EXTRAIT DU *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége*
Séance du 20 janvier 1944. — N° 1.

Sur le contact des surfaces cubiques,

par LUCIEN GODEAUX, Membre de la Société.

On sait que si deux surfaces se touchent le long d'une courbe, elles on en général des points doubles sur cette courbe. Ainsi, si une surface d'ordre $m+2n$ touche un plan suivant une courbe d'ordre n, elle possède $n(m+2n-1)$ points doubles sur cette courbe. La propriété est facile à établir. La première polaire d'un point quelconque par rapport à la surface rencontre la courbe de contact en $n(m+2n-1)$ points et en chacun de ceux-ci le plan tangent doit être indéterminé, donc ces points sont doubles pour la surface. Les choses se présentent d'une manière moins simple lorsque aucune des surfaces n'est un plan.

Dans cette note, nous considérons des contacts entre des quadriques et des surfaces cubiques.

En premier lieu, nous considérons une quadrique et une surface cubique qui se touchent suivant une cubique gauche. Nous démontrons que la quadrique est un cône et que la surface cubique possède quatre points doubles coniques. Nous démontrons l'existence de la configuration envisagée en en construisant un exemple. Celui-ci présente naturellement lorsqu'on étudie la représentation d'une involution du second ordre, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à un plan.

En second lieu, nous considérons deux surfaces cubiques ayant un contact du second ordre le long d'une cubique gauche. Cette fois, nous démontrons que chacune de ces surfaces possède trois points doubles biplanaires situés sur la cubique gauche. Les deux surfaces considérées déterminent un faisceau dont la surface générale possède trois points doubles biplanaires variables sur la cubique gauche. Lorsqu'on étudie la représentation de l'involution engendrée dans un plan par une homographie cyclique, non homologique, de période trois, on est conduit à la construction de couples de surfaces cubiques s'osculant le long d'une cubique gauche; nous le montrons à la fin de cette note.

D'une manière générale, l'étude des involutions n'ayant qu'un nombre fini de points unis [1] conduit à des couples de

---

[1] Voir, par exemple, notre exposé sur *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Paris, Hermann, 1935).

surfaces ayant un contact le long d'une courbe; cela pourrait fournir quelques renseignements sur le problème général de déterminer les points doubles des surfaces d'un tel couple.

1. Soient F une surface cubique non réglée et Q une quadrique se touchant le long d'une cubique gauche K. Supposons en premier lieu que la surface F ne possède pas de point double sur la courbe K.

Il existe six bisécantes de K appartenant à F. Ces bisécantes ne peuvent être toutes tangentes à la cubique K. En effet, rapportons projectivement les quadriques passant par K aux droites d'un plan σ; on établit ainsi une correspondance birationnelle entre les bisécantes de K et les points du plan σ. En faisant correspondre à un point de σ le troisième point de rencontre avec F de la corde homologue de K, on obtient une représentation plane de F sur σ. Dans cette représentation, il correspond à la courbe K une quintique K′ avant des points doubles aux six points de σ homologues des six cordes de K appartenant à F. Si toutes ces bisécantes étaient tangentes à K, la quintique K′ aurait six points de rebroussement et serait de classe deux, ce qui est absurde.

Il y a donc au moins une des cordes de K appartenant à F qui n'est pas tangente à la cubique. Soient p cette corde, P_1, P_2 ses points d'appui sur K, p_1 la tangente à K au point P_1. Le plan pp_1 est tangent à la surface F au point P_1, simple par hypothèse pour cette surface. Il est aussi tangent à la quadrique Q au même point. La droite p touche donc Q au point P_1 et rencontre encore cette quadrique au point P_2 distinct de P_1, elle appartient donc à cette quadrique. Les surfaces F et Q auraient donc en commun une droite p en dehors de la courbe K, ce qui est absurde.

On peut faire le même raisonnement pour P_2 et l'on voit que la surface F possède au moins deux points doubles sur la courbe K.

2. Supposons que la surface F possède d points doubles sur la courbe K et soient respectivement

$$\varphi_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \qquad \varphi_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

les équations des surfaces F et Q. Les surfaces cubiques

$$f \equiv \lambda_0\varphi_3 + (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4)\,\varphi_2 = 0$$

touchent la surface F le long de K.

