## Sur les involutions de genres un appartenant à une surface algébrique,

par Lucien GODEAUX, Correspondant de l'Académie.

Nous avons montré, à diverses reprises ([1]), l'existence d'involutions cycliques de genres un ($p_a = P_4 = 1$), n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique de genres supérieurs à l'unité. Soit F une surface algébrique régulière de genres $p_g = p_a$ supérieurs à l'unité, contenant une involution cyclique $I_p$ d'ordre premier $p$, n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Désignons par $\Phi$ une surface image de l'involution. Le système canonique $|L|$ de F est transformé en lui-même par la transformation birationnelle T de F en elle-même, génératrice de l'involution $I_p$; ce système contient par conséquent un certain nombre (au plus égal à $p$) de systèmes linéaires partiels $|L_1|$, $|L_2|$, ... composés au moyen de l'involution $I_p$. L'un de ces systèmes, par exemple $|L_1|$, est le transformé du système canonique $|\Lambda_1|$ de la surface $\Phi$. Si la surface $\Phi$ est de genres un ($p_a = P_4 = 1$), c'est-à-dire possède une courbe canonique d'ordre zéro, le système $|\Lambda_1|$ doit se réduire à une seule courbe exceptionnelle si elle est d'ordre supérieur à zéro (ce qui dépend du modèle projectif choisi de la surface $\Phi$).

---

(1) Sur quelques involutions appartenant à la surface de Humbert généralisée (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1936, pp. 240-251, 438-446); Sur les involutions cycliques du troisième ordre et de genres un appartenant à une surface algébrique (*Ibid.*, 1936, pp. 561-570); Sur une involution de genres un appartenant à une surface de genre quatre (*Bull. de la Soc. roy. des Sciences de Liége*, 1936, pp. 136-139).

Il nous a paru intéressant de rechercher les surfaces régulières contenant une involution de genres un, cyclique, n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Cette note contient les premiers résultats que nous avons obtenus sur cette question. Nous nous plaçons dans l'hypothèse où la courbe exceptionnelle $\Lambda_1$ est irréductible.

**1**. Soit F une surface algébrique régulière de genres $p_g = p_a$ supérieurs à l'unité, contenant une involution cyclique $I_p$, d'ordre premier $p$, de genres un ($p_a = P_4 = 1$), n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Soit T la transformation birationnelle de la surface F en elle-même, génératrice de l'involution.

Construisons sur la surface F un système linéaire complet $|C|$, transformé en lui-même par T, contenant $p$ systèmes linéaires partiels $|C_1|, |C_2|, \ldots, |C_p|$ composés au moyen de l'involution $I_p$, dont l'un, $|C_1|$, soit dépourvu de points-base (¹). Soit $\Phi$ une surface normale, image de l'involution $I_p$, dont les sections hyperplanes $\Gamma_1$ correspondent aux courbes $C_1$.

Par hypothèse, le système canonique $|L|$ de F contient une courbe $L_1$, appartenant à l'involution $I_p$ (c'est-à-dire lieu de $\infty^1$ groupes de cette involution), dont la transformée, sur la surface $\Phi$, est une courbe exceptionnelle $\Lambda_1$ (c'est-à-dire une courbe rationnelle de degré $-1$). Nous supposerons cette courbe irréductible

Désignons par $n$ le degré de $|\Gamma_1|$ (ordre de la surface $\Phi$), par $\pi$ le genre des courbes $\Gamma_1$ et par $\nu$ le nombre de points de rencontre de la courbe $\Lambda_1$ avec les courbes $\Gamma_1$ (ordre de la courbe $\Lambda_1$). Les courbes C ont alors le degré $pn$ et le genre $p(\pi-1)+1$ ; elles rencontrent les courbes canoniques L de F au $p\nu$ points et on a par conséquent

$$\nu = 2(\pi - 1) - n.$$

(¹) Voir notre exposé : *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Paris, Hermann, 1935).

**2**. L'adjoint $|\Gamma_1'|$ au système $|\Gamma_1|$ est donné par

$$|\Gamma_1'| = |\Gamma_1 + \Lambda_1|$$

et les courbes $\Gamma_1'$ coupent la courbe $\Lambda_1$ en $\nu - 1$ points.

