Sur les congruences W dont une des nappes focales est une surface ayant ses asymptotiques des deux familles dans des complexes linéaires

par Lucien GODEAUX
Membre de la Société

Dans une étude très fouillée, parue sous le même titre dans ce Bulletin (1), M. Rozet et Mme Legrain-Pissart ont considéré les congruences W dont une nappe focale satisfait aux conditions du titre, la seconde nappe focale ayant en général ses réglées asymptotiques gauches dans des complexes linéaires. Nous voudrions indiquer rapidement dans cette note comment on peut attaquer ce problème au moyen des méthodes que nous avons utilisées plusieurs fois dans l'étude des congruences W. (2)

1. — Soit (x) une surface rapportée à ses asymptotiques u, v. Les coordonnées normales de Wilczynski du point x satisfont au système d'équations aux dérivées partielles complètement intégrable

$$x^{20} + 2bx^{01} + c_1x = 0\,,$$
$$x^{02} + 2ax^{10} + c_2x = 0\,,$$

---

(1) 1954, pp. 280-288.

(2) *Sur quelques familles de quadriques associées aux points d'une surface* (Annales de la Société Polonaise de Mathématiques, 1928, pp. 213-226); *Note sur les congruences W* (Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 1932, pp. 662-671); *La théorie des surfaces et l'espace réglé* (Actualités scientif., No 138; Paris, Hermann, 1934); *Alcune osservazioni sulle congruenze W* (Rendiconti del Seminario di Torino, 1953-1954, pp. 39-46); *Sur quatre suites de Laplace associées à une congruence W* (Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique, 1954, pp. 880-885); *Sur la théorie des congruences W* (Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique pp. 1028-1037; 1955, pp. 343-345).

où nous supposons a, b non identiquement nuls, écartant ainsi le cas où (x) est une surface réglée.

Les points

$$\mathrm{U} = |x \quad x^{10}|, \qquad \mathrm{V} = |x \quad x^{01}|$$

qui représentent sur l'hyperquadrique de Klein Q de S_5 les tangentes asymptotiques de (x) en un point non parabolique x, satisfont aux relations

$$\mathrm{U}^{10} + 2b\mathrm{V} = 0, \qquad \mathrm{V}^{01} + 2a\mathrm{U} = 0$$

et sont donc transformés de Laplace l'un de l'autre.

Les points U, V appartiennent à une suite de Laplace L,

$$\ldots, \mathrm{U}_n, \ldots, \mathrm{U}_1, \mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{V}_1, \ldots, \mathrm{V}_n, \ldots \tag{L}$$

dont chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u.

En posant

$$h_n = -(\log bh_1 \ldots h_{n-1})^{11} + h_{n-1}\,,$$
$$k_n = -(\log ak_1 \ldots k_{n-1})^{11} + k_{n-1}\,,$$

on a

$$\mathrm{U}_n^{01} = \mathrm{U}_{n+1} + \mathrm{U}_n (\log bh_1 \ldots h_n)^{01}\,, \qquad \mathrm{U}_n^{10} = h_n \mathrm{U}_{n-1}\,,$$
$$\mathrm{V}_n^{10} = \mathrm{V}_{n+1} + \mathrm{V}_n (\log ak_1 \ldots k_n)^{10}\,, \qquad \mathrm{V}_n^{01} = k_n \mathrm{V}_{n-1}.$$

Supposons que la suite L s'arrête aux points U_n, V_n en présentant le cas de Laplace. On a $h_n = 0$, $k_n = 0$; le point U_n ne dépend que de v et le point V_n ne dépend pas de u.

