Sur certaines surfaces aux points desquelles sont associées des quadriques dégénérées

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de la Société

(SECONDE NOTE)

Dans la première note (¹), nous avons montré que les surfaces dont les quadriques Φ_1 dégénérent en deux plans sont celles dont les quadriques de Lie n'ont que deux ou trois points caractéristiques, ou des surfaces caractérisées par la relation $\theta^2 - 4\alpha\beta = 0$. Nous nous occuperons ici de ces dernières.

1. Soit (x) une surface non réglée rapportée à ses asymptotiques u, v. Désignons par U, V les points qui représentent sur l'hyperquadrique Q de Klein de l'espace S_5, les tangentes aux asymptotiques xx^{10}, xx^{01} en un point x de (x). Les points U, V sont consécutifs dans une suite de Laplace

$$\ldots, U_n, \ldots, U_1, U, V, V_1, \ldots, V_n, \ldots \qquad (L)$$

dont chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u. Cette suite est autopolaire par rapport à Q (²).

Nous supposerons

$$\alpha \neq 0, \ \beta \neq 0, \ \theta \neq 0, \ \theta^2 - 4\,\alpha\beta = 0.$$

Dans ces conditions, les quadriques de Lie Φ de la surface (x) ont quatre points caractéristiques, sommets du tétraèdre de Demoulin, et les quadriques Φ_1 dégénèrent en deux faces

(¹) La première note est parue dans ce *Bulletin*, 1953, pp. 139-142.

(²) Pour les propriétés utilisées et les notations, nous renvoyons à notre exposé sur *La théorie des surfaces et l'espace réglé* (Actualités scientifiques, nº 138, Paris, Hermann, 1934).

de ce tétraèdre ayant en commun une arête n'appartenant pas à la quadrique Φ.

Dans le cas général, les coniques sections de Q par les plans $U_1U_2U_3$, $V_1V_2V_3$ représentent les génératrices des deux modes de la quadrique Φ_1. Actuellement, si nous supposons que les points U_3, V_3 existent, ces deux plans doivent se rencontrer en un point G, image de la droite commune aux deux plans formant Φ_1 et l'hyperplan tangent à Q en G contient les deux plans [1].

Nous avons

$$U_3 + H_2\, U_2 + \beta_1\, U_1 + a\theta U + 2a\,(\alpha V + KV_1 + V_2) = 0,$$
$$V_3 + K_2\, V_2 + \alpha_1\, V_1 + b\theta V + 2b\,(\beta U + HU_1 + U_2) = 0,$$

où l'on a posé

$$H = (\log bh_1)^{01},\ K = (\log ak_1)^{10},$$
$$H_2 = (\log b^3\, h_1^2\, h_2)^{01},\ K_2 = (\log a^3\, k_1^2\, k_2)^{10}.$$

Multiplions les deux membres de la première relation par $b\theta$, ceux de la seconde par $2a\alpha$ et soustrayons les membre à membre. En tenant compte de $\theta^2 - 4\alpha\beta = 0$, on obtient

$$b\theta U_3 + [b\theta H_2 - 4ab\alpha]\, U_2 + [b\theta\beta_1 - 4ab\,\alpha H]\, U_1 =$$
$$2a\alpha V_3 + [2a\alpha K_2 - 2ab\theta]\, V_2 + [2a\,\alpha\alpha_1 - 2ab\,\theta K]\, V_1.$$

Ceci montre bien que les plans $U_1U_2U_3$ et $V_1V_2V_3$ se rencontrent en un point G.

2. En partant de

$$\theta = \frac{1}{2a}\beta\,(\log b^2\,\beta)^{01},\ \beta^{10} = -2\,h_1\,H,$$

on obtient

$$\theta^{10} = 4b\beta - \frac{h_1}{a}\beta_1 - \theta\,(\log a)^{10}.$$

---

[1] Voir par exemple notre *Géométrie algébrique*, tome I, p. 222 (Liège, Sciences et Lettres et Paris, Masson ,1948).

Dérivons alors la relation $\theta^2 - 4\alpha\beta = 0$ par rapport à u, en tenant compte de l'identité

$$a\alpha^{10} + 2\,\alpha a^{10} = b\beta^{01} + 2\beta h^{01};$$

on obtient

$$2\beta_1 = \mathrm{H}\,(\log b^2\,\beta)^{01},$$

ce qui peut s'écrire

$$\beta\beta_1 = a\mathrm{H}\theta.$$

On obtient de même

$$2\alpha_1 = \mathrm{K}(\log a^2\alpha)^{10}, \quad \alpha\alpha_1 = b\mathrm{K}\theta.$$

On en déduit

$$b\theta\beta_1 - 2\,ab\alpha\mathrm{H} = 0, \qquad 2\,a\alpha\alpha_1 - 2\,ab\theta\mathrm{K} = 0$$

et on a donc

$$b\theta\mathrm{U}_3 + [b\theta\mathrm{H}_2 - 2abv]\,\mathrm{U}_2 = 2a\alpha\mathrm{V}_3 + [2a\alpha\mathrm{K}_2 - 2ab\theta]\,\mathrm{V}_2.$$

Le point G appartient donc aux droites $\mathrm{U}_2\mathrm{U}_3$ et $\mathrm{V}_2\mathrm{V}_3$. On peut prendre

$$\mathrm{G} = 2\,\mathrm{V}_3 + [2\mathrm{K}_2 - (\log a^2\alpha)^{10}]\,\mathrm{V}_2.$$

Les droites $\mathrm{U}_2\mathrm{U}_3$, $\mathrm{V}_2\mathrm{V}_3$ appartenant à l'hyperplan tangent à Q en G, touchent Q en G, donc G coïncide soit avec U_2 ou U_3, soit avec V_2 ou V_3.