La première polaire d'un point quelconque y par rapport à la surface $f=0$ a pour équation

$$\lambda_0 \Sigma y_i \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_i} + (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4) \Sigma y_i \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i} + \varphi_2 \Sigma \lambda_i y_i = 0. \quad (1)$$

Supposons que le nombre d des points doubles de F situés sur K soit au plus égal à 3. Alors, toute surface $f=0$ possède d points doubles sur la courbe K et ces points doubles varient sur cette courbe avec la surface. La surface (1) passe par les points doubles de la surface $f=0$ et coupe encore K en $6-d$ points fixes; ces points fixes sont en effet les points de contact appartenant à K des plans tangents menés par le point y à la surface F et par conséquent à toutes les surfaces $f=0$. Actuellement, on a $6-d \geqslant 3$ et les quadriques (1) sont en nombre ∞^4; il y a donc au moins une de ces quadriques qui contient la courbe K: Mais cela est absurde, car cela signifierait que les plans tangents à F aux points de K passent tous par un point quelconque y (aucune des surfaces $f=0$ ne peut en effet avoir la courbe K comme courbe double). On ne peut donc avoir $d \leqslant 3$.

Une surface cubique non réglée possède au plus quatre points doubles; ces points sont alors doubles coniques pour la surface et sont les sommets d'un tétraèdre proprement dit. On en conclut $d=4$. La surface F possède donc quatre points doubles coniques sur la cubique gauche K.

Observons que les six bisécantes de K appartenant à F sont les droites joignant les points doubles deux à deux.

3. De ce qui précède résulte que par un point quelconque y passent deux plans tangents à la surface F en des points simples de la courbe K, ou encore deux plans tangents à la quadrique Q en des points de K, simples pour cette quadrique.

Le plan polaire du point y par rapport à Q coupe K en trois points et en un de ces points, le plan tangent à Q doit être indéterminé; en d'autres termes, la quadrique Q doit être un cône dont le sommet appartient à K.

D'ailleurs, toute surface $f=0$ doit avoir quatre points doubles sur K; si cette surface est formée de la quadrique Q et d'un plan, ces quatre points doubles sont le sommet du cône Q et les points de rencontre du plan et de la courbe K.

Si une quadrique touche une surface cubique le long d'une cubique gauche, la surface cubique possède quatre points doubles coniques sur la cubique gauche et la quadrique est un cône circonscrit à cette courbe.

4. On peut montrer sans difficulté l'existence d'un cône du second ordre touchant une surface cubique à quatre points doubles coniques le long d'une cubique en utilisant la théorie des involutions n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Considérons, dans un plan, l'inversion

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_2 x_3 : x_3 x_1 : x_1 x_2,$$

Il existe deux systèmes linéaires de cubiques planes appartenant à l'involution I_2 engendrée par cette transformation, à savoir :

$$\lambda_1 x_1 (x_2^2 + x_3^2) + \lambda_2 x_2 (x_3^2 + x_1^2) + \lambda_3 x_3 (x_1^2 + x_2^2) + \lambda_4 x_1 x_2 x_3 = 0, \quad (1)$$

$$\mu_1 x_1 (x_2^2 - x_3^2) + \mu_2 x_2 (x_3^2 - x_1^2) + \mu_3 x_3 (x_1^2 - x_2^2) = 0. \quad (2)$$

Etablissons une projectivité entre les courbes du système (1) et les plans de l'espace en posant

$$\begin{aligned}
\rho x_1 &= (x_2 + x_3)(x_3 - x_1)(x_1 - x_2),\\
\rho x_2 &= (x_2 - x_3)(x_3 + x_1)(x_1 - x_2),\\
\rho x_3 &= (x_2 - x_3)(x_3 - x_1)(x_1 + x_2),\\
\rho x_4 &= (x_2 + x_3)(x_3 + x_1)(x_1 + x_2).
\end{aligned}$$

Aux couples de l'involution I_2 correspondent les points de la surface cubique

$$X_2 X_3 X_4 + X_3 X_4 X_1 + X_4 X_1 X_2 + X_1 X_2 X_3 = 0, \quad (3)$$

qui possède des points doubles coniques aux sommets du tétraèdre de référence.

Aux courbes (2) correspondent sur la surface (3) des cubiques gauches le long de chacune desquelles, d'après la théorie des involutions, une quadrique est inscrite à la surface [2]. On trouve aisément que l'équation de cette quadrique s'écrit

$$\left.\begin{aligned}
&\mu_1^2 (X_2 + X_3)(X_1 + X_4) + \mu_2^2 (X_3 + X_1)(X_2 + X_4) + \mu_3^2 (X_1 + X_2)(X_3 + X_4)\\
&+ 2\mu_2\mu_3 (X_2X_3 - X_1X_4) + 2\mu_3\mu_1 (X_3X_1 - X_2X_4) + 2\mu_1\mu_2 (X_1X_2 - X_3X_4) = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Cette quadrique est un cône de sommet

$$\begin{aligned}
X_1 &= (\mu_2 + \mu_3)^2 (\mu_1^2 - \mu_2^2)(\mu_1^2 - \mu_3^2),\\
X_2 &= (\mu_3 + \mu_1)^2 (\mu_2^2 - \mu_3^2)(\mu_2^2 - \mu_1^2),\\
X_3 &= (\mu_1 + \mu_2)^2 (\mu_3^2 - \mu_1^2)(\mu_3^2 - \mu_2^2),\\
X_4 &= (\mu_2 + \mu_3)^2 (\mu_3 + \mu_1)^2 (\mu_1 + \mu_2)^2.
\end{aligned}$$