Nous avons montré que les points U_n, V_n sont conjugués par rapport à Q. Si $\Omega(p, q) = 0$ est la condition pour que les points p, q soient conjugués par rapport à Q, on a donc

$$\Omega(\mathrm{U}_n, \mathrm{V}_n) = 0\,,$$

En dérivant cette relation i fois par rapport à u et j fois par rapport à v, on a

$$\Omega(\mathrm{U}_n^{oj}, \mathrm{V}_n^{io}) = 0, \quad (i = 0, 1, \ldots; j = 0, 1, \ldots)\,.$$

Supposons que la courbe (U_n), lieu du point U_n lorsque v varie, n'appartienne pas à un hyperplan. Alors le pôle de l'hyperplan $U_n U_n^{01} \ldots U_n^{04}$, c'est-à-dire le point V_n^{20}, dépend de v, ce qui est impossible.

Si la courbe (U_n) appartient à un hyperplan, le pôle de U_{n-1} $U_n \ldots U_n^{03}$, c'est-à-dire le point V_n^{10}, dépend de v, ce qui est impossible.

Si enfin la courbe (U_n) appartient à un espace linéaire à trois dimensions, le pôle V_n de l'hyperplan $U_{n-2}\, U_{n-1}\, U_n\, U_n^{01}\, U_n^{02}$ dépend de v, ce qui est impossible.

On peut reprendre le même raisonnement au sujet de la courbe (V_n), lieu du point V_n lorsque u varie et, on en conclut que :

La courbe (U_n) appartient à un plan ξ;

La courbe (V_n) appartient à un plan η.

Les plans $\xi \equiv U_n\, U_n^{01}\, U_n^{02}$ et $\eta \equiv V_n\, V_n^{10}\, V_n^{20}$ sont conjugués par rapport à Q et leurs sections par Q représentent deux demi-quadriques ayant même support Φ_n.

La quadrique Φ_n reste fixe lorsque u, v, varient.

2. — Supposons que (x) soit une surface focale d'une congruence W engendrée par une droite j. Le point J qui représente la droite j sur Q est donné par

$$J = \lambda U - \mu V .$$

On peut choisir le facteur de proportionnalité des fonctions λ, μ de telle sorte que la condition pour que la droite j engendre une congruence W se traduise par (Demoulin)

$$\mu^{10} + 2b\lambda = 0 , \qquad \lambda^{01} + 2a\mu = 0 .$$

Considérons un espace linéaire S_6 à six dimensions dont les points ont pour coordonnées celles d'un point de S_5 et un septième nombre X_0. L'hyperplan $X_0 = 0$ coïncide donc avec S_5. Cela étant, le point U' dont les six premières coordonnées sont celles de U et la septième μ, et le point V' dont les six premières coordonnées sont celles de V et la septième λ, satisfont aux équations

$$U'^{10} + 2bV' = 0 , \qquad V'^{01} + 2a\, U' = 0 .$$

Les points U', V' sont transformés de Laplace l'un de l'autre et appartiennent à une suite de Laplace L',

$$\ldots, U'_n, \ldots, U_1', U', V', V'_1, \ldots, V'_n. \ldots \qquad (L')$$

dont chaque point est le transformé du précédent, dans le sens des u.

Le point J appartient à une suite de Laplace $\mathcal{J}$:

$$\ldots, J_n, \ldots, J_1, J, J_{-1}, \ldots, J_{-n}, \ldots, \qquad (\mathcal{J})$$

dont chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u. La suite $\mathcal{J}$ est inscrite dans la suite L et s'obtient de la manière suivante :

La suite L est la projection de la suite L' sur l'hyperplan $X_0 = 0$, à partir du point O_0 dont toutes les coordonnées sont nulles sauf X_0.

Le point J_n est l'intersection de l'hyperplan $X_0 = 0$ avec la droite $U'_{n-1}\, U'_n$; il appartient donc à la droite $U_{n-1}\, U_n$. De même, le point J_{-n} est l'intersection de l'hyperplan $X_0 = 0$ avec la droite $V'_{n-1}\, V'_n$ et appartient donc à la droite $V_{n-1}\, V_n$.

