Extrait du *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége*
Séance du 15 octobre 1942. — N° 10.

Construction du système canonique d'une surface particulière,

par L. GODEAUX, Membre de la Société.

Nous nous proposons dans cette note de construire le système canonique d'une surface algébrique contenant un certain nombre de courbes isolées.

Nous commençons par étudier la surface représentée dans un espace linéaire à n dimensions par l'évanouissement d'une matrice à trois lignes et n colonnes de formes linéaires. C'est une surface rationnelle d'ordre $\frac{1}{2}n(n-1)$ représentant les courbes planes d'ordre n passant par $\frac{1}{2}n(n+1)$ points fixes; elle contient $\frac{1}{2}n(n+1)$ droites deux à deux gauches.

Nous considérons ensuite, dans un espace linéaire à $n+1$ dimensions, le cône projetant la surface précédente d'un point et la surface section de ce cône pour une hypersurface d'ordre m ne passant pas par le sommet. Cette surface contient $\frac{1}{2}n(n+1)$ courbes planes d'ordre m et de genre $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$, isolées, fondamentales pour un réseau de courbes de degré m. Le système canonique de la surface se construit au moyen de ce réseau et des courbes planes isolées. Nous établissons que les courbes canoniques rencontrent chacune des courbes isolées en $m(m-2)$ points. La surface peut du reste être transformée en une autre sur laquelle aux courbes isolées correspondent des points multiples d'ordre m. Si la surface appartenait à l'espace ordinaire, les surfaces adjointes passeraient $m-2$ fois par les points multiples. Actuellement, la surface appartient à un hyperespace et les courbes canoniques sont découpées par des hypersurfaces ayant également la multiplicité $m-2$ aux points multiples.

Nous notons en passant qu'une matrice de formes linéaires à trois lignes et cinq colonnes, dans un espace linéaire à quatre dimensions, s'annule pour les points d'une courbe para-canonique de genre six.

1. Considérons une matrice à trois lignes et n colonnes :

$$\| \varphi_{i1}\, \varphi_{i2} \cdots \varphi_{in} \| = 0 \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{1}$$

dont les éléments sont des formes algébriques linéaires par rapport aux coordonnées $x_0, x_1, \ldots, x_n$ des points d'un espace linéaire S_n à n dimensions. Dans cet espace, les équations (1) représentent une surface F; il résulte de formules générales dues à C. Segre et à M. G. Giambelli que cette surface est d'ordre $\frac{1}{2}n(n-1)$. On peut évaluer cet ordre de la manière suivante :

Les équations(1) entraînent les relations

$$y_1\varphi_{1i} + y_2\varphi_{2i} + y_3\varphi_{3i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n). \tag{2}$$

Écrivons ces relations sous la forme

$$x_0\psi_{i0} + x_1\psi_{i1} + \cdots + x_n\psi_{in} = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n), \tag{3}$$

les ψ étant des formes linéaires en y_1, y_2, y_3.

L'ordre de la surface F est égal au nombre de points communs à cette surface et à l'espace $x_{n-1}=x_n=0$. Introduisons ces valeurs dans les équations (3) et écrivons qu'elles sont compatibles; nous obtenons la relation

$$\| \psi_{i0}\,\psi_{i1} \cdots \psi_{in-2} \| = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n), \tag{4}$$

dont le premier membre est une matrice à n lignes et $n+1$ colonnes. Les équations (4) entraînent les équations (3), donc les équations (1) où l'on a posé $x_{n-1}=x_n=0$.

Interprétons y_1, y_2, y_3 comme les coordonnées d'un point y d'un plan. Les équations (4) représentent $\frac{1}{2}n(n-1)$ points y de ce plan et, par conséquent, F est d'ordre $\frac{1}{2}n(n-1)$.

