Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences).
Séance du 6 janvier 1945.

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Recherches sur la construction de surfaces algébriques irrégulières,

par Lucien GODEAUX
Membre de l'Académie.

Dans quelques notes récentes parues ici-même [1], nous avons utilisé la théorie des involutions appartenant à une surface algébrique et n'ayant qu'un nombre fini de points unis [2] pour construire de nouvelles surfaces algébriques irrégulières. Dans notre dernière note, nous avons fait allusion à une application un peu différente de la même théorie poursuivant le même but. Soient F une surface algébrique de genres p_a, p_g et I_2 une involution du second ordre appartenant à cette surface et ayant un nombre fini α de points unis. Désignons par F′ une surface algébrique de genres p'_a, p'_g image de cette involution. Nous avons les relations [3]

$$4(p_a + 1) = 8(p'_a + 1) - \alpha. \qquad p_g \geqslant p'_g \geqslant p'_a.$$

Si l'on a $p_a < p'_a$, la surface F est irrégulière. Ce résultat est atteint si l'on a

$$4(p'_a + 1) < \alpha.$$

Considérons une surface Ψ du quatrième ordre et un point O ne lui appartenant pas. Une droite p passant par O coupe Ψ en quatre points ; il existe sur p trois

(1) Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique, 1943 et 1944.

(2) Voir sur cet objet notre exposé sur *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Paris, Hermann, 1935).

(3) *Mémoire sur les surfaces algébriques doubles ayant un nombre fini de points de diramation* (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1914, pp. 289-312).

involutions du second ordre dont deux couples coïncident avec ces quatre points ; le lieu des conjugués de O dans ces involutions est une surface du sixième ordre ayant le point triple O, de genres $p_a = p_g = 3$. Cette surface Φ possède un point double conique en tout point double conique de Ψ. Lorsque Ψ est une surface de Kummer, la surface Φ a été considérée par G. Humbert [1] ; elle représente alors une involution du second ordre, ayant 28 points unis, appartenant à la surface qui représente les couples de points d'une courbe de genre trois, surface de genres $p_a = 0$, $p_g = 3$. On peut d'ailleurs transformer birationnellement Φ en une surface Φ_0 de S_6, intersection d'une hypersurface cubique et d'un cône dont les sections hyperplanes sont des surfaces de Veronèse. Cette surface Φ_0 possède $\alpha = 12 + \alpha'$ points doubles coniques, où α' est le nombre de points doubles coniques de Ψ.

Lorsque $\alpha' = 8$ et $\alpha' = 12$, c'est-à-dire $\alpha = 20$ et $\alpha = 24$, la remarque faite plus haut conduit à des surfaces F irrégulières, à condition toutefois que partant de Φ_0, on puisse démontrer l'existence de ces surfaces. Il n'en est malheureusement rien ; nous démontrons que lorsque Φ_0 possède 20 ou 24 points doubles coniques, elle ne peut représenter une involution du second ordre appartenant à une surface. Bien qu'il s'agisse d'un résultat négatif, il nous a cependant paru intéressant de publier nos recherches, les procédés utilisés pouvant être utiles dans d'autres cas.

Chemin faisant, nous avons également considéré le cas où Ψ est dépourvu de points doubles. La surface Φ_0 possède alors 12 points doubles coniques et est l'image d'une involution du second ordre appartenant à une surface régulière, que nous construisons. On pourrait

[1] *Sur une surface du sixième ordre liée aux fonctions abéliennes de genre trois* (Journal de Liouville, 1896, pp. 263-293).

également considérer le cas où Ψ possède quatre points doubles coniques, ce qui conduirait à une surface régulière également ; il nous a paru inutile de nous arrêter sur ce point.