Si la suite de Laplace L s'arrête aux points U_n, V_n, la suite de Laplace L' s'arrête aux points U'_n, V'_n, en présentant également le cas de Laplace. Dans ces conditions, les cas suivants peuvent se présenter :

a) Le point U'_n coïncide avec le point U_n et le point V'_n avec le point V_n. Alors, le point J_n coïncide avec U_n et le point J_{-n} avec V_n.

b) Le point U'_n ne coïncide pas avec U_n, mais le point V'_n coïncide avec V_n.

Le point J_n appartient à la droite $U_{n-1}\, U_n$ et est distinct de U_n. Le point J_{n+1} est l'intersection des droites $U_n\, U_n^{01}$ et $U'_n\, U'^{01}_n$; la suite $\mathcal{J}$ s'arrête au point J_{n+1} en présentant le cas de Laplace. Le point J_{-n} coïncide avec V_n .

b') Le point U'_n coïncide avec U_n mais le point V'_n ne coïncide pas avec V_n.

Ce cas est analogue au précédent, sauf un changement de notation.

c) Le point U'_n ne coïncide pas avec le point U_n ni le point V'_n avec le point V_n.

La suite $\mathcal{J}$ s'arrête en un point J_{n+1} de la droite $U_n U_n^{01}$ et en un point J_{-n-1} de la droite $V_n V_n^{10}$.

3. — Supposons maintenant $n = 1$. Le point U_1, qui ne dépend que de v, est le pôle de l'hyperplan $UVV_1V_1^{10}V_1^{30}$, osculateur à une ligne u de la surface (U). Il en résulte que les asymptotiques u de la surface (x) appartiennent à des complexes linéaires Σ_u. De même, les asymptotiques v de la surface (x) appartiennent à des complexes linéaires Σ_v. La surface (x) est donc bien la surface qui a servi de point de départ à M. Rozet et à Mme Legrain.

La quadrique Φ_1 est fixe et on voit que les complexes Σ_u appartiennent à un réseau dont la base est la demi-quadrique représentée par la section de Q par le plan η de la courbe (V_1). De même, les complexes Σ_v forment un réseau dont la base est la demi-quadrique représentée par la section de Q par le plan ξ de la courbe (U_1).

Les complexes Σ_u, Σ_v sont en involution.

La quadrique de Lie Φ de la surface (x) a comme enveloppe la surface (x) et la quadrique fixe Φ_1, qu'elle touche en quatre points.

Nous avons $h_1 = k_1 = 0$, c'est-à-dire

$$(\log\ b)^{11} = (\log\ a)^{11} = 4ab.$$

Supposons que (x) soit une surface focale d'une congruence W, engendrée par une droite j, représentée par le point

$$J = \lambda U - \mu V\,,$$

où

$$\mu^{10} + 2b\,\lambda = 0\,, \qquad \lambda^{01} + 2a\,\mu = 0\,.$$

De la première de ces relations, on déduit

$$\mu^{11} - \mu^{10}(\log h)^{01} - 4ab\,\mu = 0,$$

c'est-à-dire

$$\mu^{11} - \mu^{10}(\log\ b)^{01} - \mu(\log\ b)^{11} = 0\,,$$

ou encore

$$[\mu^{01} - \mu\,(\log\ b^{01})]^{10} = 0\,.$$

On peut encore écrire cette relation sous la forme

$$\left[\mu\left(\log\frac{b}{\mu}\right)^{01}\right]^{10} = 0,$$

ou

$$2b\lambda\left(\log\frac{b}{\mu}\right)^{01} = \mu\left(\log\frac{b}{\mu}\right)^{11}\,.$$

On a de même

$$2a\mu\left(\log\frac{a}{\lambda}\right)^{10} = \lambda\left(\log\frac{a}{\lambda}\right)^{11}\,.$$

