Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences).
Séance du 8 mai 1945.

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur les involutions cycliques régulières d'ordre trois appartenant à une surface irrégulière,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Nous avons à plusieurs reprises étudié les involutions régulières du second ordre appartenant à une surface irrégulière (1). Nos efforts ont porté sur la détermination des systèmes linéaires de courbes du même ordre tracés sur la surface image de l'involution considérée. Dans cette note nous considérons une involution cyclique régulière d'ordre trois, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface d'irrégularité $q > 1$, ne contenant pas un faisceau irrationnel de courbes. On construit, sur la surface irrégulière, un système

(1) *Sur les involutions régulières d'ordre deux appartenant à une surface irrégulière* (Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique, 1924, pp. 434-446 ; 1925, pp. 37-47, 157-166). Voir aussi une note parue sous le même titre dans les *Proceedings of the Intern. Math. Congress of Toronto*, 1925 (tome I, pp. 733-737).

Sur la surface représentant les couples de points d'une courbe de genre trois (Bulletin de la Soc. roy. des Sc. de Liége, 1944, pp. 311-323) ; *Sur les involutions régulières du second ordre appartenant à une surface irrégulière* (Idem, 1945, pp. 2-10).

Dans le même ordre d'idées, voir également les travaux suivants : *Sur les surfaces de Picard de diviseur deux* (Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 1927, pp. 391-414) ; *Sur une propriété des surfaces algébriques irrégulières contenant une involution régulière d'ordre deux* (Idem., 1927, pp. 524-543) ; *Sur les involutions régulières d'ordre trois appartenant à une surface irrégulière* (Idem., 1927, pp. 707-724) ; *Sur les involutions cycliques régulières appartenant à une surface irrégulière* (Bull. des Sc. Mathém., 1943, pp. 145-158).

Voir notre exposé sur *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Paris, Hermann, 1935).

continu complet contenant des systèmes linéaires appartenant à l'involution. A ces systèmes linéaires correspondent sur la surface image de l'involution des systèmes linéaires de courbes du même ordre. Nous apportons une première contribution à l'étude du comportement de ces systèmes vis-à-vis des points de diramation de la surface image considérée.

1. Soit F une surface algébrique d'irrégularité $q > 1$, privée de faisceau irrationnel de courbes. Supposons que F contienne une involution régulière cyclique I_3, d'ordre trois, n'ayant qu'un nombre fini de points unis et soit T la transformation birationnelle de F en soi génératrice de l'involution.

Construisons, sur la surface F, un système linéaire complet $|C_1|$, privé de points-base, transformé en lui-même par T, contenant trois systèmes linéaires partiels $|C_{11}|$, $|C_{12}|$, $|C_{13}|$ appartenant à l'involution I_3 le premier étant privé de points-base ([1]). On peut d'ailleurs supposer que les dimensions r_1 de $|C_1|$ et r_{11} de $|C_{11}|$ sont aussi grandes qu'on le veut. Par construction, $|C_1|$ n'appartient pas à l'involution I_3 ; on peut de plus le choisir de telle sorte qu'il n'appartienne pas à une autre involution éventuellement existante sur la surface F.

Rapportons projectivement les courbes C_1 aux hyperplans d'un espace linéaire à r_1 dimensions ; à F correspond un modèle projectif normal de cette surface, que nous désignerons par F_1 et sur lequel l'involution I_3 est déterminée par une homographie H_1 cyclique de période trois. Soient σ_1, σ_2, σ_3 les axes ponctuels de H_1. Les systèmes linéaires $|C_{11}|$, $|C_{12}|$, $|C_{13}|$ sont respectivement découpés sur F_1 par les hyperplans passant par σ_2 et σ_3, σ_3 et σ_1, σ_1 et σ_2. Les axes σ_1, σ_2, σ_3 sont des

([1]) *Les involutions cycliques...* (loc. cit.).

espaces linéaires dont les dimensions r_{11}, r_{12}, r_{13} sont égales à celles des systèmes $|C_{11}|$, $|C_{12}|$, $|C_{13}|$.

