EXTRAIT DU *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége.*
Séance du 15 février 1945. — Nos 1 et 2.

Sur les involutions régulières du second ordre appartenant à une surface irrégulière,

par LUCIEN GODEAUX, Membre de la Société.

Dans quelques notes antérieures (1), nous avons considéré les involutions régulières du second ordre appartenant à une surface irrégulière, dépourvue de faisceau irrationnel de courbes. Deux cas avaient été étudiés avant nous : celui où la surface irrégulière est une surface de Picard ou en particulier de Jacobi, qui conduit aux surfaces de Kummer, et celui où la surface irrégulière représente les couples de points d'une courbe de genre trois, qui conduit à une surface du sixième ordre considérée par G. Humbert. Notre étude avait porté sur la construction des systèmes de courbes appartenant à l'involution, tracés sur la surface irrégulière. Nous nous proposons, dans cette nouvelle note, de compléter ces recherches.

Nous considérons une surface F, dépourvue de faisceau irrationnel de courbes, d'irrégularité $q > 0$, contenant une involution I_2, d'ordre deux, n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Après avoir rappelé certains de nos résultats obtenus antérieurement, nous considérons un système continu complet contenant 2^{2q} systèmes linéaires transformés chacun en soi par la transformation birationnelle de F en soi génératrice de l'involution I_2, l'un de ces systèmes contenant un système linéaire partiel, dépourvu de points-base, appartenant à l'involution. Ce système linéaire contient d'ailleurs un second système linéaire partiel appartenant également à l'involution et ayant pour points-base les points unis de celle-ci. Chacun des $2^{2q}-1$ systèmes linéaires restants contient deux systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution. Nous montrons que les points unis de I_2 se répartissent en 2^{2q} groupes. Chacun des $2^{2q+1}-2$ systèmes linéaires composés avec I_2 dont il vient d'être question a comme points-base les points de 2^{2q-1} de ces groupes et, d'autre part, les points de chaque groupe appartiennent aux courbes de 2^{2q-1} systèmes.

---

(1) Sur les involutions régulières d'ordre deux appartenant à une surface irrégulière (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1924, pp. 434-446; 1925, pp. 37-47, 157-166). — Voir également une note parue dans les *Proceedings of the Intern. Math. Congress of Toronto*, 1924 (t. I, pp. 733-737). — Sur la surface représentant les couples de points d'une courbe de genre trois (*Bull. de la Soc. roy. des Sc. de Liége*, 1944, pp. 311-323).

1. Soient F une surface algébrique d'irrégularité $q > 0$ contenant une involution régulière I_2, du second ordre, n'ayant qu'un nombre fini de points unis; Φ une surface image de l'involution I_2; T la transformation birationnelle de F en soi, génératrice de l'involution I_2.

Dans les notes citées plus haut, nous avons montré que l'on peut construire sur F un système continu $\{C\}$, formé de ∞^q systèmes linéaires $|C|$, transformé en lui-même par T. Le système $\{C\}$ contient $k = 2^{2q}$ systèmes linéaires transformés chacun en lui-même par T. De plus, chacun de ces systèmes contient deux systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution I_2 et, pour l'un au moins des systèmes en question, l'un de ces systèmes partiels est dépourvu de points-base.

Désignons par $|C_1|, |C_2|, \ldots, |C_k|$ les $k = 2^{2q}$ systèmes linéaires de $\{C\}$ transformés en eux-mêmes par T et par $|C_{i1}|$, $|C_{i2}|$ les deux systèmes linéaires partiels appartenant à $|C_i|$ et composés au moyen de l'involution I_2.

Nous supposerons que parmi les systèmes partiels $|C_{i1}|$, $|C_{i2}|$, il en existe un seul, que nous désignerons par $|C_{11}|$, dépourvu de points-base. Alors, le système $|C_{12}|$ a comme points-base les α points unis de I_2. Nous désignerons par α_{i1} le nombre des points unis de I_2 qui sont des points-base de $|C_{i1}|$, par α_{i2} celui des points unis de I_2 qui sont des points-base de $|C_{i2}|$. On a

$$\alpha_{i1} + \alpha_{i2} = \alpha.$$

De plus, par hypothèse, $\alpha_{11} = 0$, $\alpha_{12} = \alpha$, $0 < \alpha_{ij} < \alpha$ pour $i = 2, 3, \ldots, k$; $j = 1, 2$.