2. Nous allons maintenant déterminer le genre des sections hyperplanes C de F. A cet effet, coupons F par l'hyperplan $x_n=0$. Les équations (1) sont équivalentes aux équations (3), où l'on a posé $x_n=0$. En écrivant que les équations (4) sont compatibles, on obtient

$$|\psi_{i0}\,\psi_{i1} \cdots \psi_{in-1}| = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

Cette équation représente, dans le plan des y, une courbe Γ d'ordre n, birationnellement identique à la section C de F par $x_n=0$. La courbe Γ est en général dépourvue de points multiples et est, par conséquent, de genre $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$.

3. A un point de la surface F correspond, par les équations (2), un point y. Inversement, à un point y du plan, les équations (3) font correspondre un point x de la surface F. La surface F est donc rationnelle et représentable point par point sur le plan des y.

A la section C de F par l'hyperplan

$$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$$

correspond dans le plan la courbe Γ dont l'équation s'obtient en éliminant les x entre l'équation précédente et les équations (3). On obtient l'équation

$$\begin{vmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \\ \psi_{10} & \psi_{11} & \cdots & \psi_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \psi_{n0} & \psi_{n1} & \cdots & \psi_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Les courbes Γ d'ordre n ont en commun les $\frac{1}{2}n(n+1)$ points fixes dont les coordonnées vérifient les équations

$$\| \psi_{i0}\, \psi_{i1} \cdots \psi_{in} \| = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

4. A une droite

$$\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \mu_3 y_3 = 0$$

du plan correspond sur F la courbe d'équations

$$\| \mu_i\, \varphi_{i1}\, \varphi_{i2} \cdots \varphi_{in} \| = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

d'ordre n, rationnelle, normales. Cette courbe, que nous désignerons par C_0, appartient sur F à un réseau homaloïdal $|C_0|$.

Aux coniques, aux cubiques, ... du plan correspondent sur F les courbes des systèmes $|2C_0|$, $|3C_0|$, ... En particulier, aux adjointes d'ordre $n-3$ des courbes Γ correspondent sur F les courbes du système $|(n-3)C_0|$. Ces courbes sont d'ordre $n(n-3)$ et forment un système linéaire de degré $(n-3)^2$.

Sur une section hyperplane C, les hyperplans de S_n découpent une série d'ordre $\frac{1}{2}n(n-1)$ et de dimension $n-1$. Cette série est certainement non spéciale et a donc la dimension

$$\frac{1}{2}n(n-1) - \frac{1}{2}(n-1)(n-2) = n-1.$$

Les courbes C et par suite la surface F sont donc normales et le système $|\Gamma|$ est régulier.

Observons en particulier que pour $n=5$, les courbes C sont de genre 6 et d'ordre 10. La série découpée par les hyperplans sur une courbe C est donc une série paracanonique g^4_{10} et les courbes C sont alors des courbes paracanoniques.

Aux $\frac{1}{2}n(n+1)$ points-base (simples) du système $|\Gamma|$ correspondent $\frac{1}{2}n(n+1)$ droites, deux à deux gauches, de la surface F. Ces droites sont fondamentales pour le réseau $|C_0|$ et pour ses multiples; ce sont du reste des droites exceptionnelles de la surface F.

Représentons ces droites par a_1, a_2, ..., a_N, où $N=\frac{1}{2}n(n+1)$ Nous avons

$$C+a_1+a_2+\cdots+a_N \equiv nC_0.$$

On en déduit, en prenant les adjointes des deux membres,

$$|C'|=|(n-3)\,C_0|=|(n-1)\,C_0+C_0'-a_1-a_2-\cdots-a_N|$$

et, par conséquent, le système (virtuel) adjoint de $|C_0)$ est

$$|C_0'|=|a_1+a_2+\cdots+a_N-2\,C_0|.$$

5. Considérons maintenant un espace linéaire S_{n+1} à $n+1$ dimensions contenant S_n et soient O un point de S_{n+1} n'appartenant pas à S_n, V_3 le cône projetant de O la surface F.

Coupons le cône V_3, d'ordre $\frac{1}{2}n(n-1)$, par une hypersurface V_n^m d'ordre m de S_{n+1}, ne passant pas par le point O. Nous obtenons une surface Φ, d'ordre $\frac{1}{2}n(n-1)m$, dont nous allons déterminer le système canonique.