Seul l'axe σ_1 rencontre la surface F_1 et les points de rencontre sont les points unis de l'involution I_3. Ces points unis sont de deux sortes : les points unis parfaits et les points unis non parfaits.

En un point uni parfait, le plan tangent à F_1 s'appuie suivant une droite sur l'un des axes σ_2, σ_3 de H_1. Nous désignerons par A_2 un point uni parfait en lequel le plan tangent à F_1 coupe σ_2 suivant une droite, par A_3 un point uni parfait en lequel le plan tangent à F_1 coupe σ_3 suivant une droite. Soit α_2 le nombre des points A_2, α_3 celui des points A_3.

En un point uni non parfait B, le plan tangent à F_1 s'appuie en un point sur σ_2 et en un point sur σ_3. Comme nous l'avons établi, l'involution I_3 possède deux points unis parfaits infiniment voisins de B : L'un, B_2, est situé sur la tangente à F_1 en B s'appuyant sur σ_2 ; l'autre, B_3, est situé sur la tangente s'appuyant sur σ_3. Nous désignerons par β le nombre des points B.

Les courbes C_{12} passent simplement par un point A_2, la tangente étant variable ; doublement par un point A_3, les tangentes étant variables ; simplement par un point B en y touchant la droite BB_3.

Les courbes C_{13} passent doublement par un point A_2 (tangentes variables), simplement par un point A_3 (tangente variable), simplement par un point B, en y touchant la droite BB_2.

2. Le système linéaire $|C_1|$ appartient à un système continu complet $\{C\}$. En remplaçant éventuellement $|C_1|$ par un de ses multiples d'ordre suffisamment élevé, on peut supposer que le système continu complet $\{C\}$ est formé de ∞^q systèmes linéaires.

Au système continu complet $\{C\}$, T fait correspondre un système continu $\{\bar{C}\}$ qui a en commun avec $\{C\}$

le système linéaire $|C_1|$. Par conséquent, puisque $\{C\}$ est complet, $\{\bar{C}\}$ coïncide avec $\{C\}$ et ce système est transformé en lui-même par T.

Sur la variété de Picard V_q associée à F, dont les points représentent donc les systèmes linéaires de $\{C\}$, il correspond donc à T une transformation birationnelle T′, de période trois, de cette variété en soi.

La transformation T′ ne peut avoir qu'un nombre fini de points unis, car si elle en avait une infinité, il y aurait dans $\{C\}$ une infinité de systèmes linéaires $|C|$ transformés chacun en lui-même par T. Par suite, il y aurait une infinité de systèmes linéaires partiels, compris dans les précédents, appartenant à l'involution I_3. Mais à ces systèmes correspondent sur la surface Φ, image de l'involution I_3, des systèmes linéaires complets. On aurait donc, sur la surface Φ, régulière par hypothèse, une infinité continue de systèmes linéaires non équivalents, de courbes du même ordre, ce qui est impossible.

Le nombre des points unis de la transformation T′ est égal à 3^q (1), c'est-à-dire qu'il y a 3^q systèmes linéaires de $\{C\}$ transformés chacun en soi par la transformation T. En posant $k = 3^q$, nous désignerons ces systèmes par $|C_1|, |C_2|, \ldots, |C_k|$.

Par contruction, $|C_1|$ contient trois systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution I_3. Nous pouvons, sans restriction, supposer qu'il en est de même de chacun des systèmes $|C_2|, |C_3|, \ldots, |C_k|$, en remplaçant éventuellement $\{C\}$ par un de ses multiples convenablement choisi.

Nous désignerons par $|C_{i1}|, |C_{i2}|, |C_{i3}|$ les trois systèmes linéaires partiels compris dans $|C_i|$ et appartenant à l'involution I_3.

(1) S. Lefschetz, *On certain numerical invariants of algebraic varieties, with application to abeliam varieties* (Transactions of the American Math. Society, 1921, t. XXII).

3. Supposons que dans le système $|C_i|$, il existe un système partiel appartenant à I_3, par exemple $|C_{i1}|$, qui n'ait pas pour points-base des points unis de l'involution I_3. Aux systèmes $|C_{11}|$, $|C_{i1}|$ correspondent sur Φ des systèmes linéaires complets que nous désignerons par $|\Gamma_{11}|$, $|\Gamma_{i1}|$.

