EXTRAIT DU *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liège.*
Séance du 16 novembre 1944. — N° 11.

Sur une propriété des surfaces d'ordre n circonscrites à un (n + 1)-èdre,

par LUCIEN GODEAUX.

Dans une note récente (1), nous avons étudié une surface du quatrième ordre possédant dix droites et dix points doubles, arêtes et sommets d'un pentaèdre complet. Cette surface contient un système linéaire triplement infini de sextiques de genre trois et peut être transformée en une surface du quatrième ordre possédant également dix droites et dix points doubles correspondant, les dix droites aux dix points doubles et les dix points doubles aux dix droites de la première surface. Cette seconde surface contient également un système linéaire de sextiques de genre trois; le long de chaque sextique tracée sur une des surfaces, il existe une surface cubique inscrite dans la surface.

Certaines des propriétés de ces surfaces du quatrième ordre s'étendent aux surfaces d'ordre n circonscrites à un $(n+1)$-èdre complet, c'est-à-dire passant par les droites intersections de $n+1$ plans deux à deux, quatre de ces plans ne passant jamais par un

(1) Sur une surface du quatrième ordre possédant dix points doubles (*Bull. Soc. roy. Sc. Liège*, 1944).

même point. Il existe notamment des surfaces inscrites dans la surface considérée le long de certaines courbes. C'est ce que nous nous proposons d'établir dans cette nouvelle note.

Dans le cas $n = 5$, on peut déduire des propriétés précédentes que la surface représente une involution du sixième ordre appartenant à une surface algébrique ; nous étudierons cette question dans un travail ultérieur.

1. Soient $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ les plans d'un $(n+1)$-èdre complet, quatre de ces plans ne passant donc jamais par un même point.

Les $n+1$ plans donnés se coupent suivant $\binom{n+1}{2}$ droites; nous désignerons par a_{ik} la droite commune aux plans α_i, α_k.

Les $n+1$ plans $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ se coupent trois à trois suivant $\binom{n+1}{3}$ points. Le point commun aux plans α_i, α_k, α_l sera désigné par A_{ikl}.

Une droite a_{ik} contient $n-1$ points A_{ik0}, $A_{ik1}, \ldots, A_{ikn}$, c'est-à-dire les $n-1$ points dont le troisième indice est différent de i, k.

Par le point A_{ikl}, passent les trois droites a_{ik}, a_{il}, a_{kl}.

Un groupe de n des plans $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ constitue une surface d'ordre n passant par les $\binom{n+1}{2}$ droites a_{ik}. On peut former $n+1$ de ces groupes de n plans et l'on a par conséquent $n+1$ surfaces d'ordre n circonscrites au $(n+1)$-èdre donné. Ces surfaces appartiennent à un système linéaire $|F|$, dont nous désignerons la dimension par r.

Les surfaces F rencontrent le plan α_n suivant n droites a_{0n}, $a_{1n}, \ldots, a_{n-1n}$ et par conséquent les ∞^{r-1} surfaces F passant par un point de α_n comprennent ce plan comme partie ; elles sont complétées par les surfaces d'ordre $n-1$ circonscrites au n-èdre complet formé par les plans $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$. Parmi ces dernières surfaces, il en est ∞^{r-2} comprenant le plan α_{n-1} comme partie et complétées par les surfaces d'ordre $n-2$ circonscrites au $(n-1)$-èdre complet formé par les plans $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-2}$ En continuant ce raisonnement, on parvient finalement à ∞^{r-n+3}surfaces cubiques circonscrites à un tétraèdre. On a donc $r-(n-3) = 3$ et par suite $r = n$.

Les surfaces d'ordre n *circonscrites à un* (n+1) *-èdre complet forment un système linéaire de dimension* n ; *les* n+1 *surfaces formées par les groupes de* n *faces du* (n+1) *-èdre appartiennent à ce système.*

Les points A_{ikl} sont évidemment doubles coniques pour les surfaces F et le cône tangent au point A_{ikl} passe par les droites a_{ik}, a_{il}, a_{kl}.

2. Désignons par C les sections planes d'une surface F irréductible et, en particulier, désignons par $C_0, C_1, \ldots, C_n$ les sections de cette surface par les plans $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Sur cette surface, chacun des points doubles A_{ikl} est équivalent à une courbe rationnelle de degré -2 que nous désignerons par le même symbole A_{ikl}.

