CONSTRUCTION D'UNE SURFACE CANONIQUE DU HUITIÈME ORDRE;

PAR M. L. GODEAUX.

M. Enriques a attiré l'attention sur le problème de la détermination des surfaces algébriques dont les sections hyperplanes forment le système canonique complet (1). Dans ses *Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche* (2), il est revenu sur ce problème; il a notamment donné quelques indications sur la construction d'une surface du huitième ordre de l'espace ordinaire dont les sections planes forment le système canonique complet. C'est de la construction de cette surface que nous voulons nous occuper ici.

Si une surface F du huitième ordre a comme courbes canoniques ses sections planes, elle doit posséder une courbe double C du douzième ordre. Les adjointes d'ordre $8-4=4$ doivent être formées d'une surface cubique fixe, passant par la courbe C, et des plans de l'espace. De plus, si le système des sections planes est le système canonique complet, la courbe C ne peut appartenir à une surface du quatrième ordre irréductible.

Supposons que la surface F existe et soit Φ la surface cubique passant par la courbe C. Considérons une surface du cinquième ordre Ψ et le faisceau déterminé par la surface F et la surface $\Phi+\Psi$. Une surface quelconque F_0 de ce faisceau touche la surface Φ le long de la courbe C.

Inversement, si F_0 est une surface du huitième ordre touchant la surface Φ le long de la courbe C, le faisceau déterminé par F_0 et F contient une surface formée de la surface Φ et une surface Ψ du cinquième ordre. Le premier problème à résoudre est donc de

---

(1) *Sulla classificazione delle superficie algebriche e particolarmente sulle superficie di genere lineare* $p^{(1)}=1$ (*Rend. R. Accad. Lincei*, 1er sem. 1914, p. 206-214, 291-297).

(2) Rédigées par M. Campedelli (Padoue, Cedam, 1932). *Voir* p. 318-319.

construire une surface du huitième ordre touchant une surface cubique le long d'une courbe du douzième ordre n'appartenant pas à une surface du quatrième ordre irréductible.

En utilisant la représentation plane de la surface cubique, nous établissons le théorème suivant :

Si une surface cubique non réglée et une surface du huitième ordre se touchent le long d'une courbe du douzième ordre n'appartenant pas à une surface irréductible du quatrième ordre, la surface cubique possède quatre points doubles coniques et la surface du huitième ordre 64 *points doubles coniques sur la courbe de contact.*

On remarquera que si la courbe C est fixée sur Φ, la surface $\Phi + \Psi$ possède bien 64 points doubles sur cette courbe, à savoir les quatre points doubles de Φ et les 60 points de rencontre de C et de Ψ.

Reprenons le faisceau déterminé par les surfaces F_0 et F. Toute surface de ce faisceau, distincte de F, possède 64 points doubles coniques sur C et ces points doubles sont fixes. Les points doubles de la surface $\Phi + \Psi$, qui appartient au faisceau, doivent donc coïncider avec les 64 points doubles de F. Cela exige que la surface F_0 ait des points doubles aux points doubles de la surface Φ. On démontre que, si ces quatre points sont exactement doubles pour la surface F_0, la courbe C appartient à une surface du quatrième ordre. Pour qu'il n'en soit pas ainsi, il faut que la surface F_0 possède des points triples aux points doubles de Φ. La surface F_0 possède alors en outre 48 points doubles coniques sur C.

Cela étant, nous construisons un faisceau de surfaces du huitième ordre touchant Φ le long de la courbe C et ayant sur cette courbe quatre points triples, doubles pour Φ, et 48 points doubles fixes. Il en résulte l'existence, dans le faisceau, d'une surface passant doublement par la courbe C.

Il existe une surface du huitième ordre possédant une courbe double du douzième ordre, ayant quatre points triples, triples également pour la surface, dont les sections planes constituent le système conique complet.

Nous supposons, dans cette recherche, que la surface cubique Φ n'est pas réglée.

1. Soient Φ une surface cubique non réglée et F_0 une surface du huitième ordre touchant la surface Φ le long d'une courbe C du douzième ordre. Nous rechercherons dans quelles conditions la courbe C n'est pas l'intersection de Φ et d'une surface du quatrième ordre.