A une courbe quelconque de $\{C\}$ correspond sur Φ une courbe Γ qui, lorsque la courbe C varie dans $\{C\}$, décrit un système continu nécessairement compris dans un système linéaire $|\Gamma|$, puisque Φ est régulière.

Faisons varier C d'une manière continue dans $\{C\}$ de manière qu'elle vienne coïncider avec une courbe C_{11}. La courbe Γ vient alors coïncider avec la courbe Γ_{11}, homologue de C_{11}, comptée trois fois. En effet, la courbe Γ, homologue d'une courbe C, a pour transformée sur F une courbe formée de C et de ses transformées C', C'' par T, T^2, courbes qui appartiennent à $\{C\}$. Lorsque C coïncide avec une courbe C_{11}, C' et C'' coïncident avec la même courbe. On a donc

$$|\Gamma| = |3\Gamma_{11}|.$$

Lorsque C vient coïncider avec C_{i1}, Γ vient coïncider avec une courbe Γ_{i1} comptée trois fois. On a donc

$$|L| = |3\Gamma_{i1}| = |3\Gamma_{11}|.$$

Il en résulte que le diviseur σ de Severi de la surface Φ est multiple de trois. Par conséquent, il y a au plus deux des systèmes $|C_2|$, $|C_3|$, ..., $|C_k|$ contenant un système linéaire partiel appartenant à l'involution I_3, dépourvu de points-base qui soient des points unis de l'involution I_3. Comme par hypothèse $q > 1$, on a $k > 9$ et on peut toujours supposer que les systèmes $|C_{21}|$, $|C_{22}|$, $|C_{23}|$, compris dans $|C_2|$ et appartenant à I_3, ont pour points-base des points unis de cette involution.

4. Rapportons projectivement les courbes de $|C_2|$ aux hyperplans d'un espace linéaire à r_2 diemnsions, r_2 étant la dimension de $|C_2|$. A F correspond une surface F_2 sur laquelle l'involution I_3 est déterminée par une homographie H_2, de période trois. Soient σ_1', σ_2', σ_3' les axes ponctuels de H_2. Les courbes C_{21}, C_{22}, C_{23} sont découpées sur F_2 par les hyperplans passant respectivement par σ_2' et σ_3' σ_3' et σ_1', σ_1' et σ_2'.

Les espaces σ_1', σ_2', σ_3' rencontrent la surface F_2 aux points unis de l'involution I_3.

En un point uni parfait de I_3, appartenant à σ_1', le plan tangent à F_2 coupe suivant une droite soit σ_2', soit σ_3'. Nous désignerons par A_{12} le point uni lorsque la première circonstance se présentera, par A_{13} le point uni dans le cas opposé.

En un point uni non parfait B_1' de I_3, appartenant à σ_1', le plan tangent à F_2 s'appuie en un point sur chacun des espaces σ_1', σ_3'. Nous désignerons par B_{12}, B_{13} les points infiniment voisins de B_1' sur F_2, tels que les droites $B_1' B_{12}$, $B_1' B_{13}$ s'appuient respectivement sur σ_2', σ_3'. Les points B_{12}, B_{13} sont unis parfaits pour I_3.

Nous désignerons de même par A_{21} un point uni parfait de I_3, appartenant à σ_2', en lequel le plan tangent à F_2 coupe σ_1' suivant une droite, par A_{23}, un point analogue, le plan tangent à F_2 en ce point coupant σ_3' suivant une droite, par A_{31}, A_{32} des points unis parfaits de I_3, appartenant à σ_3', en lesquels les plans tangents à F_2 coupent suivant une droite soit σ_1', soit σ_2'.

Un point uni non parfait B_2' (ou B_3') de I_3, appartenant à σ_2' (ou σ_3') contient dans son domaine du premier ordre des points unis parfaits B_{23}, B_{21} (ou B_{31}, B_{32}) tels que les droites $B_2' B_{23}$, $B_2' B_{21}$ (ou $B_3' B_{31}$, $B_3' B_{32}$) s'appuient respectivement sur σ_3', σ_1' (ou σ_1', σ_2').