La section de la surface par un plan passant par la droite a_{01}, par exemple, se compose de cette droite et d'une courbe d'ordre $n-1$ rencontrant la droite aux points $A_{012}, A_{013}, \ldots, A_{01n}$. Cette courbe engendre donc un faisceau de degré zéro. Si l'on exprime que le degré de la section plane considérée est égal à n, on trouve que la droite a_{01} a le degré $-(n-2)$. Il en est de même des autre droites a_{ik}.

On a les $n+1$ relations fonctionnelles

$$C_i \equiv \sum_k a_{ik} + \sum_{k,l} A_{ikl}, \qquad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

On en déduit, par addition,

$$(n+1)\, C \equiv 2 \sum a_{ik} + 3 \sum A_{ikl}, \tag{1}$$

les sommations s'étendant à toutes les valeurs des indices i, k, l.

3. Deux surfaces F ont en commun, en dehors des droites a_{ik}, une courbe K d'ordre

$$n^2 - \binom{n+1}{2} = \binom{n}{2},$$

passant simplement par les points A_{ikl}.

Sur une surface F, une courbe K satisfait à la relation fonctionnelle

$$nC \equiv K + \sum a_{ik} + 2 \sum A_{ikl}. \tag{2}$$

Les courbes K ne rencontrent pas les droites a_{ik} (en dehors des points donbles de la surfaces).

Sur une surface F, les courbes K forment un système linéaire $|K|$ de degré

$$n \binom{n}{2} - 2 \binom{n+1}{3} = \binom{n}{3}.$$

Considérons une courbe K, intersection de deux surfaces F_1, F_2 du système $|F|$. La série canonique de cette courbe K est découpée, d'après un théorème de Noether-Castelnuovo, par les surfaces d'ordre $2n-4$ passant par les droites a_{ik} et ne passant pas par K, c'est-à-dire ne comprenant pas comme partie une des surfaces F du faisceau déterminé par F_1, F_2.

Les surfaces d'ordre $2n - 4$, linéairement indépendantes, satisfaisant à ces conditions, sont au nombre de

$$\binom{2n-1}{3} - 2\binom{n-1}{3} - \binom{n+1}{3} - (n-2)\binom{n+1}{2} =$$
$$= \frac{1}{6}(2n+1)(n-2)(n-3).$$

Les courbes K sont donc de genre $\frac{1}{6}(2n+1)(n-2)(n-3)$.

Dans le faisceau de surfaces F déterminé par F_1, F_2, se trouve une surface comprenant comme partie un quelconque des plans $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Cette surface est complétée par une surface d'ordre $n-1$ passant par la courbe K. Celle-ci appartient donc à $n+1$ surfaces d'ordre $n-1$.

Le système complet $|K|$, sur une surface F, a la dimension $n-1$ et, d'après la remarque qui vient d'être faite, il est découpé entièrement par les ∞^{n-1} surfaces d'ordre $n-1$ circonscrites au n—èdre complet formé par n quelconques des plans $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

4. Considérons une courbe K irréductible sur une surface F irréductible. Les surfaces d'ordre $n-1$ passant par la courbe K et dont l'existence vient d'être démontrée, découpent sur F des courbes K_1 satisfaisant à la relation fonctionnelle

$$(n-1)C \equiv K + K_1 + \sum A_{ikl}. \qquad (3)$$

Des relations (1) et (2), on déduit

$$C + K \equiv \sum a_{ik} + \sum A_{ikl}.$$

Des relations (2) et (3), on déduit

$$C + K_1 \equiv \sum a_{ik} + \sum A_{ikl}.$$

Par conséquent, on a

$$K \equiv K_1,$$

c'est-à-dire que les surfaces d'ordre $n-1$ passant par une courbe K découpent sur F le système linéaire $|K|$ des intersections de la surface F considérée avec les autres surfaces du système $|F|$. En particulier, il existe une surface d'ordre $n-1$ inscrite dans la surface F le long de chaque courbe K.

La relation fonctionnelle (3) devient

$$(n-1)C \equiv 2K + \sum A_{ikl}.$$

Désignons par Φ la surface d'ordre $n-1$ inscrite dans la surface F le long d'une courbe K déterminée. La première polaire d'un point P quelconque par rapport à F coupe la courbe K, en dehors des points A_{ikl}, en

$$\delta = (n-1)\binom{n}{2} - \binom{n+1}{3}$$

points. La développable engendrée par les plans tangents à F aux points de la courbe K est donc de classe δ.