1. Considérons une surface du quatrième ordre, Ψ, d'équation

$$\Psi(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv x_4^4\phi_0 + x_4^3\phi_1 + x_4^2\phi_2 + x_4\phi_3 + \phi_4 = 0$$

où ϕ_i est une forme algébrique de degré i en x_1, x_2, x_3. Par un point P n'appartenant pas à Ψ, menons une droite p coupant la surface en P_1, P_2, P_3, P_4. Les couples de points P_1, P_2 et P_3, P_4, par exemple, déterminent une involution du second ordre ; soit P′ le conjugué du point P dans cette involution. Les quatre points P_1, P_2, P_3, P_4 pouvant se répartir en deux couples de trois manières, il existera trois positions du point P′ sur la droite p. Le lieu du point P′ est une surface Φ du sixième ordre, d'équation

$$\Psi_1^2\Psi(x_1, x_2, x_3, x_4) - \Psi(y_1, y_2, y_3, y_4)\Psi_3^2 = 0,$$

y_1, y_2, y_3, y_4 étant les coordonnées du point P et Ψ_1, Ψ_3 étant donnés par

$$6\Psi_1 \equiv \left(y_1\frac{\partial}{\partial x_1} + y_2\frac{\partial}{\partial x_2} + y_3\frac{\partial}{\partial x_3} + y_4\frac{\partial}{\partial x_4}\right)^3 \Psi(x_1, x_2, x_3, x_4),$$

$$\Psi_3 \equiv \left(y_1\frac{\partial}{\partial x_1} + y_2\frac{\partial}{\partial x_2} + y_3\frac{\partial}{\partial x_3} + y_4\frac{\partial}{\partial x_4}\right) \Psi(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

Supposons que le point P coïncide avec le point $O \equiv O_4$ (0, 0, 0, 1), le plan $x_4 = 0$ du tétraèdre de référence coïncidant avec le plan polaire de O par rapport à Ψ. Cela revient à supposer $\phi_1 \equiv 0$ dans l'équation de cette surface. L'équation de Φ devient alors

$$16\phi_0x_4^2(x_4^4\phi_0 + x_4^2\phi_2 + x_4\phi_3 + \phi_4) \\ - (4x_4^3\phi_0 + 2x_4\phi_2 + \phi_3)^2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$8x_4^3\phi_0\phi_3 + 4x_4^2(4\phi_0\phi_4 - \phi_2^2) - 4x_4\phi_2\phi_3 - \phi_3^2 = 0.$$

La surface Φ possède les propriétés suivantes :

a) Elle admet comme courbe double la cubique γ_3 d'équations

$$x_4 = 0, \quad \phi_3(x_1, x_2, x_3) = 0 ;$$

b) Elle admet comme point triple le point O, le cône tangent en ce point étant le cône $\phi_3 = 0$ projetant de O la cubique γ_3 ;

c) Tout point double conique de la surface Ψ est double conique pour la surface Φ ;

d) La surface Φ contient les douze droites

$$\phi_3 = 0, \ 4\phi_0\phi_4 - \phi_2^2 = 0.$$

Lorsque la surface Ψ est une surface de Kummer, G. Humbert a montré que la surface Φ représentait les couples de points d'une courbe de genre trois, deux couples de cette courbe formant un groupe canonique ayant pour image un même point de la surface Φ.

Observons que l'équation de la surface Φ peut s'écrire sous la forme

$$8x_4^3\phi_0\phi_3 + 16x_4^2\phi_0\phi_4 - (2x_4\phi_2 + \phi_3)^2 = 0 ;$$

elle est donc l'enveloppe du système

$$\lambda^2\phi_0x_4^4 + \lambda x_4(2x_4\phi_2 + \phi_3) + 2x_4\phi_3 + 4\phi_4 = 0.$$

2. Les adjointes d'ordre $n - 4$ de la surface Φ sont les quadriques passant par la courbe γ_3 et par le point O ; elles se décomposent en un plan fixe $x_4 = 0$ et les plans passant par O. La surface Φ a donc le genre géométrique $p_g = 3$ et le genre linéaire $p^{(1)} = 4$.