Les courbes C_{21} ont des points simples à tangentes variables en A_{21}, A_{31} ; des points doubles à tangentes variables en A_{23}, A_{32} ; elles passent simplement par B_2' en y touchant $B_2'B_{23}$ et par B_3' en y touchant $B_3'B_{32}$.

Les courbes C_{22}, C_{23} ont des comportements analogues que l'on peut résumer dans le tableau suivant :

	A_{12}	A_{13}	A_{21}	A_{23}	A_{31}	A_{32}	B_{12}	B_{13}	B_{23}	B_{21}	B_{31}	B_{32}
C_{21}	0	0	1	2	1	2	0	0	1	0	0	1
C_{22}	1	2	0	0	2	1	0	1	0	0	1	0
C_{23}	2	1	2	1	0	0	1	0	0	1	0	0

5. Revenons au système $|C_1|$. Les courbes C_{11} passant par un point B, y acquièrent un point double à tangentes fixes BB_2, BB_3. Celles de ces courbes qui sont assujetties à toucher en B une droite distincte de BB_2, BB_3, acquièrent un point triple, à tangentes variables en B.

Envisageons maintenant les courbes C_{12}, qui passent simplement par B en y touchant la droite BB_3. Si n est le degré de $|\Gamma_{11}|$ sur Φ, le degré de $|C_{11}|$ et par suite de $|C_1|$ est égal à $3n$. Le degré de $|C_{12}|$ est par conséquent égal à $3n - \alpha_2 - 4\alpha_3 - 2\beta$; de plus les courbes, C_{12}, C_{13} se coupent en $3n - 2\alpha_2 - 2\alpha_3 - \beta$ points variables.

Les courbes C_{12} assujetties à toucher en B une droite distincte de BB_3, acquièrent un point au moins double en B. Appelons C_{12}' ces courbes et supposons qu'elles aient un point double en B. Les tangentes doivent être fixes et trois cas peuvent se présenter :

a) Les tangentes sont BB_2 et BB_3. Une courbe C^{12} rencontre une courbe C_{12}' en

$$3n - \alpha_2 - 4\alpha_3 - 2(\beta - 1) - 3$$
$$= 3n - \alpha_2 - 4\alpha_3 - 2\beta - 1$$

points variables.

b) Les deux tangentes coïncident avec BB_3. Selon que B est un point de rebroussement ou un tacnode pour les courbes C_{12}', une courbe C_{12} et une courbe C_{12}'

se rencontrent en $3n - \alpha_2 - 4\alpha_3 - 2\beta - 1$ ou $3n - \alpha_2 - 4\alpha_3 - 2\beta - 2$ points variables.

c) Les deux tangentes coïncident avec BB_2. Les courbes C_{12} rencontrent alors les courbes C'_{12} en $3n - \alpha_2 - 4\alpha_3 - 2\beta$ points variables.

Les courbes C_{12}, C'_{12} appartenant à I_3, les nombres de points d'intersections variables considérés doivent être multiple de trois. Or, $3n - \alpha_2 - 4\alpha_3 - 2\beta$ est multiple de trois, par conséquent seul le troisième cas peut se présenter.

Observons que le nombre des points d'intersection variables d'une courbe C'_{12} et d'une courbe C_{13} est égal à $3n - 2\alpha_2 - 2\alpha_3 - \beta - 2$ ou $3n - 2\alpha_2 - 2\alpha_3 - \beta - 3$ selon que B est un point de rebroussement ou un tacnode pour les courbes C'_{12}. Comme ce nombre doit être multiple de 3 en même temps que $3n - 2\alpha_2 - 2\alpha_3 - \beta$, les courbes C'_{12} ont un tacnode en B.

Les courbes C'_{12} ne peuvent avoir un point triple en B, car alors les tangentes seraient variables et les courbes C'_{12}, C_{12} se couperaient en $3n - \alpha_2 - 4\alpha_3 - 2\beta - 1$ points variables et ce nombre ne peut être multiple de 3.