Supposons, en premier lieu, que la surface Φ soit dépourvue de points doubles. Nous pouvons la représenter point par point sur un plan σ de manière qu'à ses sections planes correspondent les cubiques γ_3 passant par six points $A_1, A_2, \ldots, A_6$ non situés sur une même conique et dont trois ne sont jamais en ligne droite.

Aux sections de Φ par les surfaces du huitième ordre correspondent dans σ les courbes γ_{24}, d'ordre 24, passant huit fois par les points $A_1, A_2, \ldots, A_6$. Si une surface du huitième ordre touche Φ le long d'une courbe C d'ordre douze, il correspond à celle-ci dans σ une courbe dont le double appartient totalement au système $|\gamma_{24}|$. Cette courbe est donc d'ordre 12 et passe quatre fois par $A_1, A_2 \ldots, A_6$. Or, aux sections de Φ par les surfaces du quatrième ordre correspondent dans σ les courbes γ_{12}, d'ordre 12, passant quatre fois par $A_1, A_2, \ldots, A_6$. La courbe C appartiendrait donc à une surface du quatrième ordre.

Il en résulte que la surface Φ possède au moins un point double sur la courbe C.

2. Supposons que Φ possède un point double P. On peut la représenter sur un plan σ de telle sorte qu'aux sections planes correspondent les cubiques γ_3 passant par six points $A_1, A_2, \ldots, A_6$ dont les trois premiers sont en ligne droite. Au domaine du point P sur la surface Φ correspondent les points de la droite p, contenant A_1, A_2, A_3.

Aux sections de Φ par les surfaces du huitième ordre passant par P correspondent dans σ des courbes d'ordre 24 formées de la droite p et de courbes γ_{23} d'ordre 23 passant sept fois par A_1, A_2, A_3 et huit fois par A_4, A_5, A_6. A la courbe C de contact Φ avec une surface du huitième ordre devrait correspondre une courbe dont le double appartiendrait au système $|\gamma_{23}|$, ce qui est impossible. Nous devons donc supposer que la surface du huitième ordre touchant Φ le long de C a un point double en P. Alors, la droite p se détache des courbes γ_{23} et à la courbe C doit correspondre une courbe d'ordre 11, passant trois fois par A_1, A_2, A_3 et quatre fois par A_4, A_5, A_6.

Mais aux sections de Φ par les surfaces du quatrième ordre passant par P correspondent les courbes d'ordre 11 se comportant comme la courbe précédente aux points A_1, A_2, ..., A_6. La courbe C appartiendrait donc à une surface du quatrième ordre.

La surface Φ doit donc posséder au moins deux points doubles sur la courbe C.

3. Supposons que Φ possède deux points doubles coniques P_1, P_2 sur la courbe C. Dans la représentation plane de Φ sur un plan σ par les cubiques γ_3 passant par six points A_1, A_2, ..., A_6, les points A_2, A_3 doivent se touver sur une droite p_1 passant par A_1 et les points A_4, A_5 sur une droite p_2 passant également par A_1. La droite p_1 représente le domaine de P_1 et la droite p_2 celui de P_2 sur Φ.

Un raisonnement analogue au précédent montre que, s'il existe une surface du huitième ordre touchant Φ le long de C, cette surface doit avoir des points doubles en P_1, P_2. A la courbe C correspond dans σ une courbe dont le double doit appartenir au système $|\gamma_{20}|$ des courbes γ_{20} d'ordre 20 passant quatre fois par A_1, dix fois par A_2, A_3, A_4, A_5 et huit fois par A_6. On obtient ainsi une courbe d'ordre 10, passant deux fois par A_1, trois fois par A_2, A_3, A_4, A_5 et quatre fois par A_6. Or, cette courbe appartient au système des courbes homologues des sections de Φ par les surfaces du quatrième ordre passant par P_1, P_2.

Nous devons donc supposer que Φ possède au moins trois points doubles coniques sur C.

4. Si Φ possède trois points doubles coniques P_1, P_2, P_3, on peut la représenter sur un plan σ par les cubiques γ_3 circonscrites à un triangle $A_1A_2A_3$ et rencontrant encore $p_1 = A_2A_3$ en un point fixe A_4, $p_2 = A_3A_1$ en un point fixe A_5, $p_3 = A_1A_2$ en un point fixe A_6, les points A_4, A_5, A_6 n'étant pas en ligne droite.

Aux domaines des points P_1, P_2, P_3 sur Φ correspondent respectivement les droites p_1, p_2, p_3.

