

GÉOMÉTRIE ALGÈBRE

Construction d'une surface algébrique irrégulière,

par LUCIEN GODEAUX,  
Membre de l'Académie.

En dehors des surfaces algébriques contenant un faisceau irrationnel de courbes, des surfaces représentant les couples de points d'une courbe et des surfaces de Picard, on connaît peu d'exemples de surfaces algébriques irrégulières. Il n'est donc pas sans intérêt de faire connaître un tel exemple.

Dans leur *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques* (1) MM. F. Enriques et F. Severi ont remarqué qu'entre une surface de Jacobi et une surface de Picard de diviseur  $\delta$ , qui représente une involution d'ordre  $\delta$  appartenant à la première surface, existait une correspondance  $(1, \delta)$ ; ils déduisaient cette propriété de la représentation des surfaces en question par des fonctions quadruplement périodiques. En nous appuyant sur nos recherches sur les involutions cycliques n'ayant qu'un nombre fini de points unis (2), nous avons pu démontrer géométriquement ce théorème dans le cas  $\delta = 2$  (3).

---

(1) *Acta Mathematica*, 1903, t. XXXII, pp. 283-392; t. XXXIII, pp. 321-403 (Voir n. 12).

(2) Voir notre exposé sur *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Paris, Hermann, 1935) et notre *Mémoire sur les surfaces algébriques doubles ayant un nombre fini de points de diramation* (ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE, 1914, pp. 289-312).

(3) *Sur les surfaces de Picard de diviseur deux* (BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1927, pp. 394-414).

Le procédé que nous avons employé nous a permis d'établir ensuite que si une surface irrégulière contient une involution régulière d'ordre deux, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, elle est l'image d'une involution d'ordre deux, privée de points unis, appartenant à une surface algébrique de même irrégularité <sup>(1)</sup>, propriété que nous avons pu étendre récemment au cas où l'involution est d'ordre premier quelconque <sup>(2)</sup>. Nous utilisons le théorème précédent en partant de la surface qui représente les couples de points d'une courbe de genre trois. On sait que cette surface contient une involution d'ordre deux possédant 28 points unis. Cette involution est régulière <sup>(3)</sup> et d'autre part, la surface a l'irrégularité trois <sup>(4)</sup>. Cela nous permet de construire une surface présentant les caractères

$$p_a = 1, \quad p_g = 4, \quad p^{(1)} = 13, \quad P_2 = 14, \quad P_3 = 38, \quad \dots$$

1. Soit  $\gamma$  une courbe de genre trois, à modules généraux. On peut supposer sans restriction que  $\gamma$  est une

<sup>(1)</sup> Sur une propriété des surfaces algébriques irrégulières contenant une involution régulière d'ordre deux (BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1927, pp. 524-543). Voir aussi Sur les involutions régulières d'ordre deux appartenant à une surface irrégulière (IDEM, 1924, pp. 434-446; 1925, pp. 37-47, 157-166); Sur les involutions régulières d'ordre deux appartenant à une surface irrégulière (PROCEEDINGS OF THE INTERN. MATHEM. CONGRESS, Toronto, 1934, t. I, pp. 733-737).

<sup>(2)</sup> Voir une note en cours d'impression dans le *Bulletin des Sciences Mathématiques*.

<sup>(3)</sup> La surface image de cette involution a été étudiée par G. HUMBERT, Sur une surface du sixième ordre liée aux fonctions abéliennes de genre trois (JOURNAL DE LIOUVILLE, 1896, pp. 263-293; Œuvres, tome II, pp. 269-296) et M. L. REMY, Sur certaines surfaces algébriques liées aux fonctions abéliennes de genre trois (JOURNAL DE LIOUVILLE, 1908, pp. 1-37); Sur une classe de surfaces algébriques liées aux fonctions abéliennes de genre trois (ANNALES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, 1909, pp. 193-258).

<sup>(4)</sup> Au sujet des surfaces qui représentent les couples de points d'une courbe algébrique, voir M. DE FRANCHIS, Sulle varietà  $\infty^2$  delle coppie di punti di due curve o di una curva algebrica (Rend. Circolo Matematico di Palermo, 1903, pp. 104-121); SEVERI, Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e sopra certe classi di superficie (MEM. R. ACCAD. DI TORINO, 1903, pp. 1-49) et Sulle superficie che rappresentano le coppie di punti di una curva algebrica (ATH. R. ACCAD. DI TORINO, 1902, pp. 185-200).

courbe plane du quatrième ordre ; la série canonique de la courbe  $\gamma$  est alors découpée par les droites du plan.