Soit V_q la variété de Picard attachée à la surface F; ses points représentent les systèmes linéaires du système continu complet $\{C\}$. Nous avons montré que T détermine sur V_q une transformation ordinaire de seconde espèce. Nous supposerons que la variété V_q est générale et, en particulier, que F est dépourvue de faisceaux irrationnels de courbes. On a donc $q > 1$.

Notons que l'hypothèse qu'il existe un seul des systèmes $|C_{i1}|$, $|C_{i2}|$ dépourvu de points-base revient à supposer que le diviseur de Φ est impair.

2. Considérons le système continu complet $\{D\} = \{2C\}$. Il contient également $k = 2^{2q}$ systèmes linéaires transformés en eux-mêmes par T; ce sont les systèmes

$$|D_1| = |2\,C_1|,\ |D_2| = |C_1 + C_2|,\ |D_3| = |C_1 + C_3|, \cdots, |D_k| = |C_1 + C_k|.$$

Chacun de ces systèmes contient deux systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution I_2. Envisageons tout d'abord le système $|D_1|$ et soient $|D_{11}|$, $|D_{12}|$ les systèmes en question. L'un de ces systèmes contient les courbes $2C_{11}$ et est dépourvu de points-base; ce sera le système $|D_{11}|$. Le second système, $|D_{12}|$, contient les courbes $C_{11}+C_{12}$ et a comme points-base les α points unis de I_2.

Observons que les courbes du système $|D_{11}|$ passant par un point uni de I_2 acquièrent un point double en ce point. Par conséquent, les courbes $2C_{12}$, qui ont des points doubles aux α points unis de I_2, appartiennent au système $|D_{11}|$.

Nous avons établi que l'on a

$$|2\,C_1| = |2\,C_2| = |2\,C_3| = \cdots = |2\,C_k|.$$

Dans le système $|2C_2|$ par exemple, les courbes $2C_{21}$, $2C_{22}$ appartiennent au système $|D_{11}|$, les courbes $C_{21}+C_{22}$ au système $|D_{12}|$.

3. Soient $|D_{i1}|$, $|D_{i2}|$ les systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution I_2 compris dans le système $|D_i|$.

Considérons le système $|C_3+C_4|$; il appartient au système continu $\{D\}$ et est transformé en lui-même par T. Il coïncide donc avec un des systèmes $|D_1|$, $|D_2|$, ..., $|D_k|$. Ce ne peut être avec l'un des systèmes $|D_3|=|C_1+C_3|$, $|D_4|=|C_1+C_4|$, $|D_1| = |2C_3| = |2C_4|$, car cela entraînerait la coïncidence de l'un des systèmes $|C_3|$, $|C_4|$ avec $|C_2|$. Supposons, pour fixer les idées, que $|C_3+C_4|$ coïncide avec $|D_2|$.

Des deux systèmes compris dans $|D_2|$ et appartenant à l'involution I_2, l'un, $|D_{21}|$, comprend les courbes $C_{11}+C_{21}$, $C_{12}+C_{22}$ et a comme points-base les α_{21} points unis de I_2 appartenant aux courbes C_{21}; l'autre, $|D_{22}|$, contient les courbes $C_{11}+C_{22}$, $C_{12}+C_{21}$ et a comme points-base les points unis de I_2 appartenant aux courbes C_{22}.

Les courbes $C_{31}+C_{41}$, $C_{31}+C_{42}$, $C_{32}+C_{41}$, $C_{32}+C_{42}$ appartiennent à l'involution I_2 et sont par conséquent comprises dans l'un des systèmes $|D_{21}|$, $|D_{22}|$. Supposons, pour fixer les idées, que les courbes $C_{31}+C_{41}$ appartiennent au système $|D_{21}|$.

