COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE

Sur la surface du quatrième ordre contenant sept droites,

par Lucien Godeaux, Membre de l'Académie

Les surfaces du quatrième ordre dépendent de trente-quatre paramètres et contenir une droite, pour une surface du quatrième ordre, équivaut à cinq conditions; il existe par conséquent ∞^4 surfaces du quatrième ordre contenant six droites deux à deux gauches. Si une surface du quatrième ordre contient sept droites deux à deux gauches, il existe une liaison entre ces droites; c'est cette liaison que nous nous proposons d'étudier dans cette note.

1. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_6$ six droites deux à deux gauches. Les surfaces du quatrième ordre F passant par ces six droites forment un système linéaire $|F|$ de dimension quatre. Deux surfaces F ont en commun, en dehors des six droites données, une courbe gauche C d'ordre dix, s'appuyant en six points sur chacune des droites $a_1, a_2, \ldots, a_6$.

Sur une surface du système $|F|$, les courbes C forment un système linéaire complet de dimension trois; par conséquent, les surfaces F étant de genres un $(p_a = P_4 = 1)$, les courbes C ont le genre trois et le degré quatre. Le système $|F|$ a donc le degré quatre.

Parmi les surfaces F se trouvent des surfaces décomposées en deux quadriques déterminées l'une par trois des droites $a_1, a_2, \ldots, a_6$, l'autre par les trois autres droites. Le nombre de ces surfaces F décomposées en deux quadriques est égal à dix.

Supposons qu'une surface F, soit F_0, contienne une septième droite a_0, ne rencontrant aucune des droites $a_1, a_2, \ldots, a_6$. Les surfaces du système $|F|$, distinctes de F_0, découpent sur cette surface des courbes C ayant a_0 comme quadrisécante. Inversement, soit a_0 une quadrisécante d'une courbe C, ne s'appuyant sur aucune des droites $a_0, a_1, \ldots, a_6$. Par cette courbe C passent ∞^1 surfaces F; celle de ces surfaces qui passe par un cinquième point de a_0 contient cette droite.

2. Désignons par Q la quadrique déterminée par les droites a_1, a_2, a_3 et par Q' la quadrique déterminée par les droites a_4, a_5, a_6.

Les surfaces F découpent, sur la quadrique Q, des courbes Γ du cinquième ordre, rationnelles, ayant les droites a_1, a_2, a_3 comme quadrisécantes. De plus, les courbes Γ s'appuient en deux points fixes sur chacune des droites a_4, a_5, a_6 (aux points de rencontre de ces droites avec Q). Sur la quadrique Q, les courbes Γ forment un système linéaire $|\Gamma|$, triplement infini, de degré deux.

De même, les surfaces F découpent sur la quadrique Q' des courbes Γ' du cinquième ordre, s'appuyant en quatre points sur chacune des droites a_4, a_5, a_6 et en deux points fixes sur chacune des droites a_1, a_2, a_3. Les courbes Γ' forment un système linéaire $|\Gamma'|$, triplement infini, de degré deux.

Entre les courbes des systèmes $|\Gamma|$, $|\Gamma'|$ existe une correspondance Ω dans laquelle sont homologues deux courbes appartenant à une même surface.

Soit Γ une courbe déterminée du système $|\Gamma|$. Les surfaces F découpent sur cette courbe Γ des groupes de deux points, par conséquent il y a ∞^1 surfaces F contenant cette courbe. Parmi ces surfaces se trouve la surface $Q+Q'$, donc ces ∞^1 surfaces coupent Q' suivant une même courbe Γ'. Les courbes Γ, Γ' jouant des rôles symétriques, la correspondance Ω est donc biunivoque.

Par deux points de Q passent ∞^1 courbes Γ formant un faisceau et ∞^2 surfaces F formant un réseau dont fait partie la surface $Q+Q'$. Les surfaces de ce réseau découpent donc sur Q les courbes Γ du faisceau considéré et sur Q' les courbes Γ' d'un faisceau. Ω fait donc correspondre aux courbes Γ d'un faisceau les courbes Γ' d'un faisceau et inversement.

