Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences).
Séance du 1er Août 1945

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur la construction de surfaces canoniques de l'espace ordinaire,

par Lucien GODEAUX
Membre de l'Académie.

M. Enriques a appelé à plusieurs reprises l'attention sur l'intérêt qu'il y a à construire des surfaces algébriques dont le système canonique est constitué par les sections hyperplanes, surfaces que l'on appelle souvent « surfaces canoniques » et que l'on pourrait appeler « surfaces projectivement canoniques » pour les distinguer des surfaces canoniques d'une variété algébrique à trois dimensions. Dans ses *Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche* (1), M. Enriques est revenu sur cette question et particulièrement sur les surfaces canoniques de genre $p_g = 4$, qui appartiennent à l'espace à trois dimensions et dont le système canonique coïncide avec celui des sections planes. Une telle surface possède en général une courbe double et un certain nombre de points triples, triples également pour la courbe double. M. Enriques avait établi que dans le cas où la surface est d'ordre sept, elle possède une courbe double d'ordre sept ayant un point triple et que, dans le cas où la surface est d'ordre huit, elle possède une courbe double d'ordre douze et quatre points triples.

(1) Rédigées par M. L. Campedelli (Padoue, Cedam, 1932). Voir pages 316 à 319.

Nous avons pu récemment construire ces surfaces ([1]) et construire de même une surface canonique d'ordre neuf. Celle-ci possède une courbe double d'ordre 18 et dix points triples([2]). Nous avons pu atteindre ce but en utilisant la théorie des involutions du second ordre, appartenant à une surface algébrique et n'ayant qu'un nombre fini de points unis, que nous avions développée dans des travaux antérieurs ([3]). Dans les trois notes qui viennent d'être citées, la méthode suivie était la même, mais l'application de cette méthode présentait de notables différences, au point que nous avons cru préférable de ne pas réunir nos recherches dans un même travail. Dans cette nouvelle note, nous avons cherché à dégager la méthode générale et à indiquer dans quels cas elle peut être appliquée. L'application se complique d'ailleurs rapidement lorsque l'ordre de la surface envisagée croît ; nous nous sommes bornés, en terminant, à l'application à une surface du dixième ordre, qui possède une courbe double d'ordre 25 et 20 points triples ([4]).

1. Supposons qu'il existe une surface algébrique F, irréductible, dont les sections planes forment le système canonique complet. Si n est l'ordre de F et $p^{(1)}$ son genre linéaire, on a $p^{(1)} - 1 = n$ et les sections planes de F sont de genre $n + 1$. Il en résulte que la surface F

([1]) *Construction d'une surface canonique du septième ordre* (Bulletin de la Société des Sciences de Liège, 1944, pp. 94-97) ; *Construction d'une surface canonique du huitième ordre* (Bulletin des Sciences mathématiques, 1944, p. 132-144).

([2]) *Construction d'une surface canonique du neuvième ordre* (Bulletin de l'Académie de Belgique, 1944, pp. 202-212).

([3]) *Mémoire sur les surfaces algébriques doubles ayant un nombre fini de points de diramation* (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1914, pp. 289-312) ; *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Paris, Hermann, 1935).

([4]) Signalons en passant que M. Burniat a récemment construit une surface canonique du dixième ordre appartenant à un espace à quatre dimensions (Bulletin de la Société des Sciences de Liège, 1945).

possède une courbe double D d'ordre $\frac{1}{2}n(n - 5)$. Nous supposerons que la surface F possède en outre ν points triples $P_1, P_2, \ldots, P_\nu$, triples également pour la courbe double D.

Les surfaces d'ordre $n - 4$, adjointes à la surface F, sont formées d'une surface fixe Φ, d'ordre $n - 5$, et des plans de l'espace. La surface Φ passe simplement par la courbe double D et possède des points doubles aux ν points triples $P_1, P_2, \ldots P_\nu$ de D.