Les biadjointes, d'ordre $2n - 8$, de la surface Φ sont les surfaces de quatrième ordre passant doublement par la courbe γ_3 et le point O ; elles sont décomposées en un plan fixe $x_4 = 0$ et en des surfaces cubiques ayant un point double en O et passant par γ_3. Ces surfaces découpent sur Φ le système bicanonique et, sur une courbe canonique, la série canonique complète. Il en résulte que la surface Φ est régulière ($p_a = 3$) et a le bigenre $P_2 = 7$.

La surface Φ présente les caractères

$$p^{(1)} = 4, p_a = p_g = 3, P_2 = 7.$$

Observons que le cône $\phi_3 = 0$, passant par γ_3, par les douze droites de la surface et tangent à celle-ci au point O, est une surface biadjointe ; par conséquent les douze droites de la surface et le domaine du point O forment une courbe bicanonique de la surface Φ.

3. Rapportons projectivement les surfaces cubiques passant par γ_3 et ayant un point double en O aux hyperplans d'un espace linéaire S_6 à six dimensions. A cet effet, faisons correspondre à la surface.

$$x_4(\lambda_{11}x_1^2 + \lambda_{22}x_2^2 + \ldots + \lambda_{12}x_1x_2) + \lambda_0\phi_3 = 0$$

l'hyperplan

$$\lambda_{11}X_{11} + \lambda_{22}X_{22} + \ldots + \lambda_{12}X_{12} + \lambda_0X_0 = 0.$$

A la surface Φ correspond une surface Φ_0 dont les équations sont

$$X_0^3 + 4X_0^2f_1 - 4X_0(4\phi_0f_2 - f_1^2) - 8\phi_0f_3 = 0, \tag{1}$$

et celles que l'on obtient en écrivant que le déterminant

$$\begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{12} & X_{22} & X_{23} \\ X_{13} & X_{23} & X_{33} \end{vmatrix} \tag{2}$$

est de caractéristique un. Dans l'équation (1), on a désigné par f_1, f_2, f_3 les fonctions que l'on obtient en remplaçant x_ix_k par X_{ik} respectivement dans ϕ_2, ϕ_4 et ϕ_3^2.

Les équations tirées du déterminant (2) représentent le cône V_3^4 obtenu en projetant du point O_0 ($X_0 \neq 0$, $X_{ik} = 0$) une surface de Veronèse. L'équation (1) représente une variété cubique V_5^3. La surface Φ_0, d'ordre 12, est l'intersection complète du cône V_3^4 et de l'hypersurface V_5^3 ; c'est un modèle bicanonique de la surface.

Le cône V_3^4 contient un réseau de cônes quadratiques ; ceux-ci déterminent sur Φ_0 les courbes canoniques, que nous désignerons par Γ. Le système des sections hyperplanes de Φ_0 est le système complet $|2\Gamma|$.

Nous désignerons également par Γ les courbes canoniques de la surface Φ, c'est-à-dire les sections de la surface par les plans passant par le point O. Sur la surface Φ, le système bicanonique $|2\Gamma|$ admet comme droites fondamentales les 12 droites de la surface. Celles de ces courbes qui passent par un point d'une, *a*, de ces droites, la contiennent et sont complétées par des courbes coupant *a* en deux points et formant un système linéaire de degré 10. Il en résulte qu'aux 12 droites de la surface Φ correspondent 12 points doubles coniques de la surface Φ_0. Nous désignerons ces points par $A_1, A_2, \ldots, A_{12}$.

Les points $A_1, A_2, \ldots, A_{12}$ appartiennent à l'hyperplan $X_0 = 0$, à l'hypersurface $f_3 = 0$ et à la surface de Veronèse Ω, section du cône V_3^4 par $X_0 = 0$. Ils appartiennent également à l'hypersurface.

$$4\phi_0 f_2 - f_1^2 = 0.$$

Observons que la section de Ω par l'hypersurface $f_3 = 0$ est une courbe Γ_0 du sixième ordre comptée deux fois. Un calcul simple montre que l'hyperplan tangent à V_5^3 en un point de cette courbe Γ_0 coïncide avec $X_0 = 0$. On en conclut que *les points doubles* $A_1, A_2, \ldots, A_{12}$ *appartiennent à un hyperplan qui touche la surface* Φ_0 *le long d'une courbe* Γ_0, *elliptique, du si-*

xième ordre. La courbe Γ_0 correspond au domaine du point triple O de la surface Φ.