Nous désignerons par Γ les sections hyperplanes de la surface Φ, par Γ_0 les courbes de cette surface situées sur les cônes projetant de O les courbes C_0, enfin par γ_1, γ_2, ..., γ les courbes de Φ situées dans les plans Oa_1, Oa_2, ..., Oa_N.

Les courbes γ_1,γ_2, ..., γ_N sont fondamentales pour le réseau $|\Gamma_0|$ de degré m.

Sur la surface F, les courbes C_0 rencontrant la droite a_1 par exemple se décomposent en cette droite et une courbe rationnelle normale C_{01} d'ordre $n-1$. Les courbes C_{01} forment un faisceau $|C_{01}|$ de degré zéro. On a, en effet,

$$C_0 \equiv C_{01}+a_1\,;$$

la droite a_1 est de degré -1 et est rencontrée en un point par les courbes C_{01}.

Aux courbes C_{01} correspondent sur Φ des courbes que nous désignerons par Γ_{01}, formant un faisceau $|\Gamma_{01}|$ de degré zéro.

6. Fixons l'attention sur une courbe Γ_0; elle est d'ordre mn et tracée sur un cône rationnel normal d'ordre n, appartenant à S_{n+1}. Projetons ce cône de $n-1$ de ses points, distincts du sommet et situés sur des génératrices distinctes, sur un plan ϖ. Aux sections hyperplanes du cône correspondent dans ϖ des courbes d'ordre n ayant un point A multiple d'ordre $n-1$ et $n-1$ tangentes fixes en ce point. A la courbe Γ_0 correspond une courbe $\overline{\Gamma}_0$ d'ordre mn, ayant la multiplicité $m(n-1)$ en A et $n-1$ points multiples d'ordre m, infiniment voisins de A. La courbe Γ_0 et par suite la courbe Γ sont donc de genre $\frac{1}{2}(m-1)(mn-2)$.

Les adjointes à la courbe Γ_0 sont des courbes d'ordre $mn-3$ ayant en A la multiplicité $m(n-1)-1$ et $n-1$ points multiples d'ordre $m-1$, infiniment voisins de A. Ces courbes comprennent donc comme parties les $n-1$ tangentes à la courbe Γ_0 en A et sont complétées par des courbes d'ordre $n(m-1)-2$, ayant la multiplicité $n(m-1)-m$ en A et $n-1$ points multiples d'ordre $m-1$ infiniment voisins de A. Ces dernières courbes découpent la série canonique sur Γ_0. Parmi ces courbes se trouvent celles qui sont formées de $n(m-1)-2$ droites passant par A. Par conséquent, les groupes de $n(m-1)-2$ génératrices du cône d'ordre n contenant la courbe Γ_0 découpent sur celle-ci des groupes canoniques.

On en conclut que sur la surface Φ, les courbes du système

$$|[n(m-1)-2]\Gamma_0|$$

découpent sur une courbe Γ_0 des groupes canoniques de celle-ci.

Les courbes $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_N$ étant fondamentales pour le réseau $|\Gamma_0|$, l'adjoint de ce réseau peut comprendre ces courbes qui, par raison de symétrie, interviendront de la même manière. L'adjoint de $|\Gamma_0|$ sera donc

$$|\Gamma_0'| = |[n(m-1)-2]\Gamma_0 + \lambda(\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_N)|,$$

λ étant un entier.

7. Fixons maintenant l'attention sur une courbe Γ_{01}. Cette courbe est tracée sur un cône rationnel normal d'ordre $n-1$, appartenant à un espace linéaire à n dimensions. En faisant un raisonnement analogue à celui qui vient d'être fait pour les courbes Γ_0, on voit que les groupes de $(n-1)(m-1)-2$ génératrices du cône en question découpent des groupes canoniques sur la courbe Γ_{01}. Par conséquent, sur la surface Φ, les courbes du système

$$|[(n-1)(m-1)-2]\Gamma_0|$$

découpent des groupes canoniques sur Γ_{01}.