En reprenant un raisonnement analogue au précédent, on voit que, s'il existe une surface du huitième ordre circonscrite à Φ le long d'une courbe C, cette surface doit avoir des points doubles en P_1, P_2 et P_3.

A la courbe C correspond alors une courbe dont le double doit appartenir au système des courbes $|\gamma_{18}|$ d'ordre 18 passant quatre fois par A_1, A_2, A_3 et six fois par A_4, A_5, A_6. En d'autres termes, à la courbe C correspond une courbe d'ordre 9, passant deux fois par A_1, A_2, A_3 et trois fois par A_4, A_5, A_6. Or, aux sections de Φ par les surfaces du quatrième ordre passant par P_1, P_2, P_3, correspondent dans σ les courbes γ_9 d'ordre 9 passant également deux fois par A_1, A_2, A_3 et trois fois par A_4, A_5, A_6. Actuellement encore, la courbe C appartiendrait donc à une surface du quatrième ordre.

5. Nous sommes donc amené à supposer que la surface Φ possède quatre points doubles coniques P_1, P_2 P_3, P_4. Comme la surface Φ n'est pas réglée par hypothèse, ces points doubles sont les sommets d'un tétraèdre et l'on peut représenter la surface Φ sur un plan par les cubiques γ_3 circonscrites à un quadrilatère complet. Les côtés p_1, p_2, p_3, p_4 de ce quadrilatère représentent respectivement les domaines des points P_1, P_2, P_3, P_4 sur la surface.

Aux sections de Φ par les surfaces du huitième ordre passant par P_1, P_2, P_3, P_4 correspondent dans σ les courbes γ_{20} d'ordre 20 passant six fois par les sommets du quadrilatère complet. Ce système est le double du système formé par les courbes γ_{10} d'ordre 10 passant trois fois par les sommets du quadrilatère complet.

Aux sections de Φ par les surfaces du quatrième ordre passant par P_1, P_2, P_3, P_4 correspondent dans σ les courbes γ_8 d'ordre 8, passant doublement par les sommets du quadrilatère complet. Les courbes γ_{10} ne peuvent évidement pas appartenir au système $|\gamma_8|$.

Par conséquent, s'il existe une surface du huitième ordre touchant Φ le long d'une courbe C du douzième ordre, la surface Φ possède quatre points doubles coniques sur C et comme à la courbe C correspond une courbe γ_{10}, cette courbe C ne peut appartenir à une surface irréductible du quatrième ordre.

La courbe γ_{10} et par conséquent la courbe C ont le genre 18.

6. Nous allons maintenant démontrer qu'une surface F_0, du huitième ordre, touchant Φ le long de la courbe C qui vient d'être rencontrée, possède 64 points doubles coniques sur cette courbe.

La quadrique polaire d'un point M par rapport à Φ passe par les points doubles P_1, P_2, P_3, P_4 et coupe encore la courbe C en 20 points. En chacun de ces points, le plan tangent à Φ passe par M. La développable des plans tangents à Φ le long de la courbe C est donc de classe 20.

La surface du septième ordre, polaire du point M par rapport à F_0, coupe C en 84 points. Parmi ceux-ci, se trouvent les 20 points en lesquels les plans tangents à Φ et donc à F_0 passent par M.

En un autre point de rencontre de C avec la polaire en question, la plan tangent à F_0 ne peut être bien déterminé, car alors ce point appartiendrait à la quadrique polaire de M par rapport à Φ et cette quadrique contiendrait C, ce qui est absurde. Il en résulte que ce point doit être double pour F_0.

Par conséquent, la surface F_0 possède 64 points doubles sur la courbe C. Ces points doubles sont d'ailleurs distincts en général de P_1, P_2, P_3, P_4, d'après la construction de la courbe C. Par hypothèse en effet, la surface F_0 passe simplement par ces points.

7. Soit Ψ une surface du cinquième ordre ne passant pas par les points doubles de Φ. Elle rencontre la courbe C en 60 points et la surface $\Phi + \Psi$ peut être considérée comme une surface du huitième ordre touchant Φ le long de C; elle possède bien 64 points doubles sur la courbe C : les points P_1, P_2, P_3, P_4 et les 60 points de rencontre de C et de Ψ.