La première polaire de P par rapport à Φ ne passe pas en général par les points A_{ikl} et coupe K en $(n-2)\binom{n}{2}$ points parmi lesquels se trouvent les δ points en lesquels les plans tangents à F, donc à Φ, passent par P. En un autre point de rencontre, le plan tangent à Φ doit être indéterminé, puisque P est choisi arbitrairement. On en conclut que la surface Φ possède

$$(n-2)\binom{n}{2} - (n-1)\binom{n}{2} + \binom{n+1}{3} = \binom{n}{3}$$

points doubles sur la courbe K.

Une surface F et une courbe K *sur cette surface F étant choisies, il existe une surface d'ordre* n-1 *inscrite dans la surface le long de cet e courbe; cette surface possède* $\binom{n}{3}$ *points doubles sur cette courbe.*

5. Rapportons projectivement les surfaces F aux hyperplans d'un espace linéaire S_n à n dimensions. Aux points de l'espace correspondent ceux d'une variété V à trois dimensions et d'ordre $\binom{n}{2}$, égal au degré du système $|K|$ sur une surface F.

Il existe ∞^{n-1} surfaces F touchant au point A_{ikl} une droite p passant par ce point Au point infiniment voisin de A_{ikl} sur p correspond donc un point simple P de V. Lorsque la droite p décrit la gerbe de sommet A_{ikl}, le point P décrit un plan, car deux surfaces F se coupent suivant une courbe K ayant un point simple en A_{ikl}. Ce plan sera désigné par β_{ikl}; il est simple pour la variété V.

Considérons maintenant une droite p s'appuyant sur la droite a_{ik}, le point d'appui étant distinct des points A_{ikl} appartenant à la droite. Les ∞^{n-1} surfaces F touchant p en son point d'appui sur a_{ik} sont coupées par le plan $a_{ik}\,p$, en dehors de a_{ik}, suivant une courbe d'ordre $n-1$ ayant n points de rencontre fixes avec a_{ik} et comprenant par suite cette droite. Les surfaces F considérées touchent donc le plan $a_{ik}\,p$ tout le long de a_{ik}. Aux points infiniment voisins de a_{ik} situés dans ce plan correspond donc sur V un seul point P. Ces surfaces F forment un système linéaire dont le degré est égal à celui du système $|K - a_{ik}|$ sur une surface F, c'est-à-dire à

$$\binom{n}{3} - (n-2).$$

Il en résulte que le point P est multiple d'ordre $n-2$ pour la variété V.

Lorsque la droite p varie, le point P décrit une droite que nous désignerons par b_{ik}; elle est multiple d'ordre $n-2$ pour V.

Un plan β_{ikl} contient les trois droites b_{ik}, b_{il}, b_{kl}. Par une droite b_{ik} passent les n plans β_{ikl} où l prend celles des valeurs $0, 1, \ldots, n$ qui sont distinctes de i, k.

Deux plans β_{ikl} ne se rencontrent évidemment pas en dehors éventuellement de droites b_{ik}.

La variétés V *d'ordre* $\binom{n}{3}$, *contient* $\binom{n+1}{3}$ *plans simples et* $\binom{n+1}{2}$ *droites multiples d'ordres* $n-2$. *Un de ces plans contient trois de ces droites et par une de ces droites passent* $n-1$ *de ces plans.*

6. Une section hyperplane F′ de la variété V est birationnellement identique à une surface F; elle possède $\binom{n+1}{2}$ points multiples d'ordre $n-2$ et $\binom{n+1}{3}$ droites simples, chaque droite contenant trois points multiples et chaque point multiple appartenant à $n-1$ droites.

Les sections hyperplanes de la surface F′ correspondent aux courbes K de la surface F homologue; nous les désigneront par le même symbole. Nous désignerons également par C les courbes d'ordre $\binom{n}{2}$ qui correspondent sur F′ aux sections planes de F.

Sur la surface F′, les courbes C, d'ordre $\binom{n}{2}$ et de genre $\binom{n-1}{2}$, passent simplement par les points multiples de la surface, mais ne rencontrént pas les droites de celle-ci.

Des relations fonctionnelles établies plus haut, on déduit

$$3\,K \equiv (n-2)\,C + \sum a_{ik}.$$

Il en résulte qu'*il existe une hypersurface cubique inscrite dans la surface* F′ *le long de toute courbe* C.

Liége, le 11 août 1944.

M. HAYEZ, Impr. de l'Académie royale, 112, rue de Louvain, Bruxelles
(Domicile légal : rue de la Chancellerie, 4)