On parvient, de la même manière, à des conclusions analogues pour les courbes de $|C_2|$ appartenant à I_3. Ainsi, par exemple, les courbes C_{21} passant par un point B'_1 y acquièrent un point double à tangentes fixes B'_1B_{12}, B'_1B_{13}. Celles de ces courbes assujetties à toucher en B'_1 une troisième droite ont un point triple à tangentes variables en ce point. Les courbes C_{21} assujetties à toucher en B'_2 une droite distincte de BB_{23} acquièrent un tacnode en B'_2. la tangente tacnodale étant B'_2B_{21}.

6. Considérons le système continu complet

$$\{D\} = \{2C\}.$$

Il est transformé en lui-même par T et contient $k = 3^q$ systèmes linéaires $|D_1|$, $|D_2|$, ..., $|D_k|$ systèmes linéaires transformés chacun en lui-même par T. Ces systèmes sont obtenus en considérant les systèmes $|2C_1|$, $|2C_2|$ ..., $|2C_k|$, $|C_1 + C_2|$, ..., $|C_{k-1} + C_k|$ Pour fixer les idées, nous supposerons que $|D_1|$ contient les courbes $2C_1$. Alors, $|D_1|$ contient trois systèmes linéaires partiels $|D_{11}|$, $|D_{12}|$, $|D_{13}|$, appartenant à I_3. $|D_{11}|$ contien les courbes $2C_{11}$ et $C_{12} + C_{13}$, $|D_{12}|$ les courbes $C_{11} + C_{12}$ $2C_{13}$, $|D_{13}|$ les courbes $C_{11} + C_{13}$, $2C_{12}$.

Revenons en effet à la surface F_1. Les racines de l'équation caractéristique de l'homographie H sont 1, ϵ, ϵ^2, où ϵ est une racine cubique primitive de l'unité. Aux systèmes $|C_{11}|$, $|C_{12}|$, $|C_{13}|$ sont donc en quelque sorte attachés les nombres 1, ϵ, ϵ^2, d'où les conclusions précédentes. Les courbes D_{11}, D_{12}, D_{13} ont, vis-à-vis des points unis de l'involution I_3, le même comportement que les courbes C_{11}, C_{12}, C_{13} respectivement.

Le système $|C_1 + C_2|$ est certainement distinct de $|D_1|$. Supposons pour fixer les idées que ce soit le système $|D_2|$. Ce système contient trois systèmes linéaires partiels $|D_{21}|$, $|D_{22}|$, $|D_{23}|$ appartenant à l'involution I_3 Les racines de l'équation caractéristique de l'homographie H_2 dont également 1, ϵ, ϵ^2 et nous pouvons attacher aux systèmes $|C_{21}|$, $|C_{22}|$, $|C_{23}|$ les nombres 1, ϵ, ϵ^2. Nous pouvons alors supposer que les systèmes $|D_{21}|$, $|D_{22}|$, $|D_{23}|$ comprennent respectivement les courbes $C_{11} + C_{21}$, $C_{11} + C_{22}$, $C_{11} + C_{23}$. Dans ces conditions :

le système $|D_{21}|$ contient les courbes $C_{12} + C_{23}$, $C_{13} + C_{22}$;
le système $|D_{22}|$ contient les courbe $C_{12} + C_{21}$, $C_{13} + C_{23}$;
le système $|D_{23}|$ contient les courbes $C_{13} + C_{21}$, $C_{12} + C_{22}$.

Les courbes D_{21}, D_{22}, D_{23} ont le même comportement vis-à-vis des points unis de I_3, que les courbes C_{21}, C_{22}, C_{23} respectivement. Ceci va nous conduire à quelques résultats.

Les courbes D_{21} ne passent pas en général par un point A_{12} ; celles qui passent par ce point y ont un point triple. Les courbes C_{23} ont un point double en un point A_{12} et font donc partie de courbes D_{21} passant par ce point. Il en résulte que les courbes C_{12} doivent passer simplement par un point A_{12}. Un point A_{12} est donc un point A_2.

