Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences).
Séance du 6 novembre 1943, n^{os} 10-11.

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur les surfaces de Kummer généralisées,

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Dans une note récente (1), nous avons montré que toute surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$), image d'une involution du second ordre appartenant à une surface de genres un, est également image d'involutions du second ordre appartenant à d'autres surfaces de genres un. Le procédé peut aussi s'appliquer aux surfaces de Kummer généralisées, c'est-à-dire aux surfaces de genres un ($p_a = P_4 = 1$) représentant des involutions du second ordre appartenant à une surface hyperelliptique de Picard ($p_a = -1$, $p_g = P_4 = 1$) (2). C'est ce que nous montrons dans ce nouveau travail.

D'une manière précise, nous établissons qu'*une surface de Kummer généralisée peut être considérée d'une infinité de manières comme surface de Kummer généralisée.*

En même temps, nous montrons comment on peut construire, sur une surface de Kummer généralisée, des transformations birationnelles non périodiques de cette surface en elle-même.

(1) *Sur une propriété des surfaces de genres un et de rang deux* (BULLETIN DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1943, p. 622).

(2) On trouvera la théorie des surfaces de Kummer généralisées et les propriétés dont nous faisons usage ici dans le *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques* de MM. F. ENRIQUES et F. SEVERI (ACTA MATHEMATICA, 1909, t. 32, pp. 283-392 ; t. 33, pp. 321-403). Voir les paragraphes 46 à 53, pp. 341 à 354 de la première partie (t. 32).

1. Soit F_0 une surface de Picard de diviseur δ ($p_a = -1$, $p_g = P_4 = 1$), c'est-à-dire une surface représentant une involution d'ordre δ, privée de points unis, appartenant à une surface de Jacobi ($p_a = -1$, $p_g = P_4 = 1$), représentant les couples de points non ordonnés d'une courbe de genre deux. Cette surface contient un système continu Σ, ∞^2, de systèmes linéaires $|C_0|$ de degré 2δ, de genre $\delta + 1$ et de dimension $\delta - 1$.

Considérons une transformation birationnelle T, de seconde espèce (involutive), de F_0 en elle-même et soit F la surface de Kummer généralisée représentant l'involution I_2 engendrée par T. La surface F appartient à un espace linéaire $S_{2\delta+1}$, à $2\delta + 1$ dimensions ; elle est d'ordre 4δ et ses sections hyperplanes C ont le genre $2\delta + 1$. On sait que cette surface est de genres un ($p_a = P_4 = 1$) et possède seize points doubles coniques, points de diramation homologues des seize points unis de I_2.

La surface F contient un système linéaire $|C_1|$ de courbes d'ordre 4δ, de degré $4\delta - 6$, de genre et de dimension $2\delta - 3$, passant par les seize points doubles.

Chacun des seize points doubles de F équivaut, au point de vue des transformations birationnelles, à une courbe rationnelle de degré -2. Désignons par γ_1, $\gamma_2, \ldots, \gamma_{16}$ ces seize courbes. Les courbes C_1 les rencontrent chacune en un point.

Il existe une hyperquadrique circonscrite à la surface F le long de chaque courbe C_1 et on a par conséquent

$$2C \equiv 2C_1 + \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_{16}.$$

L'existence des seize points doubles et d'une courbe C_1 est caractéristique de la surface de Kummer généralisée.

2. Il est toujours possible de trouver seize nombres entiers positifs ou nuls $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{16}$ tels que l'on ait

$$2\delta - 1 = \nu_1^2 + \nu_2^2 + \ldots + \nu_{16}^2,$$

car, d'après le théorème de Bachet, tout nombre entier est la somme de quatre carrés au plus et à fortiori, la somme de seize carrés au plus.