Le système adjoint $|\Gamma'_{01}|$ au faisceau $|\Gamma_{01}|$ se compose du système précédent augmenté des courbes $\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_N$ fondamentales pour ce faisceau et de courbes du faisceau lui-même (puisqu'il est de degré zéro). On aura donc

$$|\Gamma'_{01}| = |[(n-1)(m-1)-2]\Gamma_0 + \mu(\gamma_2+\gamma_3+\cdots+\gamma_N) + \mu_0\Gamma_{01}|,$$

μ et μ_0 étant des entiers.

8. Nous avons

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_{01} + \gamma_1,$$

et, par conséquent,

$$\Gamma'_0 \equiv \Gamma'_{01} + \gamma_1.$$

On en déduit la relation fonctionnelle

$$[n(m-1)-2]\Gamma_0 + \lambda(\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_N) \equiv [(n-1)(m-1)-2]\Gamma_0 + \mu(\gamma_2+\gamma_3+\cdots+\gamma_N) + \mu_0(\Gamma_0-\gamma_1) + \gamma_1,$$

qui doit être une identité.

On en tire

$$\mu_0 = m-1, \quad \lambda = -(m-2), \quad \mu = \lambda = -(m-2).$$

Par suite, il vient

$$|\Gamma'_0| = |[n(m-1)-2]\Gamma_0 - (m-2)(\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_N)|,$$
$$|\Gamma'_{01}| = |[n(m-1)-2]\Gamma_0 - (m-1)\gamma_1 - (m-2)(\gamma_2+\gamma_3+\cdots+\gamma_N)|.$$

On a également

$$\Gamma'_0 \equiv \Gamma_{01} + \gamma'_1.$$

Par conséquent, on a

$$|\gamma'_1| = |[n(m-1)-3]\Gamma_0 - (m-3)\gamma_1 - (m-2)(\gamma_2+\gamma_3+\cdots+\gamma_N)|.$$

La courbe γ_1 est de genre $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ et de degré $-m$.

9. Le système canonique

$$|K| = |\Gamma'_0 - \Gamma_0|$$

de la surface Φ est donné par

$$|K| = |[n(m-1)-3]\Gamma_0 - (m-2)(\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_N)|.$$

Considérons le système

$$|G| = |\alpha\Gamma_0|,$$

où α est un entier au moins égal à trois. Le système $|G|$ est irréductible et sa dimension r est au moins égale à $\frac{1}{2}\alpha(\alpha+3)$. Les courbes $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_N$ sont fondamentales pour ce système.

Rapportons projectivement les courbes G aux hyperplans d'un espace S_r à r dimensions. A la surface Φ correspond une surface Φ_1, birationnellement identique. Aux courbes γ_1, γ_2, ..., γ_N correspondent des points A_1, A_2, ..., A_N multiples pour la surface Φ_1.

Observons qu'une courbe G passant par un point de γ_1, par exemple, contient cette courbe et est complétée par une courbe du système $|(\alpha-1)\Gamma_0+\Gamma_{01}|$, rencontrant γ_1 en m points. On en conclut que les points A_1, A_2, ..., A_N sont multiples d'ordre m pour Φ_1. Le cône tangent en chacun de ces points est dépourvu de droites multiples et appartient à un espace linéaire à trois dimensions.

Les courbes canoniques K de Φ rencontrent la courbe γ_1 en $m(m-2)$ points. Sur Φ_1, les courbes canoniques ont donc la multiplicité $m(m-2)$ en A_1.

10. Les sections hyperplanes Γ de la surface Φ sont liées aux courbes Γ_0 par la relation fonctionnelle

$$\Gamma+\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_N\equiv n\Gamma_0.$$

On a donc

$$\Gamma'\equiv(nm-3)\Gamma_0-(m-1)(\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_N).$$

Liége, le 8 octobre 1942.

M. HAYEZ, Impr. de l'Académie royale, 112, rue de Louvain, Bruxelles
(Domicile légal : rue de la Chancellerie, 4)
N° Réf. 2019.