D'une manière générale, le $k$-ième adjoint $|\Gamma_1^{(k)}|$ à $|\Gamma_1|$ est donné par

$$|\Gamma_1^{(k)}| = |\Gamma_1 + k\Lambda_1|$$

et les courbes $\Gamma_1^{(k)}$ coupent la courbe $\Lambda_1$ en $\nu - k$ points. En particulier, le $\nu$-ième adjoint $|\Gamma_1^{(\nu)}|$ à $|\Gamma_1|$ sera formé de courbes ne rencontrant plus la courbe exceptionnelle $\Lambda_1$.

Considérons une transformée birationnelle normale $\Phi^*$ de $\Phi$ dont les sections hyperplanes correspondent aux courbes $\Gamma_1^{(\nu)}$. A la courbe exceptionnelle $\Lambda_1$ correspond sur la surface $\Phi^*$ un point simple A. Aux courbes $\Gamma_1$ correspondent sur la surface $\Phi^*$ des courbes que nous désignerons par le même symbole, qui sont des sections hyperplanes $\Gamma_1^{(\nu)}$ ayant en A la multiplicité $\nu$. Il en résulte que les sections hyperplanes de $\Phi^*$ ont le degré et le genre respectivement égaux à

$$n_\nu = n + \nu^2, \quad \pi_\nu = \pi + \frac{1}{2}\nu(\nu - 1).$$

La surface $\Phi^*$ étant normale, on doit avoir la relation

$$n_\nu = 2\pi_\nu - 2,$$

ce qui donne, pour $\nu$, la valeur trouvée plus haut.

La dimension de $|\Gamma_1^{(\nu)}|$ est égale à $\pi_\nu$; par suite celle de $|\Gamma_1|$ est égale à

$$\pi_\nu - \frac{1}{2}\nu(\nu + 1) = \pi - \nu.$$

La dimension du système $|\Gamma_1 - \Lambda_1|$ est égale à $\pi - 2\nu - 1$. Il en résulte que les sections hyperplanes de la surface $\Phi$ assujetties à contenir la courbe $\Lambda_1$ satisfont à $\nu + 1$ conditions. En d'autres termes la courbe $\Lambda_1$ appartient à un espace linéaire $S_\nu$, à $\nu$ dimensions. Comme elle est rationnelle et d'ordre $\nu$, la courbe $\Lambda_1$ est donc une courbe rationnelle normale de l'espace $S_\nu$.

**3.** Supposons que l'involution $I_p$ possède, sur la surface $\Phi$, un point de diramation multiple d'ordre $m$ ($m \geq 2$) pour cette surface. Les courbes du système canonique impur de cette surface doivent avoir la multiplicité $m-2$ en ce point. Dans le cas actuel, la courbe $\Lambda_1$ doit avoir la multiplicité $m-2$ au point considéré. Or cette courbe étant rationnelle normale, ne peut avoir de points multiples; on a donc $m=2$ ou $m=3$. L'involution $I_p$ ne peut avoir, sur la surface $\Phi$, que des points doubles ou triples pour cette surface.

On sait que [1] :

Si $p=2$, les points de diramation de la surface $\Phi$ sont des points doubles coniques;

Si $p=3$, les points de diramation de la surface $\Phi$ sont des points doubles biplanaires ou des points triples coniques à cônes tangents rationnels;

Si $p>3$, les points de diramation doubles de la surface $\Phi$ sont des points doubles biplanaires auxquels sont infiniment voisins successifs $\frac{1}{2}(p-3)$ points doubles biplanaires dont le dernier est ordinaire.

Lorsque le point de diramation est triple pour la surface $\Phi$, nous avons montré récemment [2] que le cône tangent en ce point se décompose en un cône du second ordre et en un plan coupant le cône suivant une seule droite. A ce point sont infiniment voisins successifs une suite de $\eta$ points doubles dont le dernier est conique si $p$ est de la forme $4\eta+3$, biplanaire ordinaire si $p$ est de la forme $4\eta+5$.

Si $p=2$, la courbe $\Lambda_1$ ne passe par aucun point de diramation. Si nous désignons par $p^{(1)} \geq 1$ le genre linéaire de F, la courbe $L_1$, de genre $p^{(1)}$, doit contenir une involution rationnelle du second ordre, privée de points unis, ce qui est impos-

---

(1) Les involutions cycliques... (*Loc. cit.*).