---

[2] Voir notre note *Sur l'inversion et sur une surface cubique à quatre points doubles* (Mathesis, 1922, pp. 19-23).

Pour démontrer que le cône (4) est bien tangent à la surface (3) le long d'une cubique gauche, effectuons la transformation

$$X_1' : X_2' : X_3' : X_4' = X_2 X_3 X_4 : X_3 X_4 X_1 : X_4 X_1 X_2 : X_1 X_2 X_3.$$

A la surface (3) correspond le plan

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 0$$

et au cône (4) le cône

$$\mu_1^2 (X_2 + X_3)(X_1 + X_4) + \mu_2^2 (X_3 + X_1)(X_2 + X_4) + \mu_3^2 (X_1 + X_2)(X_3 + X_2)$$
$$+ 2\mu_2\mu_3(X_1 X_4 - X_2 X_3) + 2\mu_3\mu_1(X_2 X_4 - X_3 X_1) + 2\mu_1\mu_2(X_3 X_1 - X_1 X_2) = 0$$

qui touche le plan précédent suivant la droite située dans le plan

$$\mu_1 X_1 + \mu_2 X_2 + \mu_3 X_3 = 0.$$

On sait d'ailleurs qu'à cette droite correspond une cubique gauche de la surface (3).

5. Soient F, F′ deux surfaces cubiques, non réglées, s'osculant le long d'une cubique gauche K. On a vu plus haut qu'il existe au moins une bisécante p de K, non tangente à cette courbe, appartenant à F. La droite p ne pouvant appartenir à F′, les points d'appui P_1, P_2 de p sur K sont doubles pour la surface F.

En général, le point P_1 est simple pour la surface F′. Soit ϖ_1 le plan tangent en P_1 à F′. Une courbe tracée sur F′ et passant par P_1 doit rencontrer la surface F en trois points confondus en P_1. Il en résulte que cette courbe doit toucher la surface F en P_1; par conséquent P_1 est un point double biplanaire de F, un des plans tangents étant le plan ϖ_1. Le plan ϖ_1 touche donc la cubique gauche K en P_1.

De même, le point P_2 est double biplanaire pour F, un des plans tangents à cette surface en P_2 étant le plan ϖ_2 tangent à F′ en ce point. ϖ_2 touche donc K en P_2.

Nous utiliserons la propriété suivante qui, pour ne pas encombrer le texte, sera démontrée plus loin : Si une surface cubique F possède deux points doubles biplanaires P_1, P_2, un des plans tangents en P_1 coïncide avec un des plans tangents en P_2 et ce plan a un contact du second ordre avec la surface le long de la droite P_1P_2.

Soient ϖ'_1 le second plan tangent en P_1, ϖ'_2 le second plan tangent en P_2 à la surface F. L'un des plans ϖ_1, ϖ'_1 doit coïncider avec l'un des plans ϖ_2, ϖ'_2. Les plans ϖ_1, ϖ_2 ne peuvent coïncider, car un même plan ne peut toucher K en P_1, P_2. Le plan ϖ'_1 peut coïncider avec ϖ_2 ou le plan ϖ_1 avec ϖ'_2. Enfin, les plans ϖ'_1, ϖ'_2 peuvent coïncider. Observons que dans ce cas, le plan obtenu ayant un contact du second ordre avec la surface F le long de la droite p, il ne peut rencontrer F en dehors de cette droite; il en résulte que ce plan touche K soit en P_1, soit en P_2.

Dans tous les cas, le plan ϖ osculant F le long de p touche K soit en P_1, soit en P_2. Supposons, pour fixer les idées, que ce soit en P_1. Alors, la tangente à K en ce point, qui appartient au plan ϖ, ne peut appartenir à F. Cela étant, remarquons que le cône projetant K de P_1 rencontre une section plane de la surface en trois points (distincts ou non) en dehors de K; les génératrices du cône passant par ces points appartiennent à F. L'une de ces génératrices est la droite p, et comme ϖ ne touche pas K en P_2, cette génératrice ne compte que pour une parmi les trois droites envisagées. Il existe donc encore au moins une corde de K passant par P_1 et appartenant à F; ce ne peut être la tangente en P_1, droite qui ne peut appartenir à F. Soit P_3 le second point d'appui de la droite en question sur K. En reprenant le raisonnement fait au début, on voit que P_3 est un point double biplanaire de F.