Les surfaces F_0 et $\Phi + \Psi$ déterminent un faisceau de surfaces du huitième ordre touchant Φ le long de C. Chacune de ces surfaces possède 64 points doubles sur C, mais les ∞^1 groupes de 64 points ainsi obtenus sur C sont distincts.

Soit R un point de C n'appartenant pas à Ψ et qui ne soit pas un point double de F_0. Il existe une seule surface du faisceau touchant en R une droite non tangente à Φ en ce point. Cette surface possède un point double en R. On en conclut que les ∞^1 groupes de 64 points doubles des surfaces du faisceau varient dans une série d'indice 1 sur la courbe C. Cette série est nécessairement rationnelle comme le faisceau et est donc linéaire. Si nous désignons par Q un groupe découpé sur C par une surface du cinquième ordre, la série des groupes de points doubles appartient à la série linéaire

$$|Q + P_1 + P_2 + P_3 + P_4|.$$

Cette série, d'ordre 64, est certainement non spéciale, puisque C est de genre 18, et a la dimension 46.

Supposons maintenant qu'il existe une surface F du huitième ordre passant doublement par C. Les surfaces F et F_0 déterminent un faisceau dont la surface générale touche Φ le long de C. Toutes les surfaces de ce faisceau ont pour points doubles les 64 points de C qui sont doubles pour F_0.

D'autre part, il existe une surface du faisceau passant par un point de Φ non situé sur C; cette surface comprend Φ comme partie et est complétée par une surface Ψ du cinquième ordre qui doit passer par les 64 points doubles de F_0 sur C. La surface Ψ contient donc la courbe C. Mais alors, le faisceau contient deux surfaces passant doublement par C, à savoir F et $\Phi + \Psi$, par conséquent toutes les surfaces du faisceau, notamment F_0, ont C comme courbe double, contrairement à l'hypothèse.

On en conclut que s'il existe une surface du huitième ordre passant deux fois par une courbe C d'ordre 12 tracée sur Φ, il faut qu'il y ait une surface touchant Φ le long de C et ayant des points au moins doubles en P_1, P_2, P_3, P_4.

8. Reprenons la représentation de Φ par les cubiques γ_3 du plan σ circonscrites à un quadrilatère complet de côtés p_1, p_2, p_3, p_4.

Les sections de Φ par les surfaces du huitième ordre ayant des points doubles en P_1, P_2, P_3, P_4 ont pour homologues dans σ les courbes γ_{16} d'ordre 16 passant quatre fois par les sommets du quadrilatère complet. S'il y a contact d'une surface du huitième ordre le long d'une courbe C, celle-ci a pour homologue dans σ une courbe γ_8 d'ordre 8 passant doublement par les sommets du quadrilatère complet. Or, aux sections de Φ par les surfaces du quatrième ordre passant par P_1, P_2, P_3, P_4, correspondent dans σ les courbes d'ordre 8 passant deux fois par les sommets du quadrilatère complet. La courbe γ_8 appartient au système formé par ces courbes et la courbe C est donc située sur une surface du quatrième ordre, contrairement à la condition imposée à cette courbe.

Nous sommes donc conduit à supposer que la surface du huitième ordre F_0 a des points triples en P_1, P_2, P_3, P_4. Aux sections de Φ par les surfaces du huitième ordre, satisfaisant à ces conditions, correspondent dans σ des courbes d'ordre 12 passant doublement par les sommets du quadrilatère complet. A la courbe C de contact de Φ et de F_0 correspond une courbe γ_6 d'ordre 6, passant simplement par les sommets du quadrilatère complet. Cette courbe ne peut appartenir au système des courbes qui correspondent aux sections de Φ par les surfaces du quatrième ordre passant par P_1, P_2, P_3, P_4.

La courbe C possède actuellement quatre points triples en P_1, P_2, P_3, P_4. Elle est, comme la courbe γ_6, de genre 10.

Observons que l'on pourrait se demander s'il ne suffirait pas que la surface F passe trois fois par certains des points P_1, P_2, P_3, P_4, et deux fois par les autres. Il est facile de voir que cela ne conduit à rien, parce qu'aux sections de Φ par les surfaces du huitième ordre envisagées doivent correspondre dans σ des courbes d'ordre pair passant un nombre pair de fois par les sommets du quadrilatère complet.