Supposons qu'il existe une surface Ψ, du cinquième ordre, passant simplement par les points $P_1, P_2, \ldots, P_\nu$, mais non par la courbe D. Cette surface rencontre la courbe D, en dehors de $P_1, P_2, \ldots, P_\nu$, en

$$\mu = \frac{5}{2}n(n - 5) - 3\nu$$

points $R_1, R_2, \ldots, R_\mu$.

Les surfaces F et $\Phi + \Psi$ déterminent un faisceau de surfaces d'ordre n, touchant la surface Φ le long de la courbe D, ayant des points triples en $P_1, P_2, \ldots, P_\nu$ et des points doubles en $R_1, R_2, \ldots, R_\mu$.

2. Inversement, donnons-nous une surface Φ, d'ordre $n - 5$, possédant ν points doubles $P_1, P_2 \ldots, P_\nu$ et une courbe D, d'ordre $\frac{1}{2}n(n - 5)$, tracée sur Φ, ayant des points triples en $P_1, P_2 \ldots, P_\nu$. Supposons qu'il existe une surface F_0, d'ordre n, touchant la surface Φ le long de la courbe D et ayant des points triples en $P_1, P_2, \ldots, P_\nu$.

La première polaire d'un point quelconque P par rapport à Φ est une surface d'ordre $n - 6$ passant par les points $P_1, P_2, \ldots, P_\nu$ et coupant encore la courbe D, en dehors de ces points, en

$$\delta = \frac{1}{2}n(n - 5)(n - 6) - 3\nu$$

points. En chacun de ces points le plan tangent à Φ

et par suite à F_0 passe par P. Par conséquent, la développable lieu des plans tangents à Φ et à F_0 le long de la courbe D est de classe δ.

La première polaire du point P par rapport à F_0 est une surface d'ordre $n - 1$ ayant des points doubles en $P_1, P_2, \ldots, P_\nu$. Cette polaire coupe encore D en

$$\frac{1}{2} n(n - 5)(n - 1) - 6\nu$$

points. De ces points, δ sont ceux en lesquels le plan tangent à F_0 et à Φ passe par P. Soit R un des points restants. En R, le plan tangent à F_0 doit être indéterminé, sans quoi il serait tangent à Φ, ce qui est impossible. Le point R doit donc être double pour la surface F_0.

Ainsi, la surface F_0 possède, sur la courbe D, un groupe G de

$$\frac{1}{2} n(n - 1)(n - 5) - 6\nu - \frac{1}{2} n(n - 5)(n - 6) + 3\nu = \mu$$

points doubles.

Supposons encore qu'il existe une surface Ψ, du cinquième ordre, passant simplement par les points $P_1, P_2, \ldots, P_\nu$, mais non par la courbe D. Considérons encore le faisceau de surfaces d'ordre n déterminé par les surfaces F_0 et $\Phi + \Psi$. Les surfaces de ce faisceau touchent F_0 et Φ le long de la courbe D et chacune d'elles possède un groupe G de μ points doubles sur cette courbe.

Soient R un point de D, r une droite passant par ce point et non tangente à F_0 en ce point. Il existe une surface du faisceau tangente en R à la droite r et cette surface possède nécessairement un point double en R. On voit donc que les ∞^1 groupes G de points doubles des surfaces du faisceau sur la courbe D forment sur celle-ci une série d'indice un.

D'autre part, les groupes G sont en correspondance biunivoque avec les surfaces du faisceau et forment donc une série rationnelle d'indice un, donc une série linéaire $|G|$.

La série $|G|$ comprend le groupe de μ points découpé par la surface du cinquième ordre Ψ sur la courbe D en dehors des points $P_1, P_2, \ldots P_\nu$, points qui sont doubles pour la surface $\Phi + \Psi$ du faisceau.

3. Supposons enfin qu'il soit possible de trouver une surface F_0 d'ordre n, touchant Φ le long de la courbe D, ayant des points triples en $P_1, P_2, \ldots P_\nu$ et dont le groupe G de μ points doubles situés sur la courbe D appartienne à une surface du cinquième ordre Ψ passent simplement par les points $P_1, P_2, \ldots, P_\nu$, mais ne contenant pas D. Dans ces conditions, les surfaces du faisceau déterminé par les surfaces F_0 et $\Phi + \Psi$ ont le même groupe G de μ points doubles sur la courbe D.