Désignons par  $F$  la surface qui représente les couples de points non ordonnés de la courbe  $\gamma$ . On sait que la surface  $F$  présente les caractères

$$p_g = 3, \quad p_a = 0, \quad p^{(1)} = 7, \quad P_2 = 7, \quad P_3 = 19, \quad \dots$$

Les courbes canoniques  $C_0$  de  $F$  correspondent aux séries linéaires  $g_4^1$  canoniques de la courbe  $\gamma$ , c'est-à-dire aux séries découpées sur  $\gamma$  par les faisceaux de droites de son plan. Aux couples de points de  $\gamma$  contenant un point fixe correspondent sur  $F$  les points d'une courbe  $K$ , de genre trois, variable dans un système continu  $\{K\}$ ,  $\infty^1$ , d'indice deux. L'enveloppe  $K_0$  de ce système représente les couples de points confondus de la courbe  $\gamma$ .

Aux séries linéaires  $g_4^1$  non spéciales de  $\gamma$  correspondent sur  $F$  les courbes paracanoniques, appartenant au système continu complet  $\{C\}$  comprenant le système canonique  $|C_0|$ .

Soient  $P_1$  un point de  $F$ ,  $P_{11}P_{12}$  le couple de points de  $\gamma$  qu'il représente. La droite  $P_{11}P_{12}$  coupe encore  $\gamma$  en deux points  $P_{21}, P_{22}$ . Le point  $P_2$  de  $F$  qui représente le couple  $P_{21}P_{22}$  est complètement déterminé par  $P_1$ . Les couples  $P_1P_2$  forment sur  $F$  une involution  $I_2$ , d'ordre deux. Cette involution possède 28 points unis, qui correspondent aux 28 bitangentes de la courbe  $\gamma$ .

Le système bicanonique  $|2C_0|$  de  $F$  appartient à l'involution  $I_2$ .

On peut prendre, pour modèle projectif de la surface  $\Phi$ , image de l'involution  $I_2$ , la surface du douzième ordre, de l'espace  $S_6$ , intersection d'un cône  $V_3^4$  projetant d'un point  $O$  une surface de Veronese et d'une hypersurface cubique  $V_5^3$  ne passant pas par  $O$ . Aux 28 points unis de  $I_2$  correspondent 28 points doubles coniques de  $\Phi$ , de sorte que  $V_5^3$  doit toucher le cône  $V_3^4$  en 28 points.

La surface  $\Phi$  présente les caractères

$$p_0 = p_a = 3, \quad p^{(1)} = 4, \quad P_2 = 7, \quad P_3 = 13, \quad \dots$$

Les courbes  $\Gamma_0$ , du sixième ordre, découpées sur  $\Phi$  par les cônes projetant de O les coniques de la surface de Veronese, sont les courbes canoniques de  $\Phi$ ; elles correspondent aux courbes  $C_0$ . Les courbes bicanoniques de  $\Phi$  sont les sections hyperplanes de cette surface.

2. La quartique  $\gamma$  est l'enveloppe de 63 systèmes  $\infty^1$  d'indice deux de coniques. Soient  $\{\epsilon\}$  un de ces systèmes et  $\epsilon_0$  une de ses coniques. Les coniques qui passent par les points de contact de  $\epsilon_0$  avec  $\gamma$  coupent encore  $\gamma$  en des groupes de quatre points qui sont les points de contact d'une conique du système  $\{\epsilon\}$ . Il en est ainsi en particulier lorsque la conique menée par les points de contact de  $\epsilon_0$  avec  $\gamma$  dégénère en deux droites.

La série non spéciale  $g_4^1$  des points de contact des coniques de  $\{\epsilon\}$  avec  $\gamma$  est représentée sur F par une courbe paracanonique que nous désignerons par  $C_1$ . De la propriété qui vient d'être indiquée, on conclut que la courbe  $C_1$  est transformée en elle-même par la transformation birationnelle T de F en elle-même, génératrice de l'involution  $I_2$ .

Le système  $\{\epsilon\}$  contient six coniques dégénérées en des couples de bitangentes, par conséquent la courbe  $C_1$  passe par 12 points unis de  $I_2$ .

Les autres systèmes de coniques inscrites dans  $\gamma$  donnent 62 autres courbes  $C_2, C_3, \dots, C_{63}$  de  $\{C\}$  transformées en elles-mêmes par T et passant chacune par 12 points unis de  $I_2$ .