4. Supposons qu'il existe une surface F contenant une involution du second ordre ayant 12 points unis et dont Φ_0 soit une surface image, les 12 points de diramation étant $A_1, A_2, \ldots, A_{12}$.

Nous avons établi que si entre deux surfaces de genres arithmétiques p_a, p'_a, il existe une correspondance (1, 2) possédant α points de diramation, on a

$$4(p'_a + 1) = 8(p_a + 1) - \alpha.$$

Actuellement, on a $p_a = 3$, $\alpha = 12$, d'où $p'_a = 4$.

Aux courbes canoniques Γ de Φ_0 correspondent des courbes du système canonique $|C|$ de F. Comme le genre géométrique p_g de F est au moins égal à 4, la dimension de $|C|$ est au moins égale à 3. Le système $|C|$ contient donc deux systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution. L'un est le réseau des transformées des courbes Γ ; l'autre est un système, que nous désignerons par $|C_0|$, qui a pour points-base les 12 points unis de l'involution.

Désignons par Γ'_0 les courbes qui correspondent sur Φ_0 aux courbes C_0, par $A_1, A_2, \ldots, A_{12}$ les courbes rationnelles de degré -2 équivalentes aux points doubles coniques $A_1, A_2, \ldots, A_{12}$. D'après la théorie des involutions, nous avons sur Φ_0 la relation fonctionnelle

$$2\Gamma \equiv 2\Gamma'_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_{12}.$$

Il en résulte que la courbe du second membre est une courbe bicanonique de Φ_0, c'est-à-dire une section hyperplane de Φ_0. Il doit donc exister un hyperplan passant par les 12 points doubles de Φ_0 et touchant cette surface le long d'une courbe Γ'_0. Il en résulte qu'il existe une seule courbe Γ'_0 et qu'elle coïncide avec Γ_0. La courbe C_0 étant unique, $|C|$ a la dimension 3 et le genre géométrique de F est $p_g = 4$. La surface F est régulière.

Le genre linéaire de F est d'autre part $p^{(1)} = 7$. Observons qu'entre la courbe elliptique Γ_0 et la courbe de genre sept C_0, existe une correspondance (1, 2) présentant 12 points de diramation. Ceci est bien d'accord avec la formule de Zeuthen.

L'existence des douze points doubles $A_1, A_2, \ldots, A_{12}$ et de la courbe Γ_0 suffit, comme nous l'avons établi, pour assurer l'existence de la surface F. Nous avons du reste étudié cette involution en partant de la surface F, mais sans remarquer la génération de la surface Φ donnée au début [1]. On peut prendre comme modèle projectif de F la surface d'équation

$$x_4^6 + 4x_4^4\phi_2 - 4x_4^2(4\phi_0\phi_4 - \phi_2^2) - 8\phi_0\phi_3^2 = 0. \qquad (1)$$

L'involution est engendrée sur cette surface par l'homologie

$$x_1' : x_2' : x_3' : x_4' = x_1 : x_2 : x_3 : -x_4.$$

La surface (1) passe doublement par la cubique $x_4 = 0$, $\phi_3 = 0$ et les 12 points unis de l'involution sont les points-pinces de la surface situés sur cette courbe.

Le bigenre de F est $P_2 = p_a + p^{(1)} = 11$. Il existe donc deux systèmes linéaires appartenant à l'involution et compris dans le système bicanonique $|2C|$: l'un, ∞^6, est formé des courbes transformées des courbes bicanoniques 2Γ de Φ ; l'autre a la dimension trois et pour points-base les points unis de l'involution.