Nous aurons

$$J_1 = \mu U_1 - \mu_1 U\,,$$

où $\mu_1 = \mu^{01} - \mu\ \log\ b)^{01}$. On peut écrire

$$J_1 = \mu\left[U_1 + U\left(\log\frac{b}{\mu}\right)^{01}\right]$$

et de même

$$J_{-1} = \lambda\left[V_1 + V\left(\log\frac{a}{\lambda}\right)^{10}\right]\,.$$

On en déduit

$$J_1^{10} - J_1\ \ (\log\mu)^{10} = 2b\left(\log\frac{b}{\mu}\right)^{01} J\,,$$

$$J_{-1}^{01} - J_{-1}\,(\log\lambda)^{01} = 2a\left(\log\frac{a}{\lambda}\right)^{10} J\,.$$

4. — Supposons que le point J_1 coïncide avec le point U_1. On a alors

$$\left(\log\frac{b}{\mu}\right)^{01} = 0\,.$$

De même, si J_{-1} coïncide avec V_1, on a

$$\left(\log \frac{a}{\lambda}\right)^{10} = 0 .$$

Supposons maintenant que J_1 ne coïncide pas avec U_1, c'est-à-dire que le point J_2 existe. On a

$$J_2 = \mu_1 U_1^{01} - \mu_1^{01} U_1$$

et par suite, puisque $\mu_1^{10} = 0$, $J_2^{10} = 0$.

On peut aussi écrire

$$J_2 = \mu\left(\log \frac{b}{\mu}\right)^{01} U_1^{01} - \mu\left[\log\left(\frac{b}{\mu}\right)^{01} (\log b)^{01} + \left(\log \frac{b}{\mu}\right)^{02}\right] U_1 .$$

De même, si le point J_{-1} ne coïncide pas avec V_1, c'est-à-dire si le point J_{-2} existe, on a

$$J_{-2} = \lambda_1 V_1{}^{10} - \lambda_1{}^{10} V_1$$

et, puisque $\lambda_1{}^{01} = 0$, $J_{-2}^{01} = 0$.

Soit $(\bar{x})$ la seconde surface focale de la congruence (j) considérée. Les asymptotiques de cette surface sont également les courbes u, v et nous désignerons par $\overline{U}$, $\overline{V}$ les points de l'hyperquadrique Q qui représentent respectivement les tangentes $\bar{x}\,\bar{x}^{10}$, $\bar{x}\,\bar{x}^{01}$. Ces points sont consécutifs dans une suite de Laplace $\overline{L}$:

$$\ldots,\ \overline{U}_n,\ \ldots,\ \overline{U}_1,\ \overline{U},\ \overline{V},\ \overline{V}_1,\ \ldots,\ \overline{V}_n,\ \ldots \qquad (\overline{L})$$

analogue à L. Cette suite s'arrête nécessairement en même temps que la suite $\mathcal{J}$ et les cas suivants peuvent se présenter :

1°) Le point J_1 coïncide avec le point U_1.

La suite $\overline{L}$ peut s'arrêter au point $\overline{U}$ (en présentant le cas de Laplace) et le point $J_1 \equiv U_1$ appartient à la droite $\overline{U}\,\overline{U}^{01}$. La surface $(\bar{x})$ est réglée.

La suite $\overline{L}$ peut s'arrêter au point $\overline{U}_1$, qui coïncide avec le point U_1.

2°) Le point J_1 ne coïncide pas avec le point U_1.

La suite $\overline{L}$ peut s'arrêter au point $\overline{U}_1$ et le point J_2 se trouve sur la droite $\overline{U}_1\,\overline{U}_1^{01}$.

La suite $\overline{L}$ peut s'arrêter au point $\overline{U}_2$, qui coïncide avec le point J_2.

On peut de même considérer le cas où le point J_{-1} coïncide ou non avec le point V_1.

On obtiendra ainsi une classification des congruences W envisagées ici. Certains cas ne pourront se présenter. Nous nous bornerons ici à envisager le cas où la suite $\overline{L}$ s'arrête aux points $\overline{U}_2$, $\overline{V}_2$.