La courbe $C_{31}+C_{41}$ doit passer une seule fois par chacun des points unis de I_2 appartenant aux courbes D_{21} et, d'autre part, tout point uni de I_2, n'appartenant pas aux courbes D_{21} mais appartenant à l'une des courbes C_{31}, C_{41}, doit appartenir à l'aure, car il doit être double pour la courbe $C_{21}+C_{41}$.

Désignons par A le groupe des points unis de I_2 appartenant aux courbes C_{21}, C_{31}; par A′ le groupe des points unis de I_2 appartenant aux courbes C_{21}, C_{41}; par B le groupe des points unis de I_2 appartenant aux courbes C_{31}, C_{41}; enfin par B′ le groupe des points analogues n'appartenant à aucune de ces courbes.

Les groupes A, A′, B, B′ n'ont deux à deux aucun point commun. Le groupe $A+A'$ est formé des α_{21} points unis de I_2 base de $|D_{21}|$, le groupe $A+B$ est formé des α_{31} points unis de I_2 appartenant aux courbes C_{31} et le groupe $A'+B$ des α_{41} points unis de I_2 appartenant aux courbes C_{41}..

Les courbes C_{32} passent par les groupes A′ et B′ et les courbes C_{42} par les groupes A et B′. Il en résulte que les courbes $C_{32}+C_{42}$ appartiennent également au système partiel $|D_{21}|$.

Les courbes $C_{31}+C_{42}$, $C_{32}+C_{41}$ passent simplement par les points unis de I_2 appartenant aux courbes D_{22}, c'est-à-dire par les points du groupe $B+B'$. Les premières passent doublement par les points du groupe A, les secondes doublement par les points de A′. On en conclut que les courbes $C_{31}+C_{42}$, $C_{32}+C_{41}$ appartiennent au système $|D_{22}|$.

Représentons par $(i\,j\,l)$ le groupe de points unis de I_2 communs aux courbes C_{2i}, C_{3j}, C_{4l}. On a

$$A\equiv(112),\quad A'\equiv(121),\quad B\equiv(211),\quad B'\equiv(222).$$

De ce qui précède, on conclut que :

Les courbes $C_{21}+C_{41}$, $C_{22}+C_{42}$ appartiennent au système $|D_{31}|$, les courbes $C_{21}+C_{42}$, $C_{22}+C_{41}$ au système $|D_{32}|$.

Les courbes $C_{21}+C_{31}$, $C_{22}+C_{32}$ appartiennent au système $|D_{41}|$, les courbes $C_{21}+C_{32}$, $C_{22}+C_{31}$ au système $|D_{42}|$.

On a

$$|D_2|=|C_1+C_2|=|C_3+C_4|,$$
$$|D_3|=|C_1+C_3|=|C_2+C_4|,$$
$$|D_4|=|C_1+C_4|=|C_2+C_3|.$$

4. Supposons que le système $|C_5+C_6|$ coïncide avec $|D_2|$, ce qui n'entraîne aucune contradiction. Nous supposerons que les courbes $C_{51}+C_{61}$, $C_{52}+C_{62}$ appartiennent à $|D_{21}|$, les courbes $C_{51}+C_{62}$, $C_{52}+C_{61}$ au système $|D_{22}|$.

Désignons par $(i\,j\,l\,m\,n)$ le groupe des points unis de I_2 appartenant aux courbes C_{2i}, C_{3j}, C_{4l}, C_{5m}, C_{6n}. On aura nécessairement

$$(112) = (11212) + (11221), \quad (121) = (12112) + (12121),$$
$$(211) = (21111) + (21122), \quad (222) = (22211) + (22222).$$

Fixons l'attention sur le système $|D_3|$. Le système $|D_{31}|$ a les mêmes points-base que $|C_{31}|$ et il existe des courbes de ce système comprenant comme partie une courbe C_{51}. Les courbes $D_{31} - C_{51}$ en question, appartenant à l'involution I_2, appartiendront à l'un des systèmes $|C_7|$, $|C_8|$, ..., $|C_k|$. par exemple à $|C_7|$; ce seront précisément des courbes de l'un des systèmes $|C_{71}|$, $|C_{72}|$. Elles passeront par les groupes

$$(21122), (11221), (12112), (22211).$$

Supposons que ce soient les courbes C_{71}, et que l'on ait

$$|D_2| = |C_1 + C_2| = |C_7 + C_8|.$$

Si les courbes $C_{71} + C_{81}$ appartiennent au système $|D_{21}|$, les courbes C_{81} passent par les groupes

$$(11212), (12121), (21122), (22211).$$

Les courbes C_{72} passent par les groupes

$$(11212), (12121), (21111), (22222)$$

et les courbes C_{82} par les groupes

$$(11221), (12112), (21111), (22222).$$

On déduit de ceci l'arrangement suivant :

