EXTRAIT de *Mathesis*, LIX, 1950.

SUR LA JACOBIENNE D'UN RÉSEAU DE COURBES ALGÉBRIQUES,

par M. LUCIEN GODEAUX,
Professeur à l'Université de Liège.

Nous nous proposons de déterminer dans quelles conditions la jacobienne d'un réseau de courbes algébriques possède un point double (en dehors des points-base du réseau).

1. Considérons un réseau $|C|$ de courbes algébriques, irréductible, c'est-à-dire dont la courbe générale est irréductible. Soient

$$\lambda_1 f_1(x_1, x_2, x_3) + \lambda_2 f_2(x_1, x_2, x_3) + \lambda_3 f_3(x_1, x_2, x_3) = 0$$

son équation et n l'ordre de ses courbes.

La jacobienne J du réseau $|C|$ possède les deux propriétés suivantes :

a) les ∞^1 courbes de $|C|$ passant par un point P de J ont même tangente en ce point ;

b) il existe une courbe de $|C|$ ayant un point double en un point quelconque de J.

Ces deux propriétés sont équivalentes et l'une d'elles peut être prise comme définition de la jacobienne [1].

Il est toujours possible de supposer que le point O_3 (0, 0, 1) appartient à la jacobienne J et on peut alors poser

$$\left.\begin{aligned} f_1 &\equiv x_3^{n-1}\alpha_1(x_1, x_2) + x_3^{n-2}\alpha_2(x_1, x_2) + \dots, \\ f_2 &\equiv x_3^{n-1}\beta_1(x_1, x_2) + x_3^{n-2}\beta_2(x_1, x_2) + \dots, \\ f_3 &\equiv x_3^{n}\gamma_0 + x_3^{n-1}\gamma_1(x_1, x_2) + \dots, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

où α_i, β_i, γ_i sont des polynomes entiers, rationnels et homogènes en x_1, x_2, dont le degré est indiqué par l'indice.

Si les courbes C passant par O_3 ont même tangente en ce point, on a $\alpha_1 \equiv \beta_1$ et la courbe $f_1 - f_2 = 0$ a un point double en O_3.

S'il existe d'autre part une courbe C ayant un point double en O_3, on peut supposer que c'est $f_1 = 0$, c'est-à-dire que α_1 est identiquement nul. Les courbes de $|C|$ passant par O_3 sont données par $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0$ et ces courbes ont $\beta_1 = 0$ comme tangente en ce point.

Nous supposerons dans la suite $\alpha_1 \equiv 0$.

---

[1] Voir notre *Introduction à la Géométrie supérieure* (Liège, Sciences et Lettres, 1946), p. 51.

2. Écrivons l'équation de la courbe J en partant des équations (1) où $\alpha_1 \equiv 0$. On a

$$\frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} = 0.$$

Écrivons cette équation sous la forme

$$x_3^{3n-4}\varphi_1(x_1, x_2) + x_3^{3n-5}\varphi_2(x_1, x_2) + \ldots = 0.$$

On a

$$\varphi_1 \equiv n\gamma_0\left(\frac{\partial\alpha_2}{\partial x_1}\frac{\partial\beta_1}{\partial x_2} - \frac{\partial\alpha_2}{\partial x_2}\frac{\partial\beta_1}{\partial x_1}\right),$$

$$\varphi_2 \equiv -n\alpha_2\frac{\partial(\beta_1, \gamma_1)}{\partial(x_1, x_2)} + n\gamma_0\frac{\partial(\alpha_2, \beta_2)}{\partial(x_1, x_2)} + n\gamma_0\frac{\partial(\alpha_3, \beta_1)}{\partial(x_1, x_2)}.$$

Dans le cas général, la courbe J a donc au point O_3 la tangente

$$\frac{\partial\alpha_2}{\partial x_1}\frac{\partial\beta_1}{\partial x_2} - \frac{\partial\alpha_2}{\partial x_2}\frac{\partial\beta_1}{\partial x_1} = 0. \tag{2}$$

Pour que le point O_3 soit double pour la courbe J, il faut que l'équation précédente soit vérifiée identiquement. Cela peut se présenter dans trois cas :

1) β_1 est identiquement nul ;
2) α_2 est identiquement nul ;
3) α_2 se réduit à β_1^2.

3. Dans le premier cas, les courbes de $|C|$ passant par O_3 ont toutes un point double en ce point. La courbe J possède un point double en O_3 et les tangentes à cette courbe en ce point sont données par

$$\frac{\partial\alpha_2}{\partial x_1}\frac{\partial\beta_2}{\partial x_2} - \frac{\partial\alpha_2}{\partial x_2}\frac{\partial\beta_2}{\partial x_1} = 0.$$

Dans le faisceau de rayons de sommet O_3, ces tangentes forment la jacobienne de l'involution

$$\lambda_1\alpha_2(x_1, x_2) + \lambda_2\beta_2(x_1, x_2) = 0,$$

Dans le second cas, la courbe $f_1 = 0$ a un point triple en O_3, mais les courbes C passant par ce point y ont en général un point simple et la tangente $\beta_1 = 0$.

La courbe J a un point double en O_3, les tangentes étant

$$\frac{\partial\alpha_3}{\partial x_1}\frac{\partial\beta_1}{\partial x_2}-\frac{\partial\alpha_3}{\partial x_2}\frac{\partial\beta_1}{\partial x_1}=0.$$

4. Envisageons le troisième cas. Posons

$$\alpha_2 \equiv a_0x_1^2+2a_1x_1x_2+a_2x^2,$$
$$\beta_1 \equiv b_0x_0+b_1x_1.$$

L'équation (2) s'écrit

$$b_1(a_0x_1+a_1x_2)-b_0(a_1x_1+a_2x_2)=0.$$

Pour que cette équation soit vérifiée identiquement, on doit avoir

$$a_0b_1-b_0a_1=0, \qquad a_1b_1-b_0a_2=0,$$

ce qui entraîne

$$a_0a_2-a_1^2=0$$

et

$$\alpha_2(x_1, x_2) \equiv \rho[\beta_1(x_1, x_2)]^2.$$

On peut d'ailleurs supposer $\rho=1$ en multipliant la seconde des équations (1) par un facteur convenable.

La courbe $f_1=0$ possède en O_3 un point de rebroussement, la tangente de rebroussement coïncidant avec la tangente à la courbe $f_2=0$.

Le point O_3 est double pour la courbe J, les tangentes à cette courbe en ce point étant données par

$$-n\beta_1^2\frac{\partial(\beta_1, \gamma_1)}{\partial(x_1,x_2)}+2n\gamma_0\beta_1\frac{\partial(\beta_1, \beta_2)}{\partial(x_1, x_2)}+n\gamma_0\frac{\partial(\alpha_3, \beta_1)}{\partial(x_1, x_2)}=0.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que la jacobienne d'un réseau de courbes irréductible ait un point double en un point distinct des points-base est que, parmi les courbes du réseau passant par ce point, toutes y aient un point double, ou que l'une d'elles ait un point triple, ou que l'une d'elles ait un point de rebroussement, la tangente de rebroussement étant tangente aux autres courbes.