La correspondance Ω est donc une homographie entre les systèmes linéaires $|\Gamma|$, $|\Gamma'|$.

Deux courbes Γ, Γ' homologues dans Ω se coupent en quatre points, situés sur la biquadratique γ_0, intersection des quadriques Q, Q'.

3. Reprenons la surface F_0 contenant une septième droite a_0 et soient Γ_0, Γ_0' les courbes qu'elle découpe sur les quadriques Q, Q'. La droite a_0 est une bisécante commune des courbes Γ_0, Γ_0', homologues dans Ω. Inversement, si a_0 est une droite s'appuyant en des couples de points distincts sur deux courbes homologues Γ_0, Γ_0' dans Ω, il existe une surface F_0 contenant cette droite. La courbe $\Gamma_0+\Gamma_0'$ appartient en effet à ∞^1 surfaces F dont l'une est la surface $Q+Q'$; celle de ces surfaces qui passe par un cinquième point de a_0 contient cette droite.

Les droites s'appuyant en des couples de points distincts sur des courbes Γ, Γ' homologues dans Ω forment un complexe Σ dont nous allons rechercher l'ordre.

Soient P un point quelconque, ϖ un plan passant par P, p une droite du faisceau (P, ϖ), P_1 et P_2 ses points de rencontre avec la conique γ, section de Q par le plan ϖ. Par les points P_1, P_2 passent ∞^1 courbes Γ formant un faisceau. Ω leur fait correspondre les courbes Γ' d'un faisceau; ces courbes découpent sur la conique γ', section de Q' par le plan ϖ, une involution g_5^1 d'ordre cinq. Les droites du faisceau

(P, ϖ) découpent sur γ' une involution g_2^1. Les involutions g_5^1, g_2^1 ont quatre couples en commun. Désignons par p' les droites du faisceau (P, ϖ) passant par ces couples. A la droite p, nous faisons correspondre ces quatre droites p'.

Inversement, à une droite p' correspondent quatre droites p coupant γ en des couples de points appartenant à des courbes Γ homologues de courbes Γ' coupant γ' aux points de cette conique situés sur p'.

La correspondance (4, 4) entre les droites p, p' possède huit droites unies, coupant γ, γ' en des couples de points situés sur des courbes Γ, Γ' homologues.

Soit R un des points de rencontre de la biquadratique γ_0, commune aux quadriques Q, Q', avec le plan ϖ. Soit P_1 le second point de rencontre de la conique γ avec la droite PR. Aux ∞^1 courbes Γ passant par P_1 et R correspondent ∞^1 courbes Γ' passant par R et par un second point P_2' qui, en général, n'appartient pas à γ'. Il existe une courbe de ce faisceau passant par le second point d'intersection de γ' avec la droite PR, par conséquent, les droites joignant P aux points d'intersection de γ_0 avec ϖ sont des droites unies de la correspondance rencontrée plus haut. Ces droites sont des solutions étrangères, car elles ne s'appuient pas en des couples de points distincts sur des courbes homologues Γ, Γ' dans Ω. Il en résulte que le complexe Σ est du quatrième ordre (1).

Le système $|F|$ contient dix surfaces dégénérées en deux quadriques contenant chacune trois des droites $a_1, a_2, \ldots, a_6$; le complexe Σ admet donc dix générations analogues à celle qui vient d'être étudiée.

4. Les raisonnements précédents sont valables que le système $|F|$ soit composé ou non, mais lorsque le système $|F|$ est composé, le complexe Σ dégénère, comme nous allons le faire voir.

(1) L'ordre du complexe Σ a déjà été déterminé par Cayley.