On a

$$|D_2| = |C_1 + C_2| = |C_3 + C_4| = |C_5 + C_6| = |C_7 + C_8|.$$

Le système $|D_{21}|$ contient les courbes $C_{11} + C_{21}$, $C_{12} + C_{22}$, $C_{31} + C_{41}$, $C_{32} + C_{82}$, $C_{51} + C_{61}$, $C_{52} + C_{62}$, $C_{71} + C_{81}$, $C_{72} + C_{82}$.

Le système $|D_{22}|$ contient les courbes $C_{11} + C_{22}$, $C_{12} + C_{21}$, $C_{31} + C_{42}$, $C_{32} + C_{41}$, $C_{51} + C_{62}$, $C_{52} + C_{61}$, $C_{71} + C_{82}$, $C_{72} + C_{81}$.

On a ensuite

$$|D_3| = |C_1 + C_3| = |C_2 + C_4| = |C_5 + C_7| = |C_6 + C_8|.$$

Le système $|D_{31}|$ contient les courbes $C_{11} + C_{31}$, $C_{12} + C_{32}$, $C_{21} + C_{41}$, $C_{22} + C_{42}$, $C_{51} + C_{71}$, $C_{52} + C_{72}$, $C_{61} + C_{81}$, $C_{62} + C_{82}$.

Le système $|D_{32}|$ contient les courbes $C_{12}+C_{31}$, $C_{11}+C_{32}$, $C_{21}+C_{42}$, $C_{22}+C_{41}$, $C_{51}+C_{72}$, $C_{52}+C_{71}$, $C_{61}+C_{82}$, $C_{62}+C_{81}$.

On trouve de même

$$|D_4| = |C_1 + C_4| = |C_2 + C_3| = |C_5 + C_8| = |C_6 + C_7|,$$
$$|D_5| = |C_1 + C_5| = |C_2 + C_6| = |C_3 + C_7| = |C_4 + C_8|,$$
$$|D_6| = |C_1 + C_6| = |C_2 + C_5| = |C_3 + C_8| = |C_4 + C_7|,$$
$$|D_7| = |C_1 + C_7| = |C_2 + C_8| = |C_3 + C_5| = |C_4 + C_6|,$$
$$|D_8| = |C_1 + C_8| = |C_2 + C_7| = |C_3 + C_6| = |C_4 + C_5|.$$

Il est aisé de voir la distribution des courbes C_{i1}, C_{i2} dans les systèmes précédents.

5. Les α points unis de l'involution I_2 se répartissent, vis-à-vis des systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution et compris dans $|C_2|$, $|C_3|$, ..., $|C_8|$, en huit groupes. Nous pourrons représenter un de ces groupes par $(i_2, i_3, ..., i_8)$ lorsque les points de ce groupe appartiennent aux courbes C_{2i_2}, C_{3i_3}, ..., C_{8i_8}. Les huit groupes sont alors

(1122112), (1121221), (1211212), (1212121),
(2112211), (2111122), (2221111), (2222222).

Les points des quatre premiers groupes appartiennent aux courbes C_{21}, les points des quatre derniers aux courbes C_{22}.

Supposons que le système $|C_9+C_{10}|$ coïncide avec $|D_2|$. Chacun des huit groupes précédents se partage en deux groupes formés de points appartenant aux courbes C_{91}, C_{92}, $C_{10,1}$ ou $C_{10,2}$. D'une manière précise, un point d'un des quatre premiers groupes (appartenant à C_{21}) situé sur les courbes C_{91} appartiendra aux courbes $C_{10,2}$ et inversement. Les quatre premiers groupes se partageront donc en huit groupes qui seront dénotés par une notation analogue à celle qui a été utilisée plus haut. Ces huit nouveaux groupes seront

(112211212), (112122112), (121121212), (121212112),
(112211221), (112122121), (121121221), (121212121).