Il convient également de remarquer que dans ses *Lezioni* déjà citées, M. Enriques indique, sous une forme un peu différente, les caractères de la courbe C qui vient d'être rencontrée. Nous avons cru nécessaire d'exposer ici la démonstration complète.

9. Considérons une surface F_0 du huitième ordre ayant des points triples en P_1, P_2, P_3, P_4, touchant la surface Φ le long d'une courbe C d'ordre 12 et de genre 10, ayant également des points triples en P_1, P_2, P_3, P_4.

Le raisonnement fait plus haut peut être repris et l'on voit que la développable engendrée par les plans tangents à Φ le long de C est maintenant de classe 12.

La surface du septième ordre, polaire d'un point M par rapport à F_0, passe deux fois par les points P_1, P_2, P_3, P_4, une fois par les points de contact des 12 plans tangents touchant F_0 en des points de C; elle coupe encore C en 48 points qui sont doubles pour F_0.

Soit Ψ une surface du cinquième ordre passant par P_1, P_2, P_3, P_4, mais ne contenant pas C. La surface $\Phi + \Psi$ touche Φ le long de C, possède sur C quatre points triples P_1, P_2, P_3, P_4 et 48 points doubles aux points de rencontre de C et de Ψ, en dehors des quatre points précédents.

Les surfaces F_0 et $\Phi + \Psi$ déterminent un faisceau dont toutes les surfaces touchent Φ le long de C et possèdent par conséquent 48 points doubles sur C. Ces 48 points doubles sont en général variables sur C avec la surface.

En reprenant le raisonnement fait plus haut et en désignant maintenant par Q les groupes de 48 points de rencontre avec C des surfaces du cinquième ordre passant par P_1, P_2, P_3, P_4, en dehors de ces points, on voit que le groupe des points doubles de F_0 sur C appartient à la série linéaire $|Q|$.

La série $|Q|$, d'ordre 48, certainement non spéciale puisque C est de genre 10, a la dimension $48 - 10 = 38$.

Observons que les surfaces du cinquième ordre ne contenant pas Φ comme partie et passant par P_1, P_2, P_3, P_4, sont en nombre ∞^{41}. Cela étant, considérons une surface Ψ irréductible, passant par P_1, P_2, P_3, P_4 et par 38 des 48 points doubles de F_0 situés sur C. Cette surface passe par les 10 points doubles restants et par conséquent les surfaces F_0 et $\Phi + \Psi$ déterminent un faisceau dont toutes les surfaces ont des points triples en P_1, P_2, P_3, P_4 et 48 points doubles fixes sur C.

Il existe une surface de ce faisceau touchant, en un point R de C distinct des points précédents, une droite r non tangente à Φ en R. Cette surface F a un point double en R.

Soit ρ le plan tangent à F_0 et à Φ en R. Les surfaces du septième ordre polaires par rapport à F des points M n'appartenant pas au plan ρ, contiennent la courbe C, puisqu'elles la rencontrent en 85 points. Par conséquent, C est double pour la surface F.

Par construction, la surface F est d'ailleurs irréductible.

Nous aurons donc prouvé l'existence d'une surface F du huitième ordre passant doublement par la courbe C si nous prouvons l'existence d'une surface F_0 touchant Φ le long de C.

10. Pour résoudre cette question, nous utiliserons la théorie des involutions n'ayant qu'un nombre fini de points unis dans le cas simple où il s'agit de l'involution du second ordre engendrée par l'inversion dans un plan [3].

Considérons dans un plan α l'inversion T, d'équations

$$x_1 x'_1 = x_2 x'_2 = x_3 x'_3,$$

qui possède comme points fondamentaux les sommets O_1, O_2, O_3 du triangle de référence.

L'inversion T engendre une involution J du second ordre ayant les quatre points unis

$$I(1, 1, 1), \quad I_1(-1, 1, 1), \quad I_2(1, -1, 1), \quad I_3(1, 1, -1).$$

Le système linéaire $|\Gamma|$ des cubiques planes passant par O_1, O_2, O_3 est transformé en lui-même par T et contient deux systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution J. L'un, $|\Gamma_1|$, est ∞^3; l'autre, $|\Gamma_2|$, est un réseau.