La surface Φ_0, considérée comme une surface double

[1] *Remarque sur une involution du second ordre appartenant à une surface du sixième ordre* (Bull. de la Soc. roy. des Sc. de Liége, 1943, pp. 260-263) A la page 261, ligne 5, il faut lire $P_2 = 11$ au lieu de $P_2 = 10$, lapsus que le lecteur aura aisément corrigé, puisque $P_2 = p_a + p^{(1)}$.

ayant les points de diramation $A_1, A_2, \ldots, A_{12}$, *présente les caractères*

$$p^{(1)} = 7, p_a = p_g = 4, P_2 = 1.$$

Elle est birationnellement équivalente à une surface du sixième ordre possédant une cubique plane double.

5. Appelons γ'_3 la cubique plane double de F et observons que la substitution

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_4^2 x_1 & x_4^2 x_2 & x_4^2 x_3 & \phi_3 \end{pmatrix} \tag{1}$$

fait passer de l'équation de F à celle de Φ.

Les courbes canoniques de la surface F sont découpées par les quadriques passant par γ_3, donc formées du plan $x_4 = 0$ de cette courbe et des plans de l'espace. Les courbes bicanoniques sont découpées par les surfaces du quatrième ordre passant doublement par γ'_3, donc formées du plan $x_4 = 0$ et des surfaces cubiques passant par γ'_3.

Les systèmes linéaires compris dans le système bicanonique $|2C|$ et appartenant à l'involution sont découpés par les surfaces

$$\lambda_0 x_4^3 + x_4(\lambda_{11} x_1^2 + \lambda_{22} x_2^2 + \ldots + \lambda_{12} x_1 x_2) = 0,$$
$$x_4^2(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3) + \lambda \phi_3 = 0.$$

Aux courbes du second de ces systèmes, la substitution (1) fait correspondre les sections planes Γ_1 de Φ.

Aux courbes du premier système, correspondent sur Φ les courbes bicanoniques 2Γ de cette surface ; elles sont découpées par les biadjointes

$$\lambda_0 \phi_3 + x_4(\lambda_{11} x_1^2 + \lambda_{22} x_2^2 + \ldots + \lambda_{12} x_1 x_2) = 0,$$

comme on le constate en utilisant la substitution (1).

D'après la théorie des involutions, nous devons avoir sur Φ la relation fonctionnelle

$$4\Gamma \equiv 2\Gamma_1 + A_1 + A_2 + \ldots + A_{12}.$$

Les courbes 4Γ sont découpées sur Φ par les surfaces du sixième ordre passant quatre fois par O et deux fois par γ_3. Il y a donc une de ces surfaces passant par les 12 droites de Φ et touchant cette surface le long d'une de ses sections planes Γ_1. Cette surface détermine avec Φ un faisceau contenant une surface comprenant le plan de la section compté deux fois et complétée par une surface du quatrième ordre ayant un point triple en O et passant deux fois par la cubique γ_3. Celle-ci est à son tour formée du cône projetant γ_3 et O joint au plan $x_4 = 0$ de γ_3.

Inversement, considérons les surfaces

$$\begin{aligned} 8x_4^3\phi_0\phi_3 + 4x_4^2(4\phi_0\phi_4 - \phi_2^2) - 4x_4\phi_2\phi_3 - \phi_3^2 \\ + x_4\phi_3(\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2 + \lambda_3x_3 + \lambda_4x_4)^2 = 0, \end{aligned}$$

qui ont un point triple en O et passent deux fois par γ_3. En prenant

$$\lambda_4 = -8\phi_0,$$

on obtient les ∞^3 surfaces du sixième ordre ayant un point quadruple en O, passant deux fois par γ_3 et touchant Φ le long de la section de Φ par le plan

$$\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2 + \lambda_3x_3 - 8\phi_0x_4 = 0.$$

6. Jusqu'à présent, nous avons supposé que la surface du quatrième ordre Ψ dont nous sommes parti était dépourvue de points doubles. Supposons actuellement qu'elle possède huit points doubles coniques ; ceux-ci sont des points doubles coniques de la surface Φ, que nous désignerons par $B_1, B_2, \ldots, B_8$.