Supposons que le système $|F|$ soit composé au moyen d'une involution. Celle-ci est nécessairement du second ordre et nous la désignerons par I_2. Nous avons montré ailleurs ([2]) que les six droites $a_1, a_2, \ldots, a_6$ appartiennent nécessairement à un complexe linéaire Σ_1.

Rappelons qu'en rapportant projectivement les surfaces F aux hyperplans d'un espace linéaire à quatre dimensions S_4, on obtient une hyperquadrique image de l'involution I_2; cette hyperquadrique est générale et aux ∞^3 droites qu'elle contient correspondent ∞^3 quintiques gauches elliptiques C_1, ayant $a_1, a_2, \ldots, a_6$ comme trisécantes. Si deux courbes C_1 ont un point commun, elles ont un second; ces deux points forment un couple de l'involution I_2 et les deux courbes C_1 forment une courbe C.

Considérons une surface F_0 de $|F|$ contenant une septième droite a_0 (ne rencontrant pas les six premières). Soit Φ_0 la quadrique section de l'hyperquadrique de S_4 qui correspond à F_0 La quadrique Φ_0 possède une courbe de diramation Δ d'ordre huit, coupée en quatre points par les génératrices rectilignes de Φ_0. Aux sections planes de Φ_0 correspondent les courbes C situées sur F_0; aux génératrices rectilignes de Φ_0 correspondent deux faisceaux de courbes C_1 bisécantes.

A l'ensemble des courbes Γ_0, Γ_0' découpées sur F_0 par Q, Q' correspond une section plane de Φ_0 qui ne peut se réduire à deux droites. Le plan de cette section touche donc la courbe Δ en quatre points et il y a donc dix plans quadritangents à la courbe Δ.

Si la droite a_0 appartenait à l'involution I_2, il lui corres pondrait, sur Φ_0, une conique, car les courbes C appartenant à F_0 rencontreraient a_0 en deux couples de I_2. Cela est impossible, car a_0 ne peut appartenir totalement au système

([1]) *Sur les surfaces du quatrième ordre passant par six droites* (*Bulletin de la Société roy. des Sciences de Liége*, 1935, pp. 37-39). Le cas où les six droites appartiennent à un complexe linéaire avait été antérieurement étudié par M. Todd, *Configurations définited by six lines in space of three dimensions* (*Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1932-1933, t. 29, pp. 52-68).

des courbes C tracées sur F_0. Il en résulte qu'à la droite a_0 correspond sur Φ une courbe δ_0 du quatrième ordre, tangente à la courbe Δ en chaque point d'intersection. Une telle courbe a au plus un point double, donc a_0 contient au plus un couple de point de l'involution I_2.

5. Supposons en premier lieu que la droite a_0 contienne un couple P_1 P_2 de l'involution I_2. La courbe δ_0 qui lui correspond sur Φ_0 possède un point double P au point qui représente le couple P_1 P_2; elle est donc la section de Φ_0 par une quadrique φ. Celle-ci doit toucher Δ en chaque point de rencontre, elle touche donc cette courbe en huit points. A la courbe δ_0 correspond une courbe du vingtième ordre composée de la droite a_0 et d'une courbe a_0' d'ordre dix-neuf. La courbe a_0' passe par P_1, P_2 et rencontre encore a_0 aux huit points homologues des points de contact de la courbe Δ avec la quadrique φ. Ces huit points sont unis pour l'involution I_2.

Supposons maintenant que la droite a_0 ne contienne aucun couple de I_2. La courbe δ_0 qui lui correspond sur Φ_0 est dépourvue de point double et est rationnelle; c'est donc une courbe rencontrant les génératrices rectilignes d'un mode de Φ_0 en trois points, les génératrices de l'autre mode en un point. Par conséquent les courbes C_1 d'un des faisceaux de F_0 ont a_0 pour trisécante, les courbes C_1 de l'autre faisceau comme unisécante. D'autre part, δ_0 est tangente en huit points de la courbe Δ et par conséquent, a_0 contient huit points unis de l'involution I_2.