(2) Sur la structure des points unis des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (*Mém. in-8° de l'Acad. roy. de Belgique*, 1938, t. XVII).

sible. On doit donc avoir $p \geq 3$. Nous avons déjà étudié le cas $p=3$, dans l'hypothèse où le système canonique $|L|$ de F n'est ni un faisceau, ni composé au moyen d'un faisceau ($p_a \geq 3$). Nous avons établi que la surface F a les genres $p_a = p_g = 3$, $p^{(1)}=4$, $P_2=6, \ldots$ et que l'involution de genres un, $I_3$, possède six points unis parfaits [1].

Dans la suite, nous supposerons donc $p \geq 5$.

**4.** Un point uni P de l'involution $I_p$ sur la surface F, donnant naissance à un point de diramation triple de l'espèce indiquée ci-dessus pour la surface $\Phi$, est caractérisé de la manière suivante [2] : Les courbes $C_1$ passant par P y acquièrent un point triple. Elles ont en commun $\frac{1}{2}(p-3)$ points doubles infiniment voisins successifs de P, unis pour l'involution $I_p$, et $p-3$ points simples infiniment voisins successifs de P, dans une seconde direction, également unis pour $I_p$.

Soit P' le point de diramation de $\Phi$ homologue de P. Le point P' est équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à une suite de courbes rationnelles

$$\gamma_1, \gamma_{11}, \gamma_{21}, \ldots, \gamma_{22}, \gamma_{12}, \gamma_2,$$

au nombre de $2\eta+3$ si $p=4\eta+3$, de $2\eta+2$ si $p=4\eta+5$. Chacune de ces courbes rencontre en un point la précédente et la suivante, mais ne rencontre pas les autres. La courbe $\gamma_1$ rencontre $\gamma_{11}$ en un point, mais ne rencontre pas les autres; la courbe $\gamma_2$ rencontre $\gamma_{12}$ en un point, mais ne rencontre pas les autres. La courbe $\gamma_1$ est de degré $-3$, les autres de degré $-2$.

Les points de la courbe $\gamma_1$ correspondent aux groupes de $I_p$ infiniment voisins du dernier point double du domaine de P de la suite commune à toutes les courbes $C_1$ passant par P. Les points de la courbe $\gamma_2$ correspondent aux groupes de $I_p$ infini-

---

(1) Sur les involutions cycliques du troisième ordre et de genres un... (*Loc. cit.*).

(2) Sur la structure des points unis... (*Loc. cit.*).

ment voisins du dernier point simple du domaine de $P_1$, de la suite commune à toutes les courbes $C_1$ passant par P.

Les courbes du système canonique impur de $\Phi$, c'est-à-dire actuellement la courbe $\Lambda_1$, rencontrent en un point la courbe $\gamma_1$, mais ne rencontrent pas les courbes $\gamma_{11}, \dots \gamma_2$.

Il en résulte que la courbe $L_1$ passe par les points unis de l'involution $I_p$ du même type que P et par les $\frac{1}{2}(p-3)$ points infiniment voisins de chacun de ces points qui sont doubles pour les courbes $C_1$ passant par ces points.

Les courbes $\Gamma'_1$ se comportent, au point P', comme la courbe $\Lambda_1$, c'est-à-dire rencontrent la courbe $\gamma_1$ en un point. Les transformées $C'_1$ des courbes $\Gamma'_1$ sur la surface F appartiennent comme courbes totales au système $|C'|$ adjoint à $|C|$; elles se comportent au point P comme la courbe $L_1$. Si $\alpha$ est le nombre de points unis de l'involution $I_p$ du même type que P, le système $|C'_1|$ a donc $\frac{1}{2}\alpha(p-1)$ points-base qui ne sont pas des points-base de $|C'|$.

Le système $|\Gamma'_1|$ a le degré $n+2\nu-1$ ; par conséquent le système $|C'_1|$ a le degré effectif $p(n+2\nu-1)$ et le degré virtuel $p(n+2\nu-1)+\frac{1}{2}\alpha(p-1)$. Ce dernier est égal au degré de l'adjoint $|C'|$ à $|C|$. Entre les degré N et genre $\Pi$ d'un système linéaire et le degré N' de son adjoint, on a la relation

$$N' = p^{(1)} - 1 + 4(\Pi - 1) - N,$$

$p^{(1)}$ étant le genre linéaire de la surface. Appliquons cette relation aux systèmes $|C|$, $|C'|$ sur la surface F. On en déduit que le genre linéaire de F est donné par

$$p^{(1)} = \frac{1}{2}(p-1)(\alpha-2).$$

On arrive également à cette formule en exprimant que les groupes de $I_p$ appartenant à la courbe $L_1$ forment une involution rationnelle possédant $\alpha$ points de diramation.