Les points unis de I_2 appartenant aux courbes C_{91}, $C_{10,1}$ ou aux courbes C_{92}, $C_{10,2}$, seront situés sur les courbes C_{22} et les quatre groupes appartenant à ces dernières courbes se partageront en huit groupes

(211221111), (211112211), (222111111), (222222211),
(211221122), (211112222), (222111122), (222222222).

Envisageons comme tantôt le système $|D_3|$. Il existe des courbes du système partiel $|D_{31}|$ comprenant des courbes C_{91} comme partie et les courbes $D_{31} - C_{91}$ appartiennent à un des systèmes $|C_2|$, $|C_3|$, ..., $|C_k|$. Appelons C_i ces courbes; ce sont plus précisément des courbes C_{i1}, C_{i2}, par exemple des courbes C_{i1}.

Désignons les 16 groupes qui viennent d'être écrits par leur numéro d'ordre. Les courbes C_{31} passent par les groupes 1, 2, 5, 6, 9, 10, 13, 14; les courbes C_{91} par les groupes 1, 2, 9 et 10, par conséquent les courbes C_{i1} passent par les groupes 5, 6, 13 et 14. Les courbes C_{32} passent par les groupes 3, 4, 7, 8, 11, 12, 15, 16; les courbes C_{91} par les groupes 3, 4, 11, 12, par conséquent les courbes C_{i1} passent par les groupes 3, 4, 11 et 12 également. On en conclut, par l'examen des passages des courbes déjà rencontrées par les groupes de points 1, 2, ..., 16, que l'on a $i > 10$. On peut supposer $i = 11$.

Les courbes $C_{11,1}$ passent donc par les groupes 3, 4, 5, 6, 11, 12, 13, 14 et par conséquent les courbes $C_{11,2}$ par les groupes 1, 2, 7, 8, 9, 10, 15, 16.

Soit $|C_{12}|$ le système tel que

$$|D_2| = |C_{11} + C_{12}|.$$

Les courbes $C_{12,1}$ passent par les groupes 1, 2, 7, 8, 11, 12, 13, 14 et les courbes $C_{12,2}$ par les groupes 3, 4, 5, 6, 9, 10, 15, 16.

Reprenons le même raisonnement en partant du système $|D_5|$. Il existe des courbes D_{51} comprenant comme partie une courbe C_{91} et complétées par des courbes passant par les groupes 1, 4, 6, 7, 9, 12, 14 et 15. On peut supposer que ces courbes sont les courbes $C_{13,1}$. Alors, les courbes $C_{13,2}$ passent par les groupes 2, 3, 5, 8, 10, 11, 13 et 16. Posons

$$|D_2| = |C_{13} + C_{14}|.$$

Les courbes $C_{14,1}$ passent par les groupes 2, 3, 5, 8, 9, 12, 14 et 15, les courbes $C_{14,2}$ par les autres groupes.

Reprenons encore une fois le même raisonnement en partant maintenant du système $|D_7|$. On arrivera ainsi à deux nouveaux systèmes $|C_{15}|$, $|C_{16}|$, tels que

$$|D_2| = |C_{15} + C_{16}|.$$

Les courbes $C_{15,1}$ passent par les groupes 2, 4, 5, 7, 10, 12, 13, 15; les courbes $C_{15,2}$ par les groupes 1, 3, 6, 8, 9, 11, 14, 16; les courbes $C_{16,1}$ par les groupes 1, 3, 6, 8, 10, 12, 13, 15 et les courbes $C_{16,2}$ par les groupes 2, 4, 5, 7, 9, 11, 14, 16.

