Extrait du *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége*
Nos 9 à 12. — 1943.

**Sur l'indétermination de la Jacobienne,**

par LUCIEN GODEAUX, Membre de la Société (*).

Nous nous proposons, dans cette courte note, d'indiquer une démonstration simple d'un théorème connu, susceptible d'être étendue aisément à l'hyperespace.

**1.** Soient F une surface algébrique, $|C|$ un réseau de courbes C tracées sur cette surface et dépourvu de composante fixe. La Jacobienne $C_j$ du réseau $|C|$ est le lieu des points tels que les courbes C passant par un quelconque de ces points y aient même tangente.

Si le réseau $|C|$ est composé au moyen d'un faisceau, la Jacobienne est indéterminée.

Réciproquement, supposons que la Jacobienne $C_j$ de $|C|$ soit indéterminée. Considérons une courbe D, partie irréductible d'une courbe de $|C|$ et un faisceau $|C_0|$ de $|C|$ ne comprenant pas la courbe de $|C|$ dont D fait partie.

Si les courbes $C_0$ rencontrent la courbe D en des points distincts des points-base de $|C|$ et par conséquent variables avec les courbes $C_0$, en un de ces points de rencontre d'une courbe $C_0$ et de D, ces deux courbes se touchent. Par conséquent, la courbe D fait partie de l'enveloppe du faisceau $|C_0|$. Mais ceci est absurde, car l'enveloppe d'un faisceau se réduit aux points-

(*) Séance du 18 novembre 1943.

base de celui-ci. Par conséquenl, les courbes $C_0$ ne peuvent rencontrer la courbe D en dehors des points-base de $|C|$. En d'autres termes, le réseau $|C|$ est de degré zéro.

Il suffit alors de reprendre le raisonnement classique de Bertini. Les courbes C passant par un point quelconque de la surface F doivent avoir une partie commune et $|C|$ est composé au moyen d'un faisceau.

*La condition nécessaire et suffisante pour que la Jacobienne d'un réseau soit indéterminée est que le réseau soit composé au moyen d'un faisceau.*

**2.** Soit maintenant V une variété algébrique à trois dimensions. Considérons un système linéaire $|F|$, triplement infini de surfaces tracées sur V, dépourvu de composante fixe. La Jacobienne $F_j$ du système $|F|$ est le lieu d'un point tel que les surfaces F passant par ce point y aient une tangente commune.

Si le système $|F|$ est composé au moyen d'un faisceau de surfaces ou d'une congruence linéaire de courbes, la Jacobienne $F_j$ est indéterminée.

Réciproquement, supposons que la Jacobienne $F_j$ de $|F|$ soit indéterminée et supposons que $|F|$ ne soit pas composé au moyen d'un faisceau de surfaces. Soient alors D une partie irréductible d'une surface de $|F|$ et $|F_0|$ un réseau de surfaces de $|F|$ ne comprenant pas la surface dont D fait partie. Sur la surface D, $|F_0|$ découpe un réseau de courbes $|(D, F_0)|$. Les courbes de ce réseau passant par un point P de D doivent se toucher en ce point, puisque la Jacobienne $F_j$ est indéterminée. Par conséquent, la Jacobienne du réseau $|(D, F_0)|$ est également indéterminée et ce réseau est composé au moyen d'un faisceau.

Il en résulte que deux surfaces F se rencontrent suivant un certain nombre de courbes G. Si nous considérons les surfaces F de deux faisceaux n'ayant aucune surface commune, les courbes G communes aux couples de surfaces de ces deux faisceaux engendrent une congruence linéaire au moyen de laquelle le système $|F|$ est composé.

*La condition nécessaire et suffisante pour que la Jacobienne d'un système linéaire triplement infini de surfaces soit indéterminée, est que ce système soit composé au moyen d'un faisceau de surfaces ou d'une congruence linéaire de courbes.*

Liége, le 16 novembre 1943.

M. HAYEZ, Imprimeur de l'Académie royale de Belgique, rue de Louvain, 112, Bruxelles.
(Domicile légal : rue de la Chancellerie, 4) N° Réf. 2019.