Il existe une surface de ce faisceau touchant en un point R de D, simple pour la surface F_0, une droite r non tangente en ce point à F_0. Cette surface, F, possède un point double en R.

La première polaire d'un point P par rapport à F coupe D en δ points, simples pour la surface, en lesquels le plan tangent passe par P, aux points $P_1, P_2, \ldots, P_\nu$ (comptés chacun six fois), aux points du groupe G et au point R ; par conséquent, cette première polaire contient la courbe D. Comme le point P a été choisi arbitrairement, il en résulte que la courbe D est double pour la surface F, qui est ainsi construite.

La construction de la surface F est ainsi ramenée à celle d'une surface F_0, du même ordre, satisfaisant aux conditions suivantes :

a) La surface F_0 touche une surface Φ d'ordre $n - 5$ le long d'une courbe D, d'ordre $\frac{1}{2}n(n-5)$ et possède ν points triples $P_1, P_2, \ldots, P_\nu$, triples pour la courbe D et doubles pour la surface Φ ;

b) Il existe une surface Ψ du cinquième ordre, ne contenant pas D, passant par les points $P_1, P_2, \ldots, P_\nu$ et par les points du groupe G des μ points doubles de F_0 sur la courbe D.

Observons qu'à ces conditions, il faut ajouter la suivante :

c) Il n'existe aucune surface d'ordre $n - 4$, passant simplement par la courbe D et doublement par les points $P_1, P_2, \ldots, P_\nu$, irréductible ou réductible, ne contenant pas Φ comme partie.

L'existence d'une telle surface impliquerait en effet celle d'une courbe canonique de F, distincte des sections planes de cette surface.

4. Sur la surface Φ, chacun des ν points doubles $P_1, P_2, \ldots, P_\nu$ de cette surface est équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à une courbe rationnelle de degré -2 ; nous désignerons par $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_\nu$ les courbes équivalentes respectivement aux points $P_1, P_2 \ldots, P_\nu$.

Désignons par C les sections planes de la surface Φ. Sur cette surface, la courbe D rencontre chacune des courbes $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\nu$, en trois points ; elle satisfait donc à la relation fonctionnelle

$$nC \equiv 2D + 3(\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_\nu). \qquad (1)$$

De cette relation, on déduit que le nombre [C, D] de points d'intersection d'une courbe C et de la courbe D est donné par

$$[C, D] = \frac{1}{2} n(n - 5) ;$$

c'est évidemment l'ordre de la courbe D.

Le degré [D, D] du système |D| déterminé par D, est égal à

$$[D, D] = \frac{1}{4} n^2(n - 5) - \frac{9}{2}\nu.$$

La surface Φ n'est assujettie qu'à posséder ν points doubles coniques $P_1, P_2, \ldots, P_\nu$. Nous serons amené à supposer que les seules singularités qu'elle possède éventuellement au dehors de ces points doubles sont aussi des points doubles coniques. Dans ces conditions, le système canonique de Φ est $|(n-9)C|$. Les adjoints $|C'|$, $|D'|$ à $|C|$ et à $|D|$ satisfont à la relation

$$(n-1)C + C' \equiv D + D' + 3(\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_\nu)$$

et on a par suite

$$D' \equiv D + (n-9)C.$$

Si π est le genre de la courbe D, on a donc

$$2\pi - 2 = [D', D] = [D, D] + (n-9)[C, D],$$

d'où

$$\pi = \frac{3}{8}n(n-5)(n-6) - \frac{9}{4}\nu + 1.$$

Les nombres $[D, D]$ et π étant des entiers, on est conduit aux hypothèses suivantes :

1) n est pair. Alors ν est nécessairement multiple de 4.

2) n est de la forme $8m + 5$. Alors ν est encore multiple de 4.

3) n est de la forme $8m + 1$. Dans ce cas, ν est de la forme $4\epsilon + 2$.