Un raisonnement analogue montre que les courbes C_{12} passent deux fois par un point A_{13}, une fois par un point A_{21}, une fois par un point A_{31} et deux fois par un point A_{32}.

Les courbes D_{21} passent une fois par un point A_{23} ; les courbes C_{22} ne passent pas par un tel point, donc les courbes C_{13} passent une fois par un point A_{23}.

On en conclut que les points A_{12}, A_{21}, A_{31} sont des points A_2, les points A_{13}, A_{23}, A_{32} sont des points A_3.

Les courbes D_{21} ne passent pas en général par un point B'_1 ; celles qui passent par ce point y ont un point double à tangentes fixes $B'_1 B_{12}$, $B'_1 B_{13}$. Les courbes C_{23} passent par B'_1 en y touchant $B'_1 B_{12}$, donc les courbes C_{12} passent par B'_1 en y touchant $B'_1 B_{13}$.

Les courbes D_{21} passent par un point B'_2 en y touchant $B'_2 B_{23}$; les courbes C_{23} passent par B'_2 en y touchant $B'_2 B_{21}$, donc les courbes C_{12} passent par B'_2 en y touchant $B'_2 B_{21}$ En effet, les courbes D_2 appartenant à I_3 et ayant un tacnode en B'_2, la tangente tacnodale étant $B'_2 B_{21}$, appartiennent à $| D_{21} |$.

Les courbes D_{21} passent par un point B'_3 en y touchant la droite $B'_3 B_{32}$; les courbes C_{23} ne passent pas par B'_3, donc les courbes C_{12} doivent passer par B'_3 en y touchant $B'_3 B_{32}$.

Un raisonnement analogue montre que les courbes C_{13} passent par un point B'_1 en y touchant $B'_1 B_{12}$, par un point B_2' en y touchant $B_2' B_{23}$, par un point B_3' en y touchant la droite $B_3' B_{31}$.

On en conclut que les points B_{13}, B_{21}, B_{32} sont des points B_2, les points B_{12}, B_{23}, B_{31} des points B_3.

En appliquant les mêmes raisonnements aux systèmes $|D_{22}|$, $|D_{23}|$, on parvient du reste aux mêmes conclusions.

On peut résumer les résultats obtenus dans le tableau suivant :

	A_{12}	A_{13}	A_{21}	A_{23}	A_{31}	A_{32}	B_{12}	B_{13}	B_{23}	B_{21}	B_{31}	B_{32}.
C_{12}	1	2	2	1	1	2	0	1	0	1	0	1
C_{13}	2	1	1	2	2	1	1	0	1	0	1	0

7. Envisageons maintenant le système $|2C_2|$; il est certainement distinct de $|D_2|$; il l'est également de $|D_1|$, car il ne contient aucun système linéaire appartenant à I_3 et dépourvu de points-base. Supposons qu'il coïncide avec $|D_3|$. Observons d'autre part que les systèmes $|D_1|$, $|D_2|$, ..., $|D_k|$ coïncident avec les systèmes $|2C_1|$, $|C_1 + C_2|$, $|C_1 + C_3|$, ..., $|C_1 + C_k|$. On peut donc supposer

$$|D_3| = |2C_2| = |C_1 + C_3|.$$

On peut, comme plus haut, attacher aux systèmes $|C_{31}|$, $|C_{32}|$, $|C_{33}|$ les nombres 1, ϵ, ϵ^2 et voir alors que si $|D_{31}|$, $|D_{32}|$, $|D_{33}|$ sont les systèmes appartenant à I_3 compris dans $|D_3|$,

le système $|D_{31}|$, contient les courbes $C_{11} + C_{31}$, $C_{12} + C_{33}$, $C_{13} + C_{32}$, $2C_{21}$, $C_{22} + C_{23}$;
le système $|D_{32}|$ contient les courbes $C_{11} + C_{32}$, $C_{12} + C_{31}$, $C_{13} + C_{33}$, $2C_{23}$, $C_{21} + C_{22}$;
le système $|D_{33}|$ contient les courbes $C_{11} + C_{33}$, $C_{12} + C_{32}$, $C_{13} + C_{31}$, $2C_{22}$, $C_{21} + C_{23}$.