Considérons alors le système linéaire

$$|\Gamma| = |\, C - \nu_1\gamma_1 - \nu_2\gamma_2 - \ldots - \nu_{16}\gamma_{16} \,|.$$

Ce système se construit de la manière suivante : Supposons pour fixer les idées $\nu_1 > 0$. Projetons la surface F du point double correspondant à γ_1 sur un hyperplan ; nous obtenons une surface F_1 d'ordre $4\delta - 2$, de $S_{2\delta}$, sur laquelle γ_1 est une conique. Si $\nu_1 > 1$, projetons F_1 du plan de la conique γ_1 sur un espace $S_{2\delta-3}$; nous obtenons une surface F_2, d'ordre $4\delta - 8$, sur laquelle la courbe γ_1 est une quartique rationnelle normale. Si $\nu_1 > 2$, projetons F_2 de l'espace S_3 de la quartique γ_1 sur un espace $S_{2\delta-7}$; nous obtenons une surface F_3 d'ordre $4\delta - 18$, sur laquelle γ_1 est une sextique rationnelle normale. Et ainsi de suite. Opérons de même en partant des autres points doubles, qui donnent naissance à des points doubles coniques de $F_1, F_2, F_3, \ldots$ On obtiendra finalement une surface réduite à un plan double, dont les droites doubles sont les courbes Γ.

Le système $|\Gamma|$ est un réseau et ne peut être composé au moyen d'un faisceau, car celui-ci serait formé de courbes elliptiques et de degré zéro. Le réseau $|\Gamma|$ est de genre deux et de degré deux. En rapportant projectivement les courbes Γ aux droites d'un plan σ, on obtient un plan double F* birationnellement identique à F. Il en résulte que F contient une transformation birationnelle τ en soi, génératrice d'une involution rationnelle.

Le plan double F* possède une courbe de diramation Δ, du sixième ordre.

3. Les courbes C rencontrent les courbes Γ en 4δ points. A une courbe C, τ fait correspondre une courbe C′ et à la courbe $C + C'$ correspond dans le plan σ une courbe C* d'ordre 4δ, de genre $2\delta + 1$, touchant la courbe Δ en chaque point d'intersection, c'est-à-dire en 12δ points. Les courbes C* forment un système continu, $\infty^{2\delta+1}$ et possèdent $8\delta(\delta - 1)$ points doubles variables.

A la courbe γ_1, τ fait correspondre une courbe rationnelle γ_1', de degré -2. La courbe γ_1 est rencontrée en $2\nu_1$ points par les courbes Γ.

Si la courbe γ_1' coïncidait avec la courbe γ_1, c'est-à-dire si cette courbe était transformée en elle-même par τ, cette transformation engendrerait sur γ_1 une involution ayant deux points doubles. D'autre part, à γ_1 correspondrait dans σ une courbe (double) d'ordre ν_1, rencontrant Δ en deux points, ce qui est absurde. Donc γ_1' ne peut coïncider avec γ_1.

A la courbe $\gamma_1 + \gamma_1'$ correspond dans le plan σ une courbe γ_1^* d'ordre $2\nu_1$, rationnelle, touchant la courbe Δ en $6\nu_1$ points et possédant $(2\nu_1 - 1)(\nu_1 - 1)$ points doubles. Il en résulte que les courbes γ_1, γ_1' se rencontrent en $4\nu_1^2 + 2$ points. Par suite, la courbe γ_1' ne peut coïncider avec l'une des courbes $\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_{16}$, qui ne rencontrent pas γ_1.

Si l'un des nombres $\nu_2, \nu_3, \ldots, \nu_{16}$ est nul, il correspond à la courbe γ homologue, un point double ordinaire de la courbe de diramation Δ.

Aux courbes γ pour lesquelles les nombres ν ne sont pas nuls correspondent dans σ des courbes γ^* d'ordre 2ν, possédant $(2\nu - 1)(\nu - 1)$ points doubles et touchant Δ en 6ν points.

On voit donc qu'une surface de Kummer généralisée est birationnellement équivalente à un plan double possédant une sextique Δ de diramation. Il existe $\infty^{2\delta+1}$ courbes d'ordre 4δ, ayant $8\delta(\delta - 1)$ points doubles, touchant Δ en 12δ points ; k courbes γ_1^*, γ_2^*, ..., γ_k^* d'ordre $2\nu_1$, $2\nu_2$, ..., $2\nu_k$, ayant $(2\nu_1 - 1)(\nu_1 - 1)$, $(2\nu_2 - 1)(\nu_2 - 1)$, ..., $(2\nu_k - 1)(\nu_{k-1})$ points doubles, touchant respectivement Δ en $6\nu_1$, $6\nu_2$, ..., $6\nu_k$ points ; enfin Δ possède $16 - k$ points doubles ordinaires.