5. — Le complexe linéaire osculateur à la congruence (j) le long de la droite j est déterminé par les points

$$J_2 = \mu_1 U_1^{01} - \mu_1^{01} U_1,\ J_1 = \mu U_1 - \mu_1 U,\ J = \lambda U - \mu V_1,$$
$$J_{-1} = \lambda V_1 - \lambda_1 V,\ J_{-2} = \lambda_1 V_1^{10} - \lambda_1^{10} V_1$$

Le pôle P de cet hyperplan est donné par

$$P = \eta_2 U_1^{01} + \eta_1 U_1 + \eta_0 U + \xi_0 V + \xi_1 V_1 + \xi_2 V_1^{10}.$$

Observons que l'on a

$$\Omega(U_1^{01},\ U_1^{01}) = -2\ \beta\Delta,\ \Omega(U_1^{01},\ U) = 2\ \Delta\ ,$$
$$\Omega(V_1^{10},\ V_1^{10}) = 2\ \alpha\Delta,\ \ \Omega(V_1^{10},\ V) = -2\ \Delta\ ,$$

où

$$\beta = 2(\log b)^{02} + \overline{(\log b)^{01}}^{2} + 4(a^{10} + c_2)\ ,$$
$$\alpha = 2(\log a)^{20} + \overline{(\log a)^{10}}^{2} + 4(b^{01} + c_1)\ ,$$
$$\Delta = \left|\, x \quad x^{10} \quad x^{01} \quad x^{11} \,\right|.$$

Les autres couples de points figurant dans l'expression de P sont conjugués par rapport à Q.

En utilisant les formules précédentes, on trouve facilement [1]

$$P = \mu U_1^{01} - \mu_1 U_1 + (\mu_1^{01} + \beta\mu)U - (\lambda_1^{10} + \alpha\lambda)V + \lambda_1 V_1 - \lambda V_1^{10}.$$

---

[1] On peut du reste déduire l'expression de P de celle que nous avons donnée dans le cas général (Cfr. *Sur la théorie des congruences W*, loc. cit.).

Le point P est l'intersection des droites U $\overline{U}$ et V $\overline{V}$. On peut donc déterminer les points $\overline{U}$, $\overline{V}$.

Posons

$$\xi = 2\lambda_1^{20} + 2\lambda_1^{10}(\log a)^{10} + 2\alpha\lambda^{10} + \alpha^{10}\lambda + 4b\mu_1^{01} + 4b\beta\mu\,,$$

$$\eta = 2\mu_1^{02} + 2\mu_1^{01}(\log b)^{01} + 2\beta\mu^{01} + \beta^{01}\mu + 4a\lambda_1^{10} + 4a\alpha\lambda\,,$$

$$\psi = 2\lambda\lambda_1^{10} + \alpha\lambda^2 - \lambda_1^2 - 2\mu\mu_1^{01} - \beta\mu^2 + \mu_1^2\,.$$

Nous avons

$$\xi^{01} = 2b\eta\,, \qquad \eta^{10} = 2a\xi\,,$$

$$\psi^{10} = \lambda\xi\,, \qquad \psi^{01} = -\mu\eta\,.$$

Nous pouvons poser $\overline{U} = P + \theta U$ et nous avons

$$\Omega(P + \theta U,\ P + \theta U) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\Omega(P,\ P) + 2\theta\Omega\,(P,\ U) = 0\,.$$