Si nous passons de Φ à la surface Φ_0, aux points $B_1, B_2, \ldots, B_8$ correspondent huit points doubles coniques que nous continuerons à désigner par les mêmes symboles. De plus, B_i désignera également la courbe rationnelle de degré -2 équivalente au point B_i.

La surface Φ_0 contient actuellement 20 points doubles coniques $A_1, A_2, \ldots, A_{12}, B_1, B_2, \ldots, B_8$. Supposons qu'elle représente une involution du second ordre I_2 appartenant à une surface F_1 et ayant 20 points unis correspondant à $A_1, A_2, \ldots, A_{12}, B_1, B_2, \ldots, B_8$. La formule que nous avons rappelée plus haut donne, pour le genre arithmétique de F_1, la valeur $p_a = 2$. D'autre part, on a $p^{(1)} = 7$ et par conséquent $P_2 = 9$.

Soit $|C_1|$ le système canonique de F_1 ; sa dimension est $p_g - 1 \geqslant 2$. Si $p_g > 3$, il existe au moins une courbe canonique C_{10} passant par les 20 points unis de I_2 et il ne peut précisément en exister qu'une, car $|C_1|$ a le degré 12. Soit alors Γ_{10} la courbe qui correspond à C_{10} sur Φ_0. On doit avoir, sur cette surface,

$$2\Gamma \equiv 2\Gamma_{10} + A_1 + A_2 + \ldots + A_{12} + B_1 + B_2 + \ldots + B_8.$$

Il en résulte qu'il devrait exister un hyperplan touchant Φ_0 le long de la courbe Γ_{10} et contenant les 20 points doubles. La courbe Γ_{10} devrait coïncider avec la courbe Γ_0 et sur la surface Φ, les points doubles B_1, $B_2, \ldots, B_8$ devraient être infiniment voisins de O, ce qui est absurde. Si la surface F_1 existe, son genre géométrique doit donc être $p_g = 3$.

Le système bicanonique $|2C_1|$ de F_1 contient deux systèmes linéaires appartenant à l'involution I_2 ; ce sont le système transformé du système bicanonique $|2\Gamma|$ de Φ, de dimension six, et un faisceau $|C_{11}|$, ayant pour points-base les 20 points unis de I_2.

Aux courbes C_{11} correspondent sur Φ_0 des courbes Γ_{11} satisfaisant (sur Φ_0 et sur Φ) à la relation fonctionnelle

$$4\Gamma \equiv 2\Gamma_{11} + A_1 + A_2 + \ldots + A_{12} + B_1 + B_2 + \ldots + B_8.$$

Les courbes Γ_{11} sont, d'après la formule de Zeuthen, de genre cinq.

La relation précédente, interprétée sur la surface Φ, signifie qu'il existe une surface du sixième ordre ayant le point O quadruple, la courbe γ_3 double, touchant Φ le long d'une courbe Γ_{11} et passant par les 12 droites de la surface. Il en résulte que les courbes Γ_{11} sont d'ordre six ; elles ne peuvent être des sections planes de Φ, car les huit points doubles de Ψ devraient se trouver sur l'axe du faisceau formé par les plans de ces sections. Les courbes Γ_{11} ne peuvent être irréductibles, car il n'existe pas de sextique gauche de genre cinq.

Les courbes C_{11} sont donc réductibles. Observons que les courbes 2C rencontrent la courbe C_0 en 12 points, par conséquent les courbes C_{11} ne rencontrent pas C_0 en dehors des points unis de I_2 homologues de $A_1, A_2, \ldots, A_{12}$. Il en résulte que le faisceau $|C_{11}|$ ne peut être composé au moyen d'un autre faisceau qui aurait nécessairement pour points-base les 12 points en question. Le faisceau $|C_{11}|$ possède donc une composante fixe et il est facile de voir que celle-ci ne peut être que C_0, courbe isolée sur la surface F_1. Nous désignerons par C_1' la partie variable des courbes C_{11}. Les courbes C_1 forment un faisceau ayant pour points-base les points unis de I_2 homologues de $B_1, B_2, \ldots, B_8$.