4. Les courbes C_1 rencontrent les courbes Γ en $4\delta - \nu$ points, où l'on a posé

$$\nu = \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_{16}.$$

A une courbe C_1, τ fait correspondre une courbe C_1' satisfaisant à la relation fonctionnelle

$$2C' \equiv 2C_1' + \gamma_1' + \gamma_2' + \dots + \gamma_{16}', \tag{1}$$

certainement distincte de C_1. A la courbe $C_1 + C_1'$ correspond dans le plan σ une courbe C_1^* d'ordre $4\delta - \nu$, touchant Δ en $3(4\delta - \nu)$ points, de genre $2\delta - 3$. Cette courbe C_1^* possède donc $8\delta^2 + 4\delta(\nu - 2) + \frac{1}{2}\nu(\nu + 3) + 2$ points doubles variables.

Le système $|C'|$ a le degré 4δ, le genre et la dimension $2\delta + 1$; il est simple comme le système $|C|$. En rapportant projectivement les courbes C' aux hyperplans d'un espace $S_{2\delta+1}$, on obtient comme transformée de F une surface F' d'ordre 4δ.

Les courbes C ne rencontrent pas les courbes γ_1, γ_2, ..., γ_{16}, donc les courbes C' ne rencontrent pas les courbes γ_1', γ_2', ..., γ_{16}' et de plus, ces dernières courbes ne se rencontrent pas deux à deux. Il en résulte qu'aux courbes γ_1', γ_2', ..., γ_{16}' correspondent sur F' des points doubles coniques isolés.

Les courbes C_1' rencontrent les courbes C' en 4δ points et elles forment un système linéaire $|C_1'|$ de degré $4\delta - 6$, de genre et de dimension $2\delta - 3$. Il leur correspond donc sur F' des courbes d'ordre 4δ, passant par les points doubles de la surface. De plus, en vertu de la relation (1), il existe une hyperquadrique circonscrite à la surface F′ le long de chaque courbe C'_1. Il en résulte que F′ est une surface de Kummer généralisée.

D'une manière plus précise, il existe une surface de Picard F'_0, distincte de F_0, contenant une involution du second ordre, dont F′ (c'est-à-dire F) est l'image.

Il est évident que si l'un des nombres ν, par exemple ν_i, est nul, la courbe γ'_i doit être remplacée par γ_i, qui donne un point double conique sur F′.

De ce qui précède, on conclut qu'une surface de Kummer généralisée peut encore être considérée comme une surface de Kummer généralisée d'autant de manières que le nombre $2\delta - 1$ peut être décomposé en une somme de seize carrés au plus.

5. Les courbes C* ayant $8\delta(\delta - 1)$ points doubles et touchant Δ en 12δ points, une courbe C et une courbe C′ ont en commun un $4\delta(4\delta - 1)$ points.

Une courbe C ne rencontrant pas la courbe γ_i et une courbe C* coupant la courbe γ^*_i en $8\delta\nu_i$ points, les courbes C rencontrent la courbe γ'_i en $8\delta\nu_i$ points. De même, les courbes C′ ne rencontrent pas la courbe γ'_i, mais rencontrent la courbe γ_i en $8\delta\nu_i$ points.

Nous avons vu que la courbe γ_i rencontre la courbe γ'_i en $4\nu_i^2 + 2$ points.

Les courbes γ_i, γ_k ne se rencontrent pas ; il en est de même des courbes γ'_i, γ_k. Les courbes γ^*_i, γ^*_k ont en commun $4\nu_i\nu_k$ points, donc les courbes γ_i, γ'_k d'une part, les courbes γ'_i, γ_k d'autre part, se rencontrent en $4\nu_i\nu_k$ points.

Observons que l'on a

$$|\Gamma| = |C' - \nu_1\gamma'_1 - \nu_2\gamma'_2 - \dots - \nu_{16}\gamma'_{16}|.$$

6. Nous allons appliquer ce qui précède à la surface de Kummer ordinaire ($\delta = 1$). Celle-ci, que nous désignerons encore par F, est du quatrième ordre, appartient à l'espace ordinaire ; elle possède seize points doubles coniques et il existe seize plans la touchant suivant des coniques. Chacun de ces plans passe par six des points doubles.