Il est alors facile de trouver le comportement, vis-à-vis des points unis de I_3, des courbes C_{31}, C_{32}, C_{33}. Il est résumé dans le tableau suivant :

	A_{12}	A_{13}	A_{21}	A_{23}	A_{31}	A_{32}	B_{12}	B_{13}	B_{23}	B_{21}	B_{31}	B_{32}.
C_{31}	0	0	2	1	2	1	0	0	0	1	1	0
C_{32}	1	2	1	2	0	0	0	1	1	0	0	0
C_{33}	2	1	0	0	1	2	1	0	0	0	0	1

On trouve alors sans difficulté les relations suivantes :

$$|D_2| = |C_1 + C_2| = |2C_3|,$$
$$|D_1| = |2C_1| = |C_2 + C_3|.$$

8. Rapportons projectivement les courbes C_{11} aux hyperplans d'un espace linéaire à r_{11} dimensions. A la surface F correspond un modèle projectif Φ de la surface image de l'involution I_3.

Aux points unis parfaits de I_3 correspondent des points triples, à cônes tangents rationnels irréductibles de Φ. Chacun de ces points est équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à une courbe rationnelle de degré — 3. Nous désignerons cette courbe par α_{ij} lorsqu'elle correspond au point A_{ij}.

Aux points unis non parfaits de I_3, correspondent des points doubles biplanaires ordinaires de Φ. Chacun de ces points est équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à deux courbes rationnelles de degré — 2, se coupant en un point. D'une manière précise, s'il s'agit d'un point B'_1 par exemple, une des courbes rationnelles correspond au point B_{12}, l'autre au point B_{13}. Le point commun aux deux courbes correspond au domaine du point B'_1. D'une manière générale, nous désignerons par β_{ij} la courbe qui correspond au point B_{ij}.

Au système $|C_{ij}|$ correspond sur Φ un système linéaire complet que nous désignerons par $|\Gamma_{ij}|$.

Comme nous l'avons établi antérieurement, nous avons

$$3\Gamma_{11} \equiv 3\Gamma_{12} + \Sigma(\alpha_{12} + \alpha_{21} + \alpha_{31}) + 2\Sigma(\alpha_{13} + \alpha_{23} + \alpha_{32}) + \Sigma(\beta_{13} + \beta_{21} + \beta_{32}) + 2\Sigma(\beta_{12} + \beta_{23} + \beta_{31}),$$

$$3\Gamma_{11} \equiv 3\Gamma_{13} + 2\Sigma(\alpha_{12} + \alpha_{21} + \alpha_{31}) + \Sigma(\alpha_{13} + \alpha_{23} + \alpha_{32}) + 2\Sigma(\beta_{13} + \beta_{21} + \beta_{32}) + \Sigma(\beta_{12} + \beta_{23} + \beta_{31}),$$

les sommations s'étendant aux points de même nature.

A une courbe de $\{C\}$, correspond une courbe Γ de Φ qui, lorsque C tend vers une courbe C_{11}, tend vers une courbe $3\Gamma_{11}$. Lorsque la courbe C tend vers une courbe C_{21}, la courbe Γ tend vers une courbe

$$3\Gamma_{21} + \Sigma(\alpha_{21} + \alpha_{31}) + 2\Sigma(\alpha_{23} + \alpha_{32}) + 2\Sigma(\beta_{23} + \beta_{32}) + \Sigma(\beta_{21} + \beta_{31}).$$

On a donc

$$3\Gamma_{11} \equiv 3\Gamma_{21} + \Sigma(\alpha_{21} + \alpha_{31}) + 2\Sigma(\alpha_{23} + \alpha_{32}) + 2\Sigma(\beta_{23} + \beta_{32}) + \Sigma(\beta_{21} + \beta_{31})$$

et de même,

$$3\Gamma_{11} \equiv 3\Gamma_{22} + \Sigma(\alpha_{12} + \alpha_{32}) + 2\Sigma(\alpha_{13} + \alpha_{31}) + 2\Sigma(\beta_{13} + \beta_{31}) + \Sigma(\beta_{12} + \beta_{32}),$$

$$3\Gamma_{11} \equiv 3\Gamma_{23} + \Sigma(\alpha_{13} + \alpha_{23}) + 2\Sigma(\alpha_{12} + \alpha_{21}) + 2\Sigma(\beta_{12} + \beta_{21}) + \Sigma(\beta_{13} + \beta_{23}).$$