Le raisonnement déjà fait plusieurs fois ne conduit plus à de nouveaux systèmes et les 16 groupes de points unis de I_2 obtenus se répartissent sur les courbes des systèmes appartenant à l'involution, compris dans $|C_2|$, $|C_3|$, ..., $|C_{16}|$ de la manière indiquée dans le tableau suivant :

C_{21} :	1	2	3	4	5	6	7	8								
C_{22} :									9	10	11	12	13	14	15	16
C_{31} :	1	2			5	6			9	10			13	14		
C_{32} :			3	4			7	8			11	12			15	16
C_{41} :			3	4			7	8	9	10			13	14		
C_{42} :	1	2			5	6					11	12			15	16
C_{51} :		2	3			6	7			10	11			14	15	
C_{52} :	1			4	5			8	9			12	13			16
C_{61} :	1			4	5			8		10	11			14	15	
C_{62} :		2	3			6	7		9			12	13			16
C_{71} :	1		3		5		7		9		11		13		15	
C_{72} :		2		4		6		8		10		12		14		16
C_{81} :		2		4		6		8	9		11		13		15	
C_{82} :	1		3		5		7			10		12		14		16
C_{91} :	1	2	3	4					9	10	11	12				
C_{92} :					5	6	7	8					13	14	15	16
$C_{10,1}$:					5	6	7	8	9	10	11	12				
$C_{10,2}$:	1	2	3	4									13	14	15	16
$C_{11,1}$:			3	4	5	6					11	12	13	14		
$C_{11,2}$:	1	2					7	8	9	10					15	16
$C_{12,1}$:	1	2					7	8			11	12	13	14		
$C_{12,2}$:			3	4	6	6			9	10					15	16
$C_{13,1}$:	1			4		6	7		9			12		14	15	
$C_{13,2}$:		2	3		5			8		10	11		13			16
$C_{14,1}$:		2	3		5			8	9			12		14	15	
$C_{14,2}$:	1			4		6	7			10	11		13			16
$C_{15,1}$:		2		4	5		7			10		12	13		15	
$C_{15,2}$:	1		3			6		8	9		11			14		16
$C_{16,1}$:	1		3			6		8		10		12	13		15	
$C_{16,2}$:		2		4	5		7		9		11			14		16

6. Le raisonnement précédent peut évidemment se poursuivre. En supposant que le système $|C_{17}+C_{18}|$ coïncide avec $|D_2|$, on sera conduit à partager les α points unis de I_2 en 32 groupes et l'on introduira, comme précédemment, les systèmes $|C_{19}|$, $|C_{20}|$, ..., $|C_{32}|$. Et ainsi de suite. On sera finalement conduit à partager les α points unis de I_2 en $k=2^{2q}$ groupes, se répartissant sur les courbes des $2(k-1)=2^{2q+1}-2$ systèmes linéaires appartenant à l'involution et compris dans les systèmes $|C_2|$, $|C_3|$, ..., $|C_k|$.

Chacune des courbes C_{i_1}, C_{i_2} ($i=2, 3, ..., k$) passe par 2^{2q-1} groupes et chaque groupe appartient à $2^{2q}-1$ de ces courbes.

Soit r la dimension du système $|C_{11}|$. On sait que l'on peut supposer $r\geqslant 3$. En rapportant projectivement les courbes C_{11} aux hyperplans d'un espace linéaire S_r, à F correspond une surface Φ image de l'involution I_2. Soient Γ_{11} les sections hyperplanes de Φ.

Aux courbes C_{12} correspondent sur Φ des courbes Γ_{12}; parmi les hypersurfaces de S_r (en général des hyperquadriques) découpant sur Φ le système complet $|2\,\Gamma_{11}|$, il en est une qui passe par les α points doubles coniques de diramation de Φ, touchant cette surface le long de chacune des courbes Γ_{12}.

Les α points doubles coniques, points de diramation de Φ, se partagent en 2^{2q} groupes. Aux courbes C_{i_1}, C_{i_2} correspondent sur Φ des courbes Γ_{i_1}, Γ_{i_2}. Le long de chacune de ces courbes (pour $i>1$), existe une hypersurface touchant Φ en chaque point d'intersection et appartenant au système découpant sur cette surface le système complet $|2\,\Gamma_{11}|$.

Liége, le 13 février 1945.

M. HAYEZ, Impr. de l'Académie royale, 112, rue de Louvain, Bruxelles
(Domicile légal : rue de la Chancellerie, 4)