Posons

$$(1)\quad \begin{cases} \rho X_1 = (x_2 + x_3)(x_3 - x_1)(x_1 - x_2), \\ \rho X_2 = (x_2 - x_3)(x_3 + x_1)(x_1 - x_2), \\ \rho X_3 = (x_2 - x_3)(x_3 - x_1)(x_1 + x_2), \\ \rho X_4 = (x_2 + x_3)(x_3 + x_1)(x_1 + x_2), \\ \rho Y_1 = (x_2 + x_3)(x_3 + x_1)(x_1 + x_2), \\ \rho Y_2 = (x_2 - x_3)(x_3 - x_1)(x_1 + x_2), \\ \rho Y_3 = (x_2 + x_3)(x_3 + x_1)(x_1 - x_2). \end{cases}$$

Le système $|\Gamma_1|$ a pour équation

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 + \lambda_4 X_4 = 0;$$

il ne possède comme points-base que O_1, O_2, O_3.

---

[3] *Sur l'inversion et sur une surface cubique à quatre points doubles* (*Mathesis*, 1922, p. 19-23), *Voir* aussi, pour la théorie des involutions appartenant à une surface quelconque : *Mémoire sur les surfaces algébriques doubles ayant un nombre fini de points de diramation* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1914, p. 289-312), *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Paris, Hermann, 1935).

Le réseau $|\Gamma_2|$ a pour équation

$$\mu_1 Y_1 + \mu_2 Y_2 + \mu_3 Y_3 = 0$$

et possède comme points-base O_1, O_2, O_3 et les quatre points unis I, I_1, I_2, I_3.

On a les identités

$$\frac{X_2 X_3}{Y_1} = \frac{X_3 X_1}{Y_2} = \frac{X_1 X_2}{Y_3} = Y_1 + Y_2 + Y_3,$$

$$\frac{Y_2 Y_3}{X_1} = \frac{Y_3 Y_1}{X_2} = \frac{Y_1 Y_2}{Y_3} = X_4,$$

$$X_2 X_3 X_4 + X_3 X_4 X_1 + X_4 X_1 X_2 + X_1 X_2 X_3 = 0. \tag{2}$$

En rapportant projectivement les courbes Γ_1 aux plans de l'espace, on obtient une surface image de l'involution J dont l'équation est précisément (2), où les X sont les coordonnées des points de l'espace. C'est une surface cubique Φ ayant des points doubles coniques aux sommets du tétraèdre de référence.

11. Considérons le système $|G| = |4\Gamma|$ des courbes du douzième ordre passant quatre fois par les points O_1, O_2, O_3. Ce système est transformé en lui-même par T et contient deux systèmes linéaires $|G_1|$, $|G_2|$ appartenant à l'involution J. L'un de ces systèmes, le premier par exemple, a pour points-base quadruples les points O_1, O_2, O_3. Le second a en outre pour points-base simples les points unis de l'involution.

A une courbe du système $|G|$ qui n'est ni une courbe G_1, ni une courbe G_2, correspond point par point sur Φ une courbe G' appartenant comme courbe totale à un système linéaire $|G'|$. A une courbe G' correspondent deux courbes G transformées l'une de l'autre par T; en d'autres termes, à une courbe G' correspond une courbe du système $|2G| = |8\Gamma|$.

Faisons varier d'une manière continue la courbe G dans $|G|$ de manière à la faire coïncider avec une courbe G_1. La courbe G' varie d'une manière continue et vient coïncider avec la courbe G'_1, homologue de G_1, comptée deux fois. Mais, d'autre part, si l'on désigne par Γ' les sections planes de Φ, qui correspondent aux courbes du système $|\Gamma_1|$, on aura $|G'_1| = |4\Gamma'|$. On aura donc

$$|G'| = |8\Gamma'|.$$

c'est-à-dire que le système $|G'|$ sera découpé sur Φ par les surfaces du huitième ordre.

Désignons par p_1, p_2, p_3, p_4 les courbes rationnelles de degré -2 équivalentes, au point de vue des transformations birationnelles, aux points doubles P_1, P_2, P_3, P_4 de la surface Φ.

Faisons varier G d'une manière continue dans $|G|$ jusqu'à ce qu'elle vienne coïncider avec une courbe G_2. La courbe G' varie d'une manière continue sur Φ et vient coïncider avec la courbe G'_2, homologue de G_2, comptée deux fois, augmentée des composantes p_1, p_2, p_3, p_4. On a donc

$$|G'| = |2G'_2 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4| = |8\Gamma|.$$

Il en résulte que, le long d'une courbe G'_2, il y a une surface du huitième ordre passant par P_1, P_2, P_3, P_4, touchant la surface Φ.