On a ensuite, par le même raisonnement,

$$3\Gamma_{11} \equiv 3\Gamma_{31} + \Sigma(\alpha_{23} + \alpha_{32}) + 2\Sigma(\alpha_{21} + \alpha_{31}) + 2\Sigma(\beta_{21} + \beta_{31}) + \Sigma(\beta_{23} + \beta_{32}),$$

$$3\Gamma_{11} \equiv 3\Gamma_{32} + \Sigma(\alpha_{12} + \alpha_{21}) + 2\Sigma(\alpha_{13} + \alpha_{23}) + 2\Sigma(\beta_{13} + \beta_{23}) + \Sigma(\beta_{12} + \beta_{21}),$$

$$3\Gamma_{11} \equiv 3\Gamma_{33} + \Sigma(\alpha_{13} + \alpha_{31}) + 2\Sigma(\alpha_{12} + \alpha_{32}) + 2\Sigma(\beta_{12} + \beta_{32}) + \Sigma(\beta_{13} + \beta_{31}).$$

La traduction projective de ces différentes relations fonctionnelles est que le long de chacune des courbes Γ_{12}, Γ_{13}, Γ_{21}, Γ_{22}, Γ_{23}, Γ_{31}, Γ_{32}, Γ_{33}, il y a une hypersurface cubique inscrite dans la surface Φ.

9. Nous avons trouvé tantôt la relation

$$|D_1| = |2C_1| = |C_2 + C_3|.$$

On en déduit que le système $|D_{11}|$, qui contient les courbes $2C_{11}$ et $C_{12} + C_{13}$, contient également les courbes $C_{21} + C_{31}$, $C_{22} + C_{33}$, $C_{23} + C_{32}$.

Aux courbes $2C_{11}$ correspondent sur la surface $\varPhi$ les courbes $2\varGamma_{11}$, c'est-à-dire les courbes du système $|2\varGamma_{11}|$, dont une partie au moins est découpée sur $\varPhi$ par les hyperquadriques de l'espace ambiant.

On en conclut que les hyperquadriques passant par une courbe $\varGamma_{12}$ rencontrent encore $\varPhi$ suivant des courbes $\varGamma_{13}$ et réciproquement.

De même, les hyperquadriques passant par une courbe $\varGamma_{21}$ (ou $\varGamma_{22}$, ou $\varGamma_{23}$) coupent encore $\varPhi$ suivant des courbes $\varGamma_{31}$ (ou $\varGamma_{33}$, ou $\varGamma_{32}$) et réciproquement.

Ces propriétés se traduisent par des relations fonctionnelles ; nous nous bornerons à écrire l'une d'elles, qui concerne les courbes $\varGamma_{21}$ et $\varGamma_{31}$. On a

$$\begin{aligned} 2\varGamma_{11} \equiv \varGamma_{21} + \varGamma_{31} + \Sigma(\alpha_{21} + \alpha_{23} \\ + \alpha_{31} + \alpha_{32}) + \Sigma(\beta_{23} + \beta_{21} + \beta_{31} + \beta_{32}). \end{aligned}$$

On voit donc que sur la surface $\varPhi$, le système $\{C\}$ donne naissance à $3^{\alpha+1}$ systèmes linéaires, dont l'un au moins, $|\varGamma_{11}|$, est dépourvu de points-base. Ces systèmes se répartissent en 3^α groupes de trois, provenant d'un même système linéaire de $\{C\}$. Les hyperquadriques passant par un des $3^{\alpha+1} - 1$ systèmes distincts de $|\varGamma_{11}|$, découpent sur $\varPhi$ les courbes d'un autre de ces systèmes.

Liége, le 13 avril 1945.