Inversement, soient P_1 P_2 un couple de I_2, a_0 la droite joignant les points P_1, P_2. Les surfaces F passant par P_1 passent en conséquence par P_2 et sont en nombre ∞^3; il y en a donc une qui passe encore par trois autres points distincts de a_0 et qui contient donc cette droite.

Soient d'autre part a_0 une trisécante d'une courbe C_1 déterminée. Les surfaces F coupent C_1 en deux points variables, formant une série g_2^1, puisque C_1 est elliptique. Par conséquent, les ∞^2 surfaces F passant par deux points de C_1 contiennent cette courbe et rencontrent a_0 en un seul point variable. Il y a donc une de ces surfaces F qui contient a_0.

On en conclut que si une droite a_0 appartient à une surface F, elle est déterminée par les points d'un couple de l'involution I_2 ou c'est une trisécante d'une courbe C_1.

6. On sait que la surface des trisécantes d'une quintique elliptique est une réglée elliptique du cinquième ordre. Représentons les droites de l'espace par les points d'une hyperquadrique V_4^2 d'un espace linéaire S_5 à cinq dimensions. Soient $A_1, A_2, \ldots, A_6$ les points qui représentent les droites $a_1, a_2, \ldots, a_6$ sur V_4^2. Par hypothèse, les droites a_1, $a_2, \ldots, a_6$ appartiennent à un complexe linéaire Σ_1, par conséquent les points $A_1, A_2, \ldots, A_6$ appartiennent à un hyperplan σ de S_5.

La réglée des trisécantes d'une courbe C_1 quelconque est représentée sur V_4^2 par une courbe elliptique C_1' du cinquième ordre passant par les points $A_1, A_2, \ldots, A_6$. D'autre part, une courbe elliptique du cinquième ordre normale appartient nécessairement à un espace à quatre dimensions; il en résulte que la courbe C_1' appartient à l'hyperplan σ. Les trisécantes des courbes C_1 appartiennent donc au complexe linéaire Σ_1.

On en conclut que *sept droites deux à deux gauches d'un complexe linéaire appartiennent à une surface du quatrième ordre*, résultat obtenu par M. Todd (1).

Dans le cas où le système $|F|$ est composé au moyen d'une involution I_2 d'ordre deux, le complexe Σ, du quatrième ordre, se décompose dans le complexe linéaire Σ_1 et dans le complexe Σ_2, lieu des droites déterminées par les couples de points de l'involution I_2. Ce complexe Σ_2 est donc du troisième ordre, comme l'avait déjà établi M. Todd (2).

(1) *Loc. cit.*
(2) *Loc. cit.*

En résumé, *les surface du quatrième ordre passant par six droites deux à deux gauches, forment un système linéaire quadruplement infini; les droites ne rencontrant pas les six premières et appartenant à ces surfaces engendrent un complexe du quatrième ordre. Si les six droites primitives appartiennent à un complexe linéaire, le complexe du quatrième ordre comprend ce complexe linéaire comme partie et est complété par un complexe du troisième ordre; le système formé par les surfaces du quatrième ordre considérées est composé au moyen d'une involution du second ordre et les droites du complexe cubique sont déterminées par les points des couples de cette involution.*

7. L'involution I_2 est engendrée par une transformation birationnelle T d'ordre dix-neuf (¹). Aux plans de l'espace, T fait correspondre des surfaces d'ordre dix-neuf passant cinq fois par les droites $a_1, a_2, \dots, a_6$, une fois par chacune des trente droites s'appuyant sur quatre des précédentes et trois fois par chacune des six cubiques générales ayant pour bisécantes $a_1, a_2, \dots, a_6$. Nous avons établi qu'une droite a_0 de Σ_1 ou de Σ_2 contient huit points unis de l'involution I_2; par conséquent, la surface unie de l'involution I_2 est du huitième ordre.

Liége, le 28 juin 1939.

(¹) Todd, *loc. cit.*