Pour former l'équation de cette surface du huitième ordre, interprétons X_1, X_2, X_3, X_4, Y_1, Y_2, Y_3 comme coordonnées d'un point d'un espace S_6 à six dimensions. Au plan α correspond, dans cet espace, une surface V_2^6, du sixième ordre, sur laquelle l'involution J est déterminée par l'homographie harmonique

$$\frac{X'_1}{X_1} = \frac{X'_2}{X_2} = \frac{X'_3}{X_3} = \frac{X'_4}{X_4} = \frac{Y'_1}{-Y_1} = \frac{Y'_2}{-Y_2} = \frac{Y'_3}{-Y_3}.$$

Aux points unis de J correspondent les quatre points d'intersection de V_2^6 avec l'axe $Y_1 = Y_2 = Y_3 = 0$ de l'homographie.

Le système homologue de $|G_2|$ sur V_2^6 est découpé par les hypersurfaces du quatrième ordre passant par cet axe. Ces hypersurfaces ont pour équation

$$Y_1\varphi_1(X_1, X_2, X_3, X_4) + Y_2\varphi_2 + Y_3\varphi_3 = 0,$$

où φ_1, φ_2, φ_3 sont des polynomes du troisième degré en X_1, X_2, X_3, X_4.

En élevant les deux membres de cette équation au carré et en tenant compte des identités établies plus haut, on obtient l'équation

$$(3) \quad \begin{cases} X_1X_4(\varphi_2 - \varphi_3)^2 + X_2X_4(\varphi_3 - \varphi_1)^2 + X_3X_4(\varphi_1 - \varphi_2)^2 \\ -2X_2X_3\varphi_1^2 - 2X_3X_1\varphi_2^2 - 2X_1X_2\varphi_3^2 = 0. \end{cases}$$

Cette équation représente une surface du huitième ordre touchant la surface Φ le long de la courbe G'_2. Cette surface du huitième ordre passe simplement par les points P_1, P_2, P_3, P_4 et la courbe de contact G'_2 est du douzième ordre.

Pour notre objet, nous devons avoir une surface du huitième ordre ayant des points triples en P_1, P_2, P_3, P_4. On obtient cette surface en supposant que, dans les polynomes φ_1, φ_2, φ_3, les termes en X_1^3, X_2^3, X_3^3, X_4^3 manquent.

L'existence de la surface F_0 dont il est question au n° 9 et par conséquent celle de la surface F passant doublement par C sont ainsi établies.

12. Il nous reste à déterminer les invariants de la surface F passant doublement par C.

Par construction, le système $|K|$ des sections planes de F est le système canonique complet et l'on a $p_g = 4$.

D'autre part, l'ordre de la surface est $p^{(1)} - 1 = 8$, donc $p^{(1)} = 9$.

Les biadjointes à la surface F sont des surfaces du huitième ordre passant doublement par la courbe C et distinctes de F. Parmi les biadjointes, se trouvent les ∞^9 surfaces formées de la surface Φ comptée deux fois et des quadriques de l'espace.

D'autre part, les surfaces du cinquième ordre passant par P_1, P_2, P_3, P_4 et ne contenant pas Φ comme partie, sont en nombre ∞^{41} et découpent sur C une série d'ordre 48 et de dimension 38; il y a donc ∞^2 de ces surfaces qui contiennent C et qui forment, avec Φ, ∞^2 surfaces biadjointes.

Supposons qu'il y ait ∞^r surfaces irréductibles du huitième ordre passant doublement par C. Le bigenre de F est alors égal à $P_2 = r + 13$. D'autre part, le système bicanonique $|2K|$ étant l'adjoint de $|K|$, est régulier et l'on a

$$P_2 = p_a + p^{(1)}.$$

Comme $p_a \leq p_g$, on a

$$r = 0, \qquad p_a = 4, \qquad P_2 = 13.$$

La surface F est l'unique surface irréductible du huitième ordre passant deux fois par C.

La surface F *est régulière et a les caractères invariants*

$$p_a = p_g = 4, \qquad p^{(1)} = 9, \qquad P_2 = 13.$$

(Extrait du *Bulletin des Sciences mathématiques*,
2ᵉ série, t. LXVIII, juillet-août 1944.)