Le système continu complet  $\{C\}$  contient donc 64 systèmes linéaires appartenant à l'involution  $I_2$ . Le système canonique  $|C_0|$  et les 63 systèmes  $\infty^0 |C_1|, |C_2|, \dots, |C_{63}|$ . On sait qu'il ne peut en contenir d'autres.

Considérons une courbe quelconque  $C$  de  $\{C\}$  et soient  $C'$  la courbe que  $T$  lui fait correspondre et  $\Gamma^*$  la courbe qui correspond sur  $\Phi$  à l'ensemble  $C + C'$ . Lorsque  $C$  décrit  $\{C\}$ ,  $C'$  décrit un système continu. En particulier, si  $C$  vient coïncider avec une courbe  $C_0$ ,  $C'$  vient coïncider avec la même courbe et par conséquent les courbes  $C'$  appartiennent à  $\{C\}$ . Les courbes  $C, C'$  se rencontrent en six points formant trois couples de  $I_2$ , par suite la courbe  $\Gamma^*$  possède trois points doubles. La courbe  $\Gamma^*$  est, comme  $C$ , de genre effectif 7, par conséquent, elle est de genre virtuel dix.

Lorsque la courbe  $C$  coïncide avec une courbe  $C_0$ ,  $\Gamma^*$  coïncide avec une courbe bicanonique  $2\Gamma_0$  comptée deux fois. Comme la surface  $\Phi$  est régulière, lorsque  $C$  décrit  $\{C\}$ ,  $\Gamma^*$  décrit un système continu sur  $\Phi$  et ce système appartient à un système linéaire qui est, ici, le système bicanonique  $|2\Gamma_0|$ .

Appelons  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_{64}$  les courbes qui correspondent sur  $\Phi$  aux courbes  $C_1, C_2, \dots, C_{63}$  de  $F$ .

Lorsque la courbe  $C$  vient à coïncider avec la courbe  $C_1$ ,  $C'$  coïncide également avec  $C_1$  et la courbe  $\Gamma^*$  avec la courbe  $\Gamma_1$  comptée deux fois, augmentée des courbes rationnelles de degré  $-2$ , infiniment petites, équivalentes aux domaines des 12 points de diramation de  $\Phi$  appartenant à  $\Gamma_1$ . La courbe  $\Gamma_1$  est d'autre part d'ordre six et il en résulte qu'il existe un hyperplan de  $S_6$  touchant la surface  $\Phi$  le long de la courbe  $\Gamma_1$  et passant sur 12 des 28 points doubles de  $\Phi$ . On arrive à des conclusions analogues pour les courbes  $\Gamma_2, \Gamma_3, \dots, \Gamma_{63}$ .

De ce qui précède, on conclut également que les courbes  $2C_1, 2C_2, \dots, 2C_{63}$  appartiennent au système bicanonique  $|2C_0|$  de  $F$ .

**3.** Considérons le système continu complet  $\{D\} = \{2C\}$  qui comprend le système bicanonique  $|D_0| = |2C_0|$ , appartenant à l'involution  $I_2$ . Le système  $\{D\}$  contient

en outre 63 systèmes linéaires transformés en eux-mêmes par  $T$ ; nous les désignerons par  $|D_1|$ ,  $|D_2|$ , ...,  $|D_{63}|$ .

Nous venons de voir que le système bicanonique  $|D_0|$  comprend les courbes  $2C_1, 2C_2, \dots, 2C_{63}$ , donc on peut écrire

$$\begin{aligned} |D_1| &= |C_0 + C_1|, & |D_2| &= |C_0 + C_2|, & \dots, \\ |D_{63}| &= |C_0 + C_{63}|. \end{aligned}$$

Les  $\infty^3$  systèmes linéaires  $|D|$  du système continu  $\{D\}$  ont mêmes caractères que le système  $|D_0|$ , c'est-à-dire le degré 24, le genre 19 et la dimension 6.

Supposons que le système  $|D_1|$  par exemple, puisse appartenir à l'involution  $I_2$ . Au système  $|D_1|$  correspond alors sur  $\Phi$  un système linéaire  $|A_1|$ , de degré 6, de genre 7 et de dimension 6, ce qui est impossible, car la surface  $\Phi$  serait alors rationnelle. Il en résulte que  $|D_1|$  contient deux systèmes linéaires partiels  $|D_{11}|$ ,  $|D_{12}|$ , appartenant à l'involution  $I_2$ . L'un de ces systèmes, par exemple  $|D_{11}|$ , a pour points-base les 12 points unis de  $I_2$  appartenant à  $C_1$ ; l'autre a pour points-base les 16 points unis restants de  $I_2$ .