Pour désigner les points doubles et les coniques de contact, nous utiliserons la notation de G. Humbert. Soient α, β, γ, δ et α', β', γ', δ' deux permutations des quatre premiers nombres. Un point double, ou plutôt la courbe rationnelle de degré — 2 à laquelle il est équivalent, sera désigné par $\gamma_{\alpha\alpha'}$ et une conique, qui est également une courbe rationnelle de degré — 2, par $\epsilon_{\alpha\alpha'}$. La courbe $\gamma_{\alpha\alpha'}$ rencontre en un point chacune des coniques $\epsilon_{\alpha\beta'}$, $\epsilon_{\alpha\gamma'}$, $\epsilon_{\alpha\delta'}$, $\epsilon_{\delta\alpha'}$, $\epsilon_{\gamma\alpha'}$, $\epsilon_{\delta\alpha'}$, et ne rencontre pas les autres. Les plans de ces coniques passent donc par le point double correspondant à $\gamma_{\alpha\alpha'}$.

Ceci rappelé, et $|\,C\,|$ désignant le système des sections planes de F, considérons le système

$$|\Gamma| = |\,C - \gamma_{11}\,|\,.$$

Le système $|\Gamma|$ est un réseau de genre et de degré deux, définissant la transformation birationnelle τ de F en soi dans laquelle deux points homologues sont alignés sur le point double γ_{11}.

La courbe

$$\gamma'_{11} \equiv 2\Gamma - \gamma_{11} \equiv 2C - 3\gamma_{11}$$

que τ fait correspondre à γ_{11} est découpée sur F par le cône tangent à cette surface en γ_{11}.

Au système $|\,C\,|$, τ fait correspondre le système

$$|\,C'\,| = |\,3C - 4\gamma_{11}\,|\,.$$

Les courbes γ_{12}, γ_{21}, ..., γ_{44} sont transformées en elles-mêmes par τ, de même que les coniques ϵ_{12}, ϵ_{13}, ϵ_{14}, ϵ_{21}, ϵ_{31}, ϵ_{41}.

La conique ϵ_{22} par exemple, qui ne passe pas par le point double γ_{11}, donne lieu à

$$2\epsilon_{22} \equiv C - \gamma_{21} - \gamma_{23} - \gamma_{24} - \gamma_{12} - \gamma_{32} - \gamma_{42}.$$

τ lui fait correspondre une courbe rationnelle ϵ'_{22}, de degré -2, donnée par

$$2\epsilon'_{22} \equiv 3C - 4\gamma_{11} - \gamma_{21} - \gamma_{23} - \dots - \gamma_{42}.$$

ϵ'_{22} rencontre les courbes C' en deux points et ne rencontre pas la courbe γ'_{11}.

On obtient des résultats analogues pour les coniques ϵ ne passant pas par γ_{11}.

Rapportons projectivement les courbes C' aux plans de l'espace. La surface F se transforme birationnellement en une surface F' du quatrième ordre possédant seize points doubles coniques

$$\gamma'_{11},\ \gamma_{12},\ \gamma_{21},\ \dots\ \gamma_{44}$$

et seize coniques

$$\epsilon_{12},\ \epsilon_{13},\ \epsilon_{14},\ \epsilon_{21},\ \epsilon_{31},\ \epsilon_{41},\ \epsilon'_{22},\ \epsilon'_{23},\ \dots,\ \epsilon'_{44}$$

présentant la même disposition que les points doubles et les coniques d'une surface de Kummer. En d'autres termes, F' est à son tour une surface de Kummer et représente donc une involution du second ordre appartenant à une surface de Jacobi (surface de Picard de diviseur $\delta = 1$).