On a

$$\Omega(P,\ P) = -2\psi\Delta\,, \qquad \Omega(P,\ U) = 2\,\mu\Delta\,,$$

donc

$$\overline{U} = 2\mu P + \psi U\,.$$

De même, on a

$$\overline{V} = 2\lambda P + \psi V\,.$$

A partir de ce moment, nous pouvons reprendre les formules de notre note *Sur la théorie des congruences W* (loc. cit.). Nous avons

$$2P^{10} + \xi V = 0, \qquad 2P^{01} - \eta U = 0\,.$$

et

$$\overline{U}_1 = \xi(\mu U_1 - \mu_1 U) + 2b(\psi U_1 + 2\mu_1 P)\,,$$

$$\overline{V}_1 = \eta(\lambda V_1 - \lambda_1 V) - 2a(\psi V_1 + 2\lambda_1 P)\,.$$

Un calcul simple montre que l'on a

$$\mu\overline{U}^{01} - \mu^{01}\overline{U} = \psi J_1$$

et ensuite

$$\overline{U}_1^{01} - \overline{U}_1\left(\log\frac{b}{\mu_1}\right)^{01} = \mu_1(\xi\mu + 2b\psi)J_2 .$$

On a de même

$$\lambda\overline{V}^{10} - \lambda^{10}\overline{V} = \psi J_{-1} ,$$

$$\overline{V}_1^{10} - \overline{V}_1\left(\log\frac{a}{\lambda_1}\right)^{10} = \lambda_1(\eta\lambda + 2a\psi)J_{-2} .$$

Les développements qui précèdent sont valables que la suite $\overline{L}$ s'arrête au point $\overline{U}_1$ ou $\overline{U}_2$, au point $\overline{V}_1$ ou $\overline{V}_2$. Pour qu'elle s'arrête aux points $\overline{U}_2$ et $\overline{V}_2$, il faut que les points $\overline{U}_1$, $\overline{V}_1$ dépendent de u et de v.

Observons que l'on a

$$\overline{U}_1^{10} - \overline{U}_1 (\log b)^{10} = [\xi^{10} - \xi(\log b)^{10}]J_1 ,$$

$$\overline{V}_1^{01} - \overline{V}_1 (\log a)^{01} = [\eta^{01} - \eta(\log a)^{01}]J_1 .$$

Pour que la suite L s'arrête aux points $\overline{U}_2$ et $\overline{V}_2$, il faut donc que l'on ait

$$\xi^{10} - \xi (\log b)^{10} \neq 0, \qquad \eta^{01} - \eta(\log a)^{01} \neq 0 .$$

A ces conditions, il faut ajouter (n° 4),

$$\left(\log\frac{b}{\mu}\right)^{01} \neq 0, \qquad \left(\log\frac{a}{\lambda}\right)^{10} \neq 0 .$$

On peut d'ailleurs observer que les formules obtenues pour déterminer $\overline{U}$ et $\overline{V}$ sont encore valables lorsque l'on a $\mu_1 = 0$ ou $\lambda_1 = 0$.

6. — Le point $\overline{U}_2$ a pour hyperplan polaire $\overline{V}\,\overline{V}_1\,\overline{V}_2\,\overline{V}_2^{10}\,\overline{V}_2^{20}$, c'est-à-dire l'hyperplan osculateur à une ligne u de la surface $(\overline{V})$.

Il en résulte que, $\overline{U}_2$ ne dépendant que de v, les réglées asymptotiques gauches, lieu des tangentes aux courbes v le long d'une courbe u de la surface $(\bar{x})$, appartiennent à des complexes linéaires Σ'_u. De même, les réglées asymptotiques gauches relatives aux courbes v de la surface $(\bar{x})$ appartiennent à des complexes linéaires Σ'_v.

La quadrique $\overline{\Phi}_2$ est fixe lorsque u, v varient.

Les complexes Σ'_u forment un réseau qui a pour base la demi-quadrique représentée par la section de Q par le plan de la courbe $(\overline{V}_2)$ et les complexes Σ'_v forment de même un réseau ayant pour base la demi-quadrique représentée par la section de Q par le plan de $(\overline{U}_2)$.

Les quadriques $\overline{\Phi}_1$ touchent $\overline{\Phi}_2$ en quatre points.

Liège, le 13 avril 1955.