Nous arrivons donc à cette conclusion que F possède au moins trois points doubles biplanaires sur K. Elle en possède d'ailleurs exactement trois, car une surface cubique non réglée ne peut posséder au plus que trois points doubles biplanaires.

6. Nous établirons maintenant la propriété utilisée plus haut. Considérons une surface cubique F ayant deux points doubles biplanaires $O_3(0,0,1,0)$, $O_4(0,0,0,1)$.

Ecrivons tout d'abord l'équation de la surface possédant deux points doubles en O_3, O_4; on a

$$x_3 x_4\, \alpha_1(x_1, x_2) + x_3\, \alpha_2(x_1, x_2) + x_4\, \alpha'_2(x_1, x_2) + \alpha_3(x_1, x_2 = 0,$$

α_1 étant linéaire, α_2 et α'_2 quadratiques, α_3 cubique en x_1, x_2.

En exprimant que les cônes

$$x_4 \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \quad x_3 \alpha_1 + \alpha'_2 = 0$$

tangents en O_3, O_4 dégénèrent, on est conduit à poser

$$\alpha_2 = \alpha_1 \beta_1, \qquad \alpha'_2 = \alpha_1 \beta'_1,$$

β_1, β'_1 étant linéaires en x_1, x_2.

L'équation de la surface F s'écrit

$$(x_3 x_4 + x_3 \beta_1 + x_4 \beta_1') \alpha_1 + \alpha_3 = 0.$$

On voit que le plan $\alpha_1 = 0$ est tangent à F en 0_3, 0_4 et qu'il a un contact du second ordre avec la surface le long de la droite $0_3 0_4$.

7. Reprenons la surface F et ses trois points doubles biplanaires P_1, P_2, P_3 situés sur K. Soient respectivement ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3 les plans tangents à F′ en P_1, P_2, P_3; ces plans touchent également F en ces points. Soient en outre ϖ'_1, ϖ'_2, ϖ'_3 les seconds plans tangents à F en P_1, P_2, P_3. D'après ce qui a été établi plus haut, les plans ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3 touchent K en P_1, P_2, P_3.

Si les plans ϖ'_1, ϖ'_2 coïncidaient, les plans ϖ_3, ϖ'_3 devraient coïncider l'un avec ϖ_1 l'autre avec ϖ_2. Or le plan ϖ_3 ne peut coïncider ni avec ϖ_1, ni avec ϖ_2, car ce serait en un plan contenant deux tangentes de K. Les plans ϖ'_1, ϖ'_2 ne peuvent donc coïncider. Supposons, pour fixer les idées, que ϖ'_2 coïncide avec ϖ_1; alors ϖ'_1 coïncide avec ϖ_3 et ϖ'_3 avec ϖ_2.

Les six bisécantes de K appartenant à F sont les droites P_2P_3, P_3P_1, P_1P_2 comptées chacune deux fois.

Il est clair que la surface F′ possède également trois points doubles biplanaires sur la courbe K. Plus généralement, toute surface du faisceau déterminé par F, F′ possède trois points doubles biplanaires situés sur K.

Si deux surfaces cubiques ont un contact du second ordre le long d'une cubique gauche, chacune d'elles possède trois points doubles biplanaires sur cette courbe.

8. C'est encore à la théorie des involutions que nous aurons recours pour obtenir un exemple de deux surfaces cubiques s'osculant le long d'une cubique gauche.

Considérons dans un plan l'homographie cyclique de période trois [3]

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^2 x_3,$$

où ε est une racine cubique primitive de l'unité. Elle engendre

---

(3) Voir notre note *Étude élémentaire sur l'homographie plane de période trois et sur une surface cubique* (Nouvelles Annales de Mathématiques, 1916, pp. 49-61).

une involution I_3, d'ordre trois, à laquelle appartiennent les trois systèmes de cubiques planes

$$\lambda_1 x_1^3 + \lambda_2 x_2^3 + \lambda_3 x_3^3 + \lambda_4 x_1 x_2 x_3 = 0, \tag{1}$$
$$\mu_1 x_4^2 x_2 + \mu_2 x_2^2 x_3 + \mu_3 x_3^2 x_1 = 0, \tag{2}$$
$$\nu_1 x_1^2 x_3 + \nu_2 x_2^2 x_1 + \nu_3 x_3^2 x_2 = 0. \tag{3}$$

Rapportons projectivement les courbes (1) aux plans de l'espace en posant

$$X_1 : X_2 : X_3 \quad X_4 = x_1^3 : x_2^3 : x_3^3 : x_1 x_2 x_3.$$

Aux groupes de I_3 correspondent les points de la surface cubique F d'équation

$$X_1 X_2 X_3 = X_4^3,$$

possédant trois points doubles biplanaires $0_1(1,0,0,0)$, $0_2(0,1,0,0)$, $0_3(0,0,1,0)$.

