

SUR LA SURFACE CUBIQUE TOUCHANT UN PLAN LE LONG D'UNE DROITE,

par Lucien GODEAUX,
Professeur à l'Université de Liège.

Si une surface cubique non réglée touche un plan α le long d'une droite a , on sait que cette surface possède soit deux points doubles coniques sur la droite a , soit un point double biplanaire tel que la droite a soit la droite commune aux plans tangents en ce point à la surface. On peut démontrer ce théorème en utilisant la représentation plane de la surface cubique ⁽¹⁾. Nous en exposons ici une démonstration élémentaire, différente.

1. Commençons par une remarque. Soient F une surface cubique non réglée et a une de ses droites ne passant par aucun point double éventuel de la surface. La quadrique polaire Q d'un point quelconque P coupe F suivant une courbe telle que les plans tangents à F aux points de cette courbe passent par P .

Le plan aP coupe F suivant une conique γ rencontrant a en deux points A_1, A_2 en général distincts. En ces points, F a le même plan tangent aP ; la quadrique Q passe par ces points et coupe encore γ en deux points où les tangentes à cette courbe passent par P .

Parmi les plans passant par a , il y en a en général deux qui coupent encore F suivant des coniques tangentes à la droite a . Prenons P dans un de ces plans et soit A le point de contact de a et de la conique γ . La quadrique Q touche γ au point A et coupe encore cette conique en deux points en lesquels les tangentes à cette courbe passent par P .

2. Cette remarque faite, supposons que F contienne une droite a le long de laquelle elle admet un plan tangent fixe α .

La quadrique polaire Q d'un point P n'appartenant pas à α coupe a en deux points distincts A_1, A_2 ou touche cette droite en un point A .

Examinons le premier cas. Au point A_1 , le plan tangent à la surface F doit être d'une part le plan α et d'autre part, le plan aP ; le plan tangent en A_1 à F est donc indéterminé et A_1 est double au moins pour la surface.

⁽¹⁾ Voir par exemple notre *Introduction à la Géométrie supérieure* (Liège, Thone, 1947), p. 133, n° 189.

De même, le point A_2 est double pour la surface F .

Les points A_1, A_2 sont en général doubles coniques pour F . Plaçons-nous en effet dans cette hypothèse et soit B un point de a distinct de A_1, A_2 . Les plans passant par a coupent encore F suivant des coniques passant par A_1, A_2 . Le plan tangent à F en B coupe donc F suivant la droite a et une conique passant par A_1, A_2 ; d'autre part, cette cubique dégénérée doit avoir un point double en B , donc la conique est formée de la droite a et d'une autre droite. Il en résulte que le plan tangent à F en B reste fixe lorsque B varie sur a .

3. Envisageons le second cas. La quadrique polaire Q d'un point P n'appartenant pas à α touche a en un point A . En raisonnant comme plus haut, on voit que A est double pour la surface F .

Le plan aP coupe F suivant la droite a et une conique γ passant par A . La quadrique Q ne peut rencontrer γ qu'en deux points en dehors de A , puisqu'on ne peut mener que deux tangentes à γ par P . Il en résulte que la conique γ touche Q et par conséquent a en A .

Les plans passant par a coupent donc F suivant a et une conique γ touchant a en A , c'est-à-dire suivant une cubique (dégénérée) ayant un point de rebroussement en A . Il s'ensuit que A est double biplanaire pour F , les plans tangents à cette surface en ce point passant par a .

Inversement, si A est double biplanaire pour F et si les plans tangents à F en A se coupent suivant une droite a appartenant à F , les plans passant par a coupent F suivant a et une conique γ touchant a en A . Le plan tangent à F en un point B de a distinct de A , doit donc couper F suivant la droite a comptée deux fois et suivant une autre droite qui, avec a , forme une conique γ . Ce plan tangent reste donc fixe lorsque B varie sur a .

En résumé,

Si une surface cubique F , non réglée, touche un plan fixe le long d'une droite a , cette surface possède :

deux points doubles coniques sur a , ou

un point double biplanaire en lequel les plans tangents à la surface se coupent suivant la droite a .

Et réciproquement.