De ce qui précède, il résulte que les surfaces du sixième ordre inscrites dans Φ le long des courbes Γ_{11} comprennent comme partie le cône projetant γ_3 de O. Il existe donc ∞^1 surfaces cubiques passant par γ_3 et par O, touchant Φ en tout point d'intersection. Cela exige que ces surfaces aient un point double en O, car la courbe de contact de Φ avec chacune des surfaces cubiques considérées doit également être courbe de contact (simple) dans le voisinage de O. Appelons Γ_1' les courbes qui correspondent aux courbes C_1' sur Φ ou sur Φ_0. Les courbes

$$2\Gamma_1' + B_1 + B_2 + \ldots + B_8$$

doivent être des courbes bicanoniques de Φ. Mais alors, on aurait un faisceau d'hyperplans touchant Φ_0

en chaque point d'intersection et passant par les points doubles B_1, B_2, ..., B_8, ce qui est impossible puisque Φ_0 est d'ordre 12.

La surface F_1 ne peut donc exister.

7. Nous allons maintenant supposer que la surface Ψ possède 12 points doubles coniques. La surface Φ possède alors 12 points doubles coniques B_1, B_2, ..., B_{12}. A ces points correspondent sur Φ_0 douze points doubles coniques que nous désignerons par les mêmes symboles, de même que les courbes rationnelles de degré — 2 auxquelles ils sont équivalents.

La surface Φ_0 possède 24 points doubles coniques A_1, A_2, ..., A_{12}, B_1, B_2, ..., B_{12}. Supposons qu'il existe une surface F_2 contenant une involution I_2 d'ordre deux, ayant 24 points unis, représentée par Φ_0, les points de diramation étant les 24 points doubles de cette surface. Le genre arithmétique de F_2, calculé comme dans les cas précédents, est $p_a = 1$. On a d'autre part $p^{(1)} = 7$, donc $P_2 = 8$. Comme dans le cas précédent, on démontre que l'on a $p_g = 3$. Le système canonique $|C_2|$ de F_2 est donc un réseau.

Dans le système bicanonique $|2C_2|$ de F_2, il existe une courbe, C_{20}, passant par les 24 points unis de l'involution I_2. Il lui correspond sur Φ une courbe Γ_{20} de genre quatre. Il existe une surface du sixième ordre ayant un point quadruple en O, passant doublement par γ_3, contenant les 12 droites de Φ, touchant cette surface le long de Γ_{20}. De plus, cette courbe passe par les points B_1, B_2, ..., B_{12} et rencontre en un point chacune des douze droites de la surface. Le courbe Γ_{20} est d'ordre six ; elle ne passe pas par le point O.

On doit d'ailleurs avoir

$$4\Gamma \equiv 2\Gamma_{20} + A_1 + A_2 + \dots + A_{12} + B_1 + B_2 + \dots + B_{12}.$$

Supposons la courbe Γ_{20} irréductible. La surface du sixième ordre dont il vient d'être question et la surface Φ déterminent un faisceau de surfaces ayant comme base la cubique (double) γ_3, les 12 droites appartenant à Φ, le point triple O avec, pour cône tangent fixe, $\phi_3 = 0$; enfin la courbe Γ_{20} comptée deux fois. Le cône $\phi_3 = 0$ est fondamental pour ce faisceau et il existe donc une surface de celui-ci formée du cône $\phi_3 = 0$ et d'une surface cubique G, passant par γ_3 et touchant Φ le long de Γ_{20}.

La première polaire d'un point quelconque P par rapport à Φ est une surface du cinquième ordre passant par γ_3, par les points B_1, B_2, ..., B_{12}, et coupant encore la courbe Γ_{20} en 12 points. La développable circonscrite aux surfaces Φ et G le long de Γ_{20} est donc de classe 12. La première polaire de P par rapport à G est donc une quadrique rencontrant Γ_{20} en 12 points simples ; la surface G ne possède donc pas de point double sur la courbe Γ_{20}.