7. On peut recommencer, sur la surface F', la même opération que sur la surface F. En partant du point double γ'_{11}, on reviendra évidemment à la surface F, puisque τ est involutive. En partant du point double γ_{22} par exemple, on obtiendra

$$\begin{aligned} C'' &\equiv 3C' - 4\gamma_{22} \equiv 9C - 12\gamma_{11} - 4\gamma_{22}, \\ \gamma''_{11} &\equiv \gamma'_{11} \equiv 2C - 3\gamma_{11}, \\ \gamma''_{22} &\equiv 2C' - 3\gamma_{22} \equiv 6C - 8\gamma_{11} - 3\gamma_{22}, \end{aligned}$$

les autres courbes γ_{ik} étant transformées en elles-mêmes.

En rapportant projectivement les courbes C'' aux plans de l'espace, on obtiendra une nouvelle surface de

Kummer F″, birationnellement identique à F′ et par suite à F.

Revenons à la surface F et soit τ' la transformation de cette surface en soi déterminée par le réseau

$$|\Gamma_1| = |C - \gamma_{22}|.$$

La transformation $\tau\tau'$ fait évidemment passer de F à F″, c'est-à-dire de $|C|$ à $|C''|$.

Observons que les relations donnant ϵ_{22} et ϵ'_{22} conduisent, par soustraction, à

$$2\epsilon'_{22} \equiv 2C - 4\gamma_{11} + 2\epsilon_{22}.$$

La division sur une surface de genres un étant univoque (Severi), on en déduit

$$\epsilon'_{22} \equiv C - 2\gamma_{11} + \epsilon_{22}.$$

Les coniques ϵ_{12}, ϵ_{21} sont transformées en elles-mêmes par $\tau\tau'$. Aux coniques ϵ_{13}, ϵ_{12}, ϵ_{31}, ϵ_{41}, cette transformation fait correspondre les courbes

$$\epsilon''_{13} \equiv 3C - 4\gamma_{11} - 2\gamma_{22} + \epsilon_{12}, \ldots,$$

qui sont des coniques sur F″.

Aux coniques ϵ_{23}, ϵ_{24}, ϵ_{32}, ϵ_{42}, la transformation $\tau\tau'$ fait correspondre les courbes

$$\epsilon''_{23} = C - 2\gamma_{11} + \epsilon_{23}, \ldots,$$

qui sont également des coniques sur la surface F″.

Enfin, aux coniques ϵ_{22}, ..., $\tau\tau'$ fait correspondre les courbes

$$\epsilon''_{22} \equiv 4C - 6\gamma_{11} - 2\gamma_{22} + \epsilon_{22}, \ldots;$$

ce sont encore des coniques sur la surface F″.

La transformation $\tau\tau'$ n'est pas périodique, donc la surface F peut être transformée birationnellement, d'une infinité de manières, en des surfaces de Kummer, tous les points doubles et toutes les coniques n'étant pas homologues sur deux surfaces.

8. Revenons aux surfaces de Kummer généralisées et à la transformation τ définie au moyen du réseau $|\Gamma|$ (n° 2). Nous avons observé qu'à la courbe $\gamma_1 + \gamma_1'$ correspond, dans le plan double F*, une courbe γ^* d'ordre $2\nu_1$; on a donc

$$\gamma_1 + \gamma_1' \equiv 2\nu_1\Gamma$$

et des relations analogues pour les autres courbes γ, γ'. De ces solutions et de celles qui ont été établies plus haut, on déduit

$$\begin{aligned}
C' &\equiv (4\delta - 1)C - 4\delta\nu_1\gamma_1 - 4\delta\nu_2\gamma_2 - \ldots - 4\delta\nu_{16}\gamma_{16},\\
\gamma_1' &\equiv 2\nu_1 C - (2\nu_1^2 + 1)\gamma_1 - 2\nu_1\nu_2\gamma_2 - \ldots - 2\nu_1\nu_{16}\gamma_{16},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\gamma_{16}' &\equiv 2\nu_{16}C - 2\nu_1\nu_{16}\gamma_1 - 2\nu_2\nu_{16}\gamma_2 - \ldots - (2\nu_{16}^2 + 1)\gamma_{16},\\
C_1' &\equiv (4\delta - \nu)(C - \nu_1\gamma_1 - \nu_2\gamma_2 - \ldots - \nu_{16}\gamma_{16}) - C_1.
\end{aligned}$$

Pour établir cette dernière relation, on utilisera l'univocité de la division sur une surface de genres un (Severi). On remarquera également que si $\nu_i = 0$, on a $\gamma_i' \equiv \gamma_i$.