4) n est de la forme $4m + 3$. Dans cette hypothèse, ν est nécessairement impair.

Nous ne considérerons que le premier cas et nous poserons
$$n = 2m, \qquad \nu = 4\epsilon.$$

5. Si la surface F_0 et par conséquent la courbe D existent, il en est de même de la courbe

$$D_0 \equiv D + \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_\nu$$

et cette courbe satisfait à la relation fonctionnelle

$$2mC \equiv 2D_0 + \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_\nu. \qquad (2)$$

Il existe une surface d'ordre n touchant la surface Φ le long de chaque courbe D_0.

Il résulte d'un théorème que nous avons établi dans notre *Mémoire sur les surfaces doubles*, cité plus haut, que la surface Φ est l'image d'une involution I_2, d'ordre deux, appartenant à une certaine surface Φ^*. Cette involution possède $\nu = 4\epsilon$ points unis, correspondant aux ν points doubles de la surface Φ.

Soient C^* les courbes de Φ^* qui correspondent aux courbes C de Φ et D_0^* celles qui correspondent aux courbes D_0. D'après nos résultats, la relation (2) donne, sur la surface Φ^*,

$$mC^* \equiv D_0^*.$$

Les courbes D^* de Φ^*, transformées des courbes D de Φ, sont des courbes D_0^* particulières, ayant des points triples aux $\nu = 4\epsilon$ points unis de I_2.

Soit λ un entier positif inférieur à m. Sur la surface Φ^*, le système $|(m - \lambda)C^*|$ est certainement transformé en lui-même par la transformation birationnelle involutive de Φ^* en soi génératrice de l'involution I_2. Il contient un ou deux systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution I_2. L'un est formé des transformées des courbes $(m - \lambda)C$ de Φ. Si le second existe, il est formé de courbes que nous désignerons par D_λ^* ; ces courbes passent par les $\nu = 4\epsilon$ points unis de I_2 et il leur correspond, sur Φ, des courbes D_λ satisfaisant à la relation fonctionnelle

$$2(m - \lambda)C \equiv 2D_\lambda + \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_\nu. \tag{3}$$

Il existe une surface d'ordre $2(m - \lambda)$ touchant la surface Φ le long de chaque courbe D_λ ; ces courbes passent par les points $P_1, P_2, \dots, P_\nu$.

Inversement, s'il existe sur Φ des courbes D_λ satisfaisant à la relation fonctionnelle (3), la surface Φ est l'image d'une involution du second ordre, ayant ν points unis, appartenant à une surface Φ^*. On en déduit alors l'existence des courbes D^*_λ, passant simplement par les $\nu = 4\epsilon$ points unis de l'involution et, éventuellement, l'existence des courbes D^* passant trois fois par ces points. L'existence de la surface F_0 découle de celle d'une courbe D^* par l'intermédiaire de la relation (1).

6. Nous avons vu qu'il ne pouvait exister une adjointe à F d'ordre $n - 4 = 2m - 4$ ne comprenant pas Φ comme partie, c'est-à-dire une surface d'ordre $2m - 4$ passant par D et ayant des points doubles en P_1, $P_2, \ldots, P_\nu$. Supposons au contraire qu'une telle surface existe. Elle coupe alors Φ, en dehors de D, suivant une courbe Δ d'ordre $(m - 4)\ (2m - 5)$ et on a

$$(2m - 4)C \equiv D + \Delta + 2(\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_\nu).$$

En multipliant les deux membres de cette relation par 2 et en tenant compte de la relation (1), on a

$$2(m - 4)C \equiv 2\Delta + \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_\nu.$$

Pour $\lambda = 4$, la relation (3) donne

$$2(m - 4)C \equiv 2D_4 + \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_\nu,$$

d'où, par comparaison avec la relation précédente,

$$2\Delta \equiv 2D_4.$$

On ne peut déduire de cette relation $\Delta \equiv D_4$ que si le diviseur de Severi de la surface Φ est impair, mais dans tous les cas, si les courbes D_4 n'existent pas. les surfaces d'ordre $2m - 4$ adjointes à F et ne comprenant pas Φ comme partie, ne peuvent exister.

