2 = 0$ les intersections de cette droite avec la courbe, on trouve

$$x_1^{2\nu+1}\left(x_1^{2\nu+1} - 2x_3^{2\nu+1}\right) = 0.$$

On en conclut que la tangente en un point de rebroussement de la courbe C rencontre la courbe en $2\nu + 1$ points confondus au point considéré.

La courbe C, *d'ordre* $4\nu + 2$, *possède* $3(2\nu + 1)$ *points de rebroussement situés* $2\nu + 1$ *par* $2\nu + 1$ *sur les côtés d'un triangle. La tangente en un de ces points rencontre la courbe en* $2\nu + 1$ *points confondus avec le point considéré et passe par le sommet du triangle opposé au côté auquel le point appartient.*

La courbe C est l'enveloppe de plusieurs familles de courbes d'ordre $2\nu + 1$, à savoir :

$$\lambda^2 x_2^{2\nu+1} + \lambda\left(- x_1^{2\nu+1} + x_2^{2\nu+1} + x_3^{2\nu+1}\right) + x_3^{2\nu+1} = 0,$$

$$\lambda^2 x_2^{2\nu+1-i}x_3^i + \lambda\left(- x_1^{2\nu+1} + x_2^{2\nu+1} + x_3^{2\nu+1}\right) + x_2^i x_3^{2\nu+1-i} = 0,$$

$$\lambda^2 x_3^{2\nu+1-i}x_1^i + \lambda\left(x_1^{2\nu+1} - x_2^{2\nu+1} + x_3^{2\nu+1}\right) + x_3^i x_1^{2\nu+1-i} = 0,$$

$$\lambda^2 x_1^{2\nu+1-i}x_2^i + \lambda\left(x_1^{2\nu+1} + x_2^{2\nu+1} - x_3^{2\nu+1}\right) + x_1^i x_2^{2\nu+1-i} = 0,$$

$$(i = 1, 2, \ldots, \nu).$$

7. Pour que $4\nu + 2$ soit multiple de 3, il faut que ν soit de la forme $3\eta + 1$. Considérons, dans ces conditions, le faisceau de courbes

$$\varphi_{6\eta+3} + \lambda(x_1x_2x_3)^{4\eta+2} = 0.$$

Toutes les courbes de ce faisceau ont des points doubles aux points de rebroussement de la courbe C.

Reprenons un de ces points (0, 1, a) et la tangente à la courbe C,

$$x_2 - a^{6\eta+2}x_3 = 0,$$

en ce point. Cette droite rencontre la courbe

$$(x_1x_2x_3)^{4\eta+2} = 0$$

en $4\eta + 2$ points confondus au point considéré. Par conséquent, toutes les courbes du faisceau ont, pour $\eta > 0$, des points de rebroussement aux points de rebroussement de la courbe C et rencontrent les tangentes de rebroussement en $4\eta + 2$ points confondus au point de contact [1].

— 24 —

[illegible]

Toutes les courbes de ce faisceau ont [illegible] de rebroussement de la courbe [illegible]

Repérons un de ces points [illegible]

[illegible]

en ce point. Cette droite rencontre la courbe

[illegible]

en $4\eta + 2$ points confondus au point considéré. Par conséquent, toutes les courbes du faisceau ont, pour [illegible] aux points de rebroussement de la courbe [illegible] gentes de rebroussement en $4\eta + 2$ points confondus au point de contact (¹).