Observons que $p^{(1)}$ étant supérieur à l'unité, $\alpha$ est au moins égal à trois.

**5**. Les courbes $\Gamma_1^{(\nu)}$ rencontrent la composante $\gamma_1$ du point P′ en $\nu$ points; par conséquent il correspond à cette courbe, sur la surface $\Phi^*$, une courbe rationnelle d'ordre $\nu$, que nous désignerons encore par $\gamma_1$. Cette courbe $\gamma_1$ passe par le point A qui correspond à la courbe exceptionnelle $\Lambda_1$. Lorsqu'on passe de la surface $\Phi^*$ à la surface $\Phi$, à la courbe $\gamma_1$ de la première surface correspond sur la seconde l'ensemble de la courbe $\gamma_1$ et de $\Lambda_1$, c'est-à-dire une courbe de degré $-3-1+2=-2$. Sur la surface $\Phi^*$, la courbe $\gamma_1$ est donc de degré $-2$.

Les courbes $\Gamma_1^{(\nu)}$ ne rencontrent pas les autres composantes $\gamma_{11}, \gamma_{21}, \dots, \gamma_2$ du point P′; par conséquent à l'ensemble de ces courbes correspond un point singulier P″ de la surface $\Phi^*$, point singulier appartenant à la courbe $\gamma_1$. Les courbes $\gamma_{11}, \dots, \gamma_2$ étant de degré $-2$ et chacune d'elles ne rencontrant que la précédente et la suivante en un point, le point P″ est double pour la surface $\Phi^*$.

Si $p$ est de la forme $4\eta+3$, le point P″ est un point double auquel sont infiniment voisins successifs $\eta$ points doubles dont le dernier est biplanaire ordinaire.

Si $p$ est de la forme $4\eta+5$, le point P″ est un point double auquel sont infiniment voisins successifs $\eta$ points doubles dont le dernier est conique (si $\eta=0$, $p=5$, P″ est double conique).

Désignons par $P'_1, P'_2, \dots, P'_\alpha$ les $\alpha$ points de diramation triples de la surface $\Phi$, par $\gamma_1^{(1)}, \gamma_1^{(2)}, \dots, \gamma_1^{(\alpha)}$ les composantes respectives de degré $-3$ de ces points. Nous aurons en correspondance, sur la surface $\Phi^*$, $\alpha$ courbes rationnelles de degré $-2$, $\gamma_1^{(1)}, \gamma_1^{(2)}, \dots, \gamma_1^{(\alpha)}$, se rencontrant en un même point A (et en aucun autre point) et $\alpha$ points doubles $P''_1, P''_2, \dots, P''_\alpha$ situés respectivement sur ces courbes.

Les $\alpha$ courbes $\gamma_1^{(1)}, \gamma_1^{(2)}, \dots, \gamma_1^{(\alpha)}$, les composantes des points $P''_1, P''_2, \dots, P''_\alpha$ et les sections hyperplanes de la surface $\Phi^*$ sont des courbes linéairement indépendantes. On le voit en observant que le déterminant dont les éléments sont les nombres de points d'intersection de ces courbes prises deux à deux n'est pas nul. Or, le nombre-base d'une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$) est au plus égal à vingt (1); ceci permet d'obtenir une limite supérieure de l'ordre $p$ de l'involution $I_p$.

Supposons en premier lieu $p = 4\eta + 3$. Chaque point P″ équivaut à $2\eta + 2$ courbes rationnelles de degré $-2$. En tenant compte des $\alpha$ courbes $\gamma_1$ et des sections hyperplanes, on aura

$$(2\eta + 3)\alpha + 1 \leq 20;$$

d'où, en observant que $\alpha$ est au moins égal à trois, $\eta \leq 1$ et $p = 7$.