A la courbe (2) correspond sur F une cubique gauche K commune aux trois quadriques

$$\mu_1 X_1 X_2 + \mu_2 X_2 X_4 + \mu_3 X_4^2 = 0,$$
$$\mu_1 X_1 X_4 + \mu_2 X_4^2 + \mu_3 X_1 X_3 = 0,$$
$$\mu_1 X_4^2 + \mu_2 X_2 X_3 + \mu_3 X_3 X_4 = 0.$$

La cubique gauche K passe par les points 0_1, 0_2, 0_3 en y touchant respectivement les plans $X_2=0$, $X_3=0$, $X_1=0$.

En élevant les deux membres de l'équation (2) au cube, on en déduit

$$\begin{aligned} &\mu_1^3 X_1^2 X_2 + \mu_2^3 X_2^2 X_3 + \mu_3^3 X_3^2 X_1 \\ &+ 3 X_4 (\mu_1^2 \mu_2 X_1 X_2 + \mu_2^2 \mu_3 X_2 X_3 + \mu_3^2 \mu_1 X_3 X_1) \\ &+ 3 X_4^2 (\mu_1^2 \mu_3 X_1 + \mu_2^2 \mu_1 X_2 + \mu_3^2 \mu_2 X_3) + 6 \mu_1 \mu_2 \mu_3 X_4^3 = 0. \end{aligned}$$

C'est une surface cubique F′ ayant, d'après la théorie des involutions, un contact du second ordre avec la surface F le long de la cubique gauche K.

On peut voir aisément que la surface F′ possède trois points doubles biplanaires sur K. Posons

$$\Omega \equiv \mu_1^2 \mu_3 X_1 + \mu_2^2 \mu_1 X_2 + \mu_3^2 \mu_2 X_3 + 3 \mu_1 \mu_2 \mu_3 X_4 = 0,$$
$$\Omega_1 \equiv \mu_1^2 \mu_3 v_1 X_1 + \mu_2^2 \mu_1 v_2 X_2 + \mu_3^2 \mu_2 v_3 X_3 - 3 \mu_1 \mu_2 \mu_3 X_4 = 0,$$
$$\Omega_2 \equiv \mu_1^2 \mu_3 v_2 X_1 + \mu_2^2 \mu_1 v_3 X_2 + \mu_3^2 \mu_2 v_1 X_3 - 3 \mu_1 \mu_2 \mu_3 X_4 = 0,$$
$$\Omega_3 \equiv \mu_1^2 \mu_3 v_3 X_1 + \mu_2^2 \mu_1 v_1 X_2 + \mu_3^2 \mu_2 v_2 X_3 - 3 \mu_1 \mu_2 \mu_3 X_4 = 0,$$

où v_1, v_2, v_3 sont les racines de l'équation

$$v^3 - 3v - 1 = 0.$$

L'équation de la surface F′ s'écrit sous la forme

$$\Omega_1 \Omega_2 \Omega_3 - \Omega^3 = 0.$$

Les plans $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$, $\Omega_3 = 0$, $\Omega = 0$ forment un tétraèdre proprement dit et les sommets de ce tétraèdre appartenant au plan $\Omega = 0$ sont évidemment des points doubles biplanaires de F′, situés sur la cubique gauche K.

On vérifie que les surfaces F, F′ s'osculent le long de K en utilisant la représentation plane de F. Nous obtiendrons cette représentation sur un plan σ en posant

$$X_1 : X_2 : X_3 : X_4 = y_1^2 y_3 : y_2^2 y_1 : y_3^2 y_2 : y_1 y_2 y_3.$$

A la section de F par F′ correspond dans le plan σ la courbe

$$y_1^2 y_2^2 y_3^2 (\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \mu_3 y_3)^3 = 0,$$

ce qui démontre notre assertion.

On obtiendrait évidemment des résultats analogues en partant des courbes (3).

Liége, le 30 décembre 1943.

M. HAYEZ, Impr. de l'Académie royale, 112, rue de Louvain, Bruxelles
(Domicile légal : rue de la Chancellerie, 4)

N° Réf. 2019.