Supposons maintenant que nous ayons une autre décomposition de $2\delta - 1$ en une somme de seize carrés, soit

$$2\delta - 1 = \mu_1^2 + \mu_2^2 + \ldots + \mu_{16}^2.$$

On en déduit l'existence d'une transformation birationnelle involutive τ' de F en elle-même, en considérant le réseau

$$|\Gamma'| = |C' - \mu_1\gamma_1' - \mu_2\gamma_2' - \ldots - \mu_{16}\gamma_{16}'|.$$

Aux courbes C', γ_i', C_1', τ' fait correspondre les courbes

$$\begin{aligned}
C'' &\equiv (4\delta - 1)C' - 4\delta(\mu_1\gamma_1 + \mu_2\gamma_2' + \ldots + \mu_{16}\gamma_{16}'),\\
\gamma_i'' &\equiv 2\mu_i C' - 2\mu_i(\mu_1\gamma_1' + \mu_2\gamma_2' + \ldots + \mu_{16}\gamma_{16}') - \gamma_i',\\
C_1'' &\equiv (4\delta - \mu)(C' - \mu_1\gamma_1' - \mu_2\gamma_2' - \ldots - \mu_{16}\gamma_{16}') - C_1',
\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_{16}.$$

Si $\mu_i = 0$, on a $\gamma''_i \equiv \gamma'_i$.

La transformation $\tau\tau'$ fait donc correspondre aux courbes C les courbes

$$\begin{aligned} C'' \equiv & [(4\delta - 1)^2 - 8\delta k]C \\ & - 4\delta[4\delta - 1 - 2k]\,(\nu_1\gamma_1 + \nu_2\gamma_2 + \dots + \nu_{16}\gamma_{16}) \\ & \qquad + 4\delta(\mu_1\gamma_1 + \mu_2\gamma_2 + \dots + \mu_{16}\gamma_{16}), \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$k = \mu_1\nu_1 + \mu_2\nu_2 + \dots + \mu_{16}\nu_{16}.$$

En rapportant projectivement les courbes C'' aux hyperplans d'un espace $S_{2\delta-1}$, on obtiendra une nouvelle surface de Kummer généralisée, sur laquelle les points doubles correspondront aux courbes $\gamma''_1, \gamma''_2, \dots, \gamma''_{16}$.

9. L'expression de C'' en fonction de $C, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{16}$ montre que si les nombres μ diffèrent des nombres ν, la transformation $\tau\tau'$ sera en général non périodique. D'ailleurs, si $\mu_i = \nu_i (i = 1, 2, \dots, 16)$, on a $k = 2\delta - 1$ et $C'' \equiv C$.

D'après le théorème de Bachet, $2\delta - 1$ est égal à la somme de quatre carrés au plus. Posons donc

$$2\delta - 1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2,$$

x_1, x_2, x_3, x_4 étant des entiers positifs ou nuls. Nous prendrons

$$\nu_1 = x_1, \nu_2 = x_2, \nu_3 = x_3, \nu_4 = x_4, \nu_5 = \nu_6 = \dots = \nu_{16} = 0,$$
$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 0, \quad \mu_5 = x_1, \quad \mu_6 = x_2,$$
$$\mu_7 = x_3, \quad \mu_8 = x_4, \quad \mu_9 = \dots = \mu_{16} = 0.$$

Nous avons alors $k = 0$ et la transformation $\tau\tau'$ correspondante donne

$$C'' = (4\delta - 1)^2 C - 4\delta(4\delta - 1)(x_1\gamma_1 + x_2\gamma_2 + x_3\gamma_3 + x_4\gamma_4)$$
$$+ 4\delta(x_1\gamma_5 + x_2\gamma_6 + x_3\gamma_7 + x_4\gamma_8).$$

La transformation $\tau\tau'$ sera non périodique, la formule précédente n'étant pas symétrique par rapport à γ_1, γ_2, γ_3, γ_4 d'une part et par rapport à γ_5, γ_6, γ_7, γ_8 d'autre part.

Liége, le 11 octobre 1943.