Observons que si les courbes D_λ existent, il en est de même des courbes

$$D_{\lambda-1} \equiv C + D_\lambda,$$

par conséquent, les courbes D_5, D_6, ..., D_{m-1} ne peuvent exister. Cela signifie que les systèmes linéaires

$$|C^*|, \ |2C^*|, \ldots, \ |(m-4)C^*|$$

ont respectivement même dimension que les systèmes linéaires

$$|C|, \ |2C|, \ldots, \ |(m-4)C|.$$

Supposons que les courbes D_3 existent. Le long d'une de ces courbes, passant par les $\nu = 4\epsilon$ points doubles de Φ, il y a une surface d'ordre $2(m-3)$ touchant la surface Φ. Soit ϕ une de ces surfaces ; supposons qu'elle possède ν' points doubles coniques sur la courbe D_3. Celle-ci est d'ordre $(m-3)(2m-5)$ et en calculant de deux manières différentes la classe de la développable lieu des plans tangents aux surfaces ϕ, Φ, d'une manière analogue à ce qui a été fait plus haut pour les surfaces F_0, Φ, on trouve la relation

$$\nu = (m-3)(2m-5) + \nu'.$$

Cela étant, supposons que l'on connaisse une surface ϕ, d'ordre $2(m-3)$, qui soit l'image d'une involution d'ordre deux, n'ayant qu'un nombre fini $\nu_0 \geqslant \nu'$ de points unis, appartenant à une surface algébrique. La surface ϕ possède alors, aux points de diramation, des points doubles coniques. S'il est possible de trouver sur cette surface ϕ une courbe d'ordre $(m-3)(2m-5)$, le long de laquelle une surface d'ordre $2m-5$ touche ϕ, on pourra prendre cette surface comme surface Φ et il restera à déterminer la courbe D.

7. Nous allons appliquer ce qui précède au cas où la surface F cherchée est d'ordre 10. On a donc $m = 5$ et la surface Φ est du cinquième ordre.

Actuellement, on ne peut avoir $\lambda = 4$, c'est-à-dire que les systèmes $|C|$, $|C^*|$ doivent avoir la même dimension. Ces systèmes sont précisément les systèmes canoniques des surfaces Φ et Φ^*. La surface Φ possédant comme seules singularités des points doubles coniques, est régulière et de genres $p_g = p_a = 4$. Nous sommes conduit à supposer que la surface Φ^* est également régulière et de genres $p_g = p_a = 4$.

Entre les genres p'_a de Φ et p_a de Φ^*, nous avons montré dans notre *Mémoire sur les surfaces doubles*, que l'on a la relation

$$12(p_a + 1) = 24(p'_a + 1) - 3\nu.$$

Actuellement, on aura donc $\nu = 20$, $\epsilon = 5$.

La surface ϕ est actuellement du quatrième ordre et la courbe D_3, d'ordre 10, doit passer par $\nu' = 10$ points doubles coniques de cette surface. Supposons que ϕ soit une surface de Kummer, possédant 16 points doubles coniques. G. Humbert (1) a montré que sur une surface de Kummer, il existait des courbes d'ordre 10, de genre 11, passant par 10 points doubles ; le long de chacune de ces courbes, il existe une surface d'ordre cinq inscrite à la surface. L'existence de la surface Φ, satisfaisant aux conditions énoncées plus haut, est ainsi établie.

La surface Φ possède 20 points doubles coniques et il existe une surface ϕ du quatrième ordre touchant cette surface le long d'une courbe D_3 d'ordre 10 et de genre 11, passant par les 20 points doubles. Par conséquent, Φ représente une involution I_2 d'ordre deux, possédant 20 points unis, appartenant à une surface Φ^* de genre $p_a = 4$.

Les courbes C, de genre 6 et de degré 5, ont pour transformées sur Φ^* les courbes C* de genre 11 et de degré 10. Aux courbes de $|2C|$, de genre 16 et de degré 20, correspondent sur Φ^* des courbes 2C* de genre 31 et de degré 40. Le système complet $|2C^*|$ étant l'adjoint de $|C^*|$ est régulier et par conséquent de dimension 14.