3. Supposons que le point G coïncide avec le point V_3.

En représentant par $\Omega\,(p,\,q) = 0$ la polarité par rapport à Q, on a

$$\Omega\,(\mathrm{G},\,\mathrm{V}_3) = 0,\ \Omega\,(\mathrm{G},\,\mathrm{V}_2) = 0$$

et par conséquent

$$\Omega\,(\mathrm{V}_2,\,\mathrm{V}_3) = -\frac{\varphi}{2}\,\Omega\,(\mathrm{V}_2,\,\mathrm{V}_2),$$

$$\Omega\,(\mathrm{V}_3,\,\mathrm{V}_3) = \frac{\varphi^2}{4}\,\Omega\,(\mathrm{V}_2,\,\mathrm{V}_2),$$

en posant

$$\varphi = 2\mathrm{K}_2 - (\log a^2\,\alpha)^{10}.$$

De même, le point U_2 et la droite $U_2U_2^{01}$ appartiennent à Q.

Considérons, sur la surface (x), une courbe v et les tangentes aux courbes u aux différents points de cette courbe. Nous obtenons ainsi une réglée gauche R_v que nous appellerons *réglée gauche asymptotique associée à une courbe v*. Le surface R_v a pour image une courbe v tracée sur la surface (U). L'hyperplan osculateur à une telle courbe en un point V est l'espace $UU_1U_2U_2^{01}U_2^{02}$, dont le pôle par rapport à Q est le point V_2. Lorsque v varie, V_2 reste fixe et par conséquent la réglée gauche asymptotique R_v appartient à un complexe linéaire. Celui-ci est spécial, puisque V_2 appartient à Q. Appelons g_v la droite représentée par le point V_2. Puisque les tangentes $V_2V_2^{10}$ à la courbe (V_2) appartiennent à Q, le lieu de g_v est une développable.

On écrira à des conclusions analogues pour les réglées gauches asymptotiques associées aux courbes u de la surface (x). Il en résulte que la surface (x) possède cette propriété : *Les réglées gauches asymptotiques des deux modes appartiennent à des complexes linéaires spéciaux dont les axes engendrent des développables.*

5. Supposons maintenant que la suite de Laplace L s'arrête aux points U_1, V_1 (en présentant le cas de Laplace). On a $h_1 = 0$, $k_1 = 0$.

Nous partirons des relations

$$V_1^{20} + V_1^{10} (\log a)^{10} + \alpha V_1 + b\theta V + 2b (\beta U + U_1^{01}) = 0,$$
$$U_1^{02} + U_1^{01} (\log b)^{01} + \beta U_1 + a\theta U + 2a (\alpha V + V_1^{10}) = 0.$$

En opérant comme plus haut, on en déduit

$$a\theta V_1^{20} + [a\theta (\log a)^{10} - 4ab\beta]\, V_1^{10} + a\theta\alpha V_1 =$$
$$= 2b\beta U_1^{02} + [2b\beta (\log b)^{01} - 2ab\theta]\, U_1^{01} + 2b\beta^2 U_1.$$

Les plans $V_1V_1^{10}\, V_1^{20}$ et $U_1U_1^{01}U_1^{02}$ ont donc en commun un point G.

Le point U_1 ne dépend que de v et le point V_1 ne dépend que de u. Les courbes (U_1), (V_1) ne peuvent appartenir à Q.

Les asymptotiques de la surface (x) appartiennent à des complexes linéaires. Ces surfaces ont été étudiées par C. Segre et par M. Terracini [1].

6. Il nous reste à examiner les cas $k_2 = 0$, $k_1 = 0$ et $k_2 = 0$, $k_1 = 0$. Nous considérerons, pour fixer les idées, le second. Nous avons alors

$$V_2^{10} + V_2 (\log a^2 k_1)^{10} + \alpha_1 V_1 + b\theta V + 2b [\beta U + U_1^{01}] = 0,$$
$$U_1^{02} + U_1^{01} (\log b)^{01} + \beta U_1 + a\theta U + 2a [\alpha V + K V_1 + V_2] = 0.$$

On en déduit, comme plus haut,

$$2a\alpha V_2^{10} + [2a\alpha (\log a^2 k_1)^{10} - 2ab\theta] V_2 + V_1 [2a\alpha\alpha_1 - 2abK\theta]$$
$$= b\theta U_1^{02} + [b\theta (\log b)^{01} - 4\, ab\alpha] U_1^{01} + b\theta\beta_1 U_1.$$

On a d'ailleurs

$$2a\alpha\alpha_1 - 2abK\theta = 0$$

et la droite $V_2 V_2^{10}$, le plan $U_1 U_1^{01} U_1^{02}$, ont en commun un point G.

Comme tantôt, on voit que l'on a

$$\Omega (V_2, V_2) = 0, \quad \Omega (V_2, V_2^{10}) = 0, \quad \Omega (V_2^{10}, V_2^{10}) = 0.$$

La surface (x) possède les propriétés suivantes :

1°) *Les règlées gauches asymptotiques relatives aux courbes v appartiennent à des complexes linéaires spéciaux dont les axes engendrent une développable.*

2°) *Les asymptotiques u appartiennent à des complexes linéaires.*

Il resterait cependant à démontrer l'existence de ces surfaces en en construisant un exemple.

Liège, le 17 mai 1953.

---

(1) Voir l'appendice au tome II de la *Geometria proiettiva differenziale* de MM. Fubini et Cech (Bologne, 1927) écrit par M. Terracini.