Supposons maintenant $p = 4\eta + 5$. Chaque point P″ équivaut à $2\eta + 1$ courbes et l'on a

$$(2\eta + 2)\alpha + 1 \leq 20;$$

d'où $\eta \leq 2$ et, $p$ étant premier, $p = 5$ ou $p = 13$. Dans le dernier cas, on a du reste $\alpha = 3$.

**6**. Comme nous l'avons observé, la surface $\Phi$ peut posséder des points de diramation sans influence sur les courbes canoniques de la surface; ce sont des points doubles biplanaires à chacun desquels sont infiniment voisins succssifs $\frac{1}{2}(p - 3)$ points doubles biplanaires dont le dernier est ordinaire. Supposons qu'il y ait $\beta$ de ces points.

Entre le genre arithmétique $p_a$ de F et celui $\pi_a$ de $\Phi$ on a la relation (2)

$$12(p_a + 1) = 12p(\pi_a + 1) - \frac{1}{2}(p^2 - 1)\alpha - (p^2 - 1)\beta.$$

(1) F. Severi, Le superficie algebriche con curva canonica d'ordine zero (*Atti del R. Istituto Veneto*, 1908-1909, pp. 249-260).

(2) Les involutions cycliques... (*Loc. cit.*); Recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1935, pp. 338-344; 1938, pp. 255-258). Dans la dernière de ces notes s'est glissée une erreur : la seconde formule de la page 257 doit se lire

$$I = p\delta + (p + 1) + \cdots;$$

le second terme du second membre de la dernière formule de la page 258,

$$-\frac{1}{2}(p^2 - 1).$$

Actuellement, on a $\pi_a = 1$ ; donc

$$12(p_a+1) = 24p - \frac{1}{2}(p^2-1)(\alpha+2\beta).$$

Nous avons supposé $p_a > 1$ ; donc on a

$$24p - \frac{1}{2}(p^2-1)(\alpha+2\beta) \geq 36,$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{2}(p^2-1)(\alpha+2\beta) \leq 12(2p-3). \tag{1}$$

D'autre part, la relation de Noether :

$$p^{(1)} \geq 2p_a - 3$$

donne actuellement, en tenant compte de la valeur trouvée plus haut pour $p^{(1)}$,

$$(p^2+6p-7)\alpha + 2(p^2-1)\beta \geq 12(5p-6). \tag{2}$$

Les inégalités (1) et (2) vont nous permettre de déterminer les cas à priori possibles.

**7**. Supposons tout d'abord $p = 5$. Nous avons

$$\alpha + 2\beta \leq 7, \quad \alpha + \beta \geq 5.$$

Les cas suivants sont possibles :

$$\begin{aligned}
\alpha &= 7, & \beta &= 0, & p_a &= 2, & p^{(1)} &= 10;\\
\alpha &= 6, & \beta &= 0, & p_a &= 3, & p^{(1)} &= 8;\\
\alpha &= 5, & \beta &= 0, & p_a &= 4, & p^{(1)} &= 6;\\
\alpha &= 5, & \beta &= 1, & p_a &= 2, & p^{(1)} &= 6;\\
\alpha &= 4, & \beta &= 1, & p_a &= 3, & p^{(1)} &= 4;\\
\alpha &= 3, & \beta &= 2, & p_a &= 2, & p^{(1)} &= 2.
\end{aligned}$$

Nous avons montré, dans les notes citées au début, l'existence des troisième et cinquième cas.

**8**. Supposons maintenant $p = 7$; il vient

$$\alpha + 2\beta \leq 5, \quad 7\alpha + 8\beta \geq 29.$$

Deux cas peuvent se présenter :

$$\alpha = 5, \quad \beta = 0, \quad p_a = 3, \quad p^{(1)} = 9;$$
$$\alpha = 3, \quad \beta = 1, \quad p_a = 3, \quad p^{(1)} = 3.$$

**9**. Supposons enfin $p = 13$. Nous avons vu que dans ce cas on a $\alpha = 3$. Les inégalités (1) et (2) deviennent

$$\alpha + 2\beta \leq 3, \quad 20\alpha + 28\beta \geq 59;$$

d'où $\beta = 0$. On a donc

$$\alpha = 3, \quad \beta = 0, \quad p_a = 4, \quad p^{(1)} = 6.$$

Liége, le 20 septembre 1938.