(1) *Théorie générale des surfaces hyperelliptiques* (Journal de Mathématiques, 1843) et *Œuvres de G. Humbert*, tome II (Paris, Gauthier-Villars, 1936).

Il en résulte que le système $|D_3^*|$ et par suite le système $|D_3|$ ont la dimension 4.

Sur une courbe C^*, les courbes du système complet $|2C^*|$, adjoint à $|C^*|$, découpent des groupes de la série canonique. Parmi ces groupes, se trouvent les ∞^9 transformés des groupes canoniques de la courbe C correspondante et les ∞^4 transformés des groupes paracanoniques découpés par les courbes D_3 sur la courbe C en question. On en conclut que les courbes de $|2C^*|$ découpent sur une courbe C^* la série canonique complète. Par suite, Φ^* est régulière et $|C^*|$ a la dimension $p_g - 1 = 3$.

Ceci établi, il nous reste à construire une courbe D^*, passant trois fois sur les points unis de l'involution I_2.

Le système $|5C|$ sur Φ a le genre 76, le degré 125 et la dimension 54. Sur Φ^*, le système complet $|5C^*|$ a le genre 151, le degré 250 et la dimension 104. Par conséquent, le système $|D_0^*|$ a la dimension 49. Les courbes D_0^* passent simplement par les 20 points unis de I_2 ; une courbe D^* est une courbe D_0^* passant trois fois par chacun de ces points. Pour qu'une courbe D_0^* ait un point triple en un point uni de I_2, il faut qu'elle y ait trois tangentes fixées, ce qui fait, pour les 20 points, 60 conditions. Si ces conditions étaient indépendantes, il n'y aurait donc pas de courbe D^* ni par suite de courbe D.

Observons que sur la surface Φ, la courbe D, définie par la relation

$$10C \equiv 2D + 3(\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_{20}),$$

est arithmétiquement effective. Elle a le genre 31 et le degré 35, donc le système $|D|$ a la dimension, d'après le théorème de Riemann-Roch, au moins égale à 9. Donc les courbes D existent.

Cela étant, il existe une surface F_0, inscrite à Φ le long d'une courbe D et ayant 20 points triples $P_1, P_2, \dots,$

P_{20}. De plus, cette surface possède un groupe G de $\mu = 65$ points doubles sur la courbe D.

Les surfaces du cinquième ordre distinctes de Φ sont en nombre ∞^{54} ; celles qui passent par $P_1, P_2, \ldots, P_{20}$ coupent encore D suivant les groupes d'une série linéaire d'ordre $\mu = 65$, donc non spéciale et de dimension 34. Les surfaces considérées, en nombre ∞^{34}, découpent donc cette série complète. Donc il existe une surface Ψ du cinquième ordre passant par $P_1, P_2, \ldots P_{20}$ et par les points du groupe G. Par conséquent la surface F, passant doublement par la courbe D, existe.

Il existe une surface canonique du dixième ordre, possédant une courbe double d'ordre 25, *de genre* 31 *et* 20 *points triples, triples également pour la courbe double.*

8. Nous avons supposé n pair ; lorsque n est impair, on peut également appliquer la théorie des involutions du second ordre. Si Φ est l'image d'une involution du second ordre ayant un nombre fini de points unis appartenant à une surface algébrique, elle possède un certain nombre ν_0, multiple de 4, de points de diramation qui sont des points doubles coniques de la surface. Si $n = 8m + 5$, Φ est d'ordre $8m$ et possède $\nu = 4\epsilon$ points doubles coniques ; on pourra donc supposer $\nu_0 = 4\epsilon$. Si $n = 8m + 1$, on a $\nu = 4\epsilon + 2$ et on devra supposer $\nu_0 > \nu$. C'est ce que nous avons fait dans le cas $n = 9$. Si $n = 4m + 3$, ν est impair et on devra supposer également $\nu_0 > \nu$.

Liège, le 12 juillet 1945.