Soit G′ une surface cubique passant par γ_3 mais non par Γ_{20}. La surface du sixième ordre G + G′ passe doublement par γ_3 et touche G le long de Γ_{20} ; elle possède 12 points doubles sur Γ_{20} : les points de rencontre de Γ_{20} et de G′ non situés sur γ_3. Les surfaces Φ et G + G′ déterminent un faisceau de surfaces passant deux fois par γ_3 et touchant G le long de Γ_{20}. Chacune des surfaces de ce faisceau possède douze points doubles sur Γ_{20}. Celle des surfaces de ce faisceau qui touche en un point R de Γ_{20} une droite non tangente en ce point à G possède un point double en R et est unique. Les groupes de 12 points doubles des surfaces du faisceau forment donc sur Γ_{20} une série linéaire, car cette série est rationnelle et d'indice un.

Cela étant, observons que les surfaces cubiques passant par γ_3 sont en nombre ∞^{10} ; une de ces surfaces est G. Une autre de ces surfaces est formée du plan $x_4 = 0$ et de la quadrique Q à laquelle la courbe Γ_{20}, d'ordre six et de genre quatre, appartient. Il y a donc ∞^8 surfaces cubiques passant par γ_3 et ne contenant pas Γ_{20} ; elles découpent sur Γ_{20} la série complète g_{12}^8 des groupes de points doubles des surfaces du sixième ordre touchant G le long de Γ_{20}. Il existe par conséquent une de ces surfaces, soit G_0, passant par les points $B_1, B_2, \ldots, B_{12}$.

Les surfaces Φ et $G + G_0$ déterminant un faisceau de surfaces passant doublement par γ_3, touchant G le long de Γ_{20} et ayant des points doubles en $B_1, B_2, \ldots, B_{12}$. Celle Φ' de ces surfaces touchant en un point R de Γ_{20} une droite non tangente à G en ce point, passe doublement par Γ_{20}. Mais cela est impossible, car une section plane de Φ' serait une sextique elliptique possédant un faisceau de cubiques adjointes, déterminé par les sections de G, G_0 par le plan de la courbe considérée.

La courbe Γ_{20}, si elle existe, est réductible.

8. Sur la surface Φ_0, la courbe Γ_{20} est découpée par une hyperquadrique touchant la surface en tout point d'intersection. Si, la courbe Γ_{20} étant réductible, cette hyperquadrique est irréductible, la surface du sixième ordre touchant Φ le long de Γ_{20} est irréductible et le raisonnement précédent peut être repris. On est conduit à une absurdité. Il en résulte que l'hyperquadrique doit dégénérer en deux hyperplans touchant chacun Φ_0 le long d'une sextique elliptique et contenant chacun 12 des 24 points doubles A et B. Ces deux sextiques ont en commun six points et les courbes qui leur correspondent sur F_2, qui sont de genre sept, se coupent en 12 points. Or, ces deux courbes doivent former la courbe C_{20}, de genre 19. On est donc également conduit à une contradiction dans l'hypothèse d'une courbe Γ_{20} réductible.

Il résulte de tout ceci que la surface F_2 n'existe pas.

Remarquons que si la surface Ψ est une surface de

Kummer, la surface Φ possède 16 points doubles et est la surface considérée par G. Humbert. La surface Φ_0 possède 28 points doubles coniques et il existe 63 hyperplans touchant Φ_0 suivant des sextiques elliptiques et passant par 12 des 28 points doubles. On pourrait croire que l'on peut former la courbe Γ_{20} en prenant deux de ces courbes de contact n'ayant en commun que des points simples de la surface. Or, ceci est impossible, car deux des sextiques en question ont en commun six points dont quatre, ou six, sont des points doubles de Φ_0.

Liége, le 7 novembre 1944.