Au système  $|D_{11}|$  correspond sur  $\Phi$  un système linéaire complet  $|A_{11}|$  de degré 6, de genre 7, dont la dimension, d'après le théorème de Riemann-Roch, est au moins égale à 3. Au système  $|D_{12}|$  correspond sur  $\Phi$  un système  $|A_{12}|$  de degré 4, de genre 6, dont la dimension est au moins égale à 2. D'autre part,  $T$  opérant sur les courbes de  $|D_1|$  comme une homographie, la somme des dimensions de  $|A_{11}|$ ,  $|A_{12}|$  doit être égale à cinq. Par suite,  $|A_{11}|$  est de dimension 3 et  $|A_{12}|$  de dimension 2.

Remarquons en passant que si l'on rapporte projectivement les courbes  $A_{11}$  aux plans de l'espace, on obtient comme modèle projectif de  $\Phi$  la surface du sixième ordre considérée par Humbert.

A une courbe  $D$  correspond sur  $\Phi$  une courbe  $\Delta^*$  variable dans un système continu appartenant à un système linéaire. En faisant coïncider  $D$  avec une courbe  $D_0$ , on voit que ce système linéaire est le double du système bicanonique  $|2\Delta_0| = |4\Gamma_0|$  de  $\Phi$ . En faisant ensuite coïncider  $D$  avec une courbe  $D_{11}$  ou avec une courbe  $D_{12}$ , on obtient les relations fonctionnelles

$$2\Delta_0 \equiv 2\Delta_{11} + A_1 \equiv 2\Delta_{12} + A'_1, \quad (1)$$

où  $A_1$  est la somme des courbes rationnelles de degré  $-2$  équivalentes aux 12 points doubles de diramation de  $\Phi$  appartenant aux courbes  $\Delta_{11}$  et  $A'_1$  la somme des courbes équivalentes aux points doubles de diramation de  $\Phi$  appartenant aux courbes  $\Delta_{12}$ .

On arrive à des conclusions analogues pour les systèmes  $|D_2|$ ,  $|D_3|$ , ...,  $|D_{63}|$ . Le système  $|D_i|$  contient deux systèmes linéaires partiels  $|D_{i1}|$ ,  $|D_{i2}|$  appartenant à  $I_2$ ; le premier a pour points-base les 12 points unis appartenant à  $C_i$ , l'autre, les autres points unis de  $I_2$ . Les systèmes complets  $|\Delta_{i1}|$ ,  $|\Delta_{i2}|$  qui leur correspondent sur  $\Phi$  donnent

$$2\Delta_0 \equiv 2\Delta_{i1} + A_i \equiv 2\Delta_{i2} + A'_i, \quad (i = 1, 2, \dots, 63).$$

$A_i$  et  $A'_i$  ont des significations analogues à  $A_1$ ,  $A'_1$ .

On a de même

$$\Delta_0 \equiv 2\Gamma_0 \equiv 2\Gamma_1 + A_1 \equiv 2\Gamma_2 + A_2 \equiv \dots \equiv 2\Gamma_{63} + A_{63}. \quad (2)$$

Le système complet  $|2\Delta_0|$  est découpé sur  $\Phi$  par les hyperquadriques de  $S_6$ . L'interprétation projective des relations fonctionnelles (1) montre qu'il existe une hyperquadrique touchant  $\Phi$  le long d'une courbe  $\Delta_{11}$  (ou  $\Delta_{i1}$ ) et une hyperquadrique touchant  $\Phi$  le long d'une courbe  $\Delta_{12}$  (ou  $\Delta_{i2}$ ).

4. Ainsi que nous l'avons démontré dans notre *Mémoire sur les surfaces algébriques doubles...* (loc. cit.) l'existence de 12 points doubles coniques de la surface

$\Phi$  et de la courbe  $\Delta_{11}$  passant par ces points et satisfaisant à la relation (1), suffit pour affirmer qu'il existe une surface  $\Psi_1$  irréductible contenant une involution d'ordre deux  $I_2$  dont  $\Phi$  est l'image, involution possédant 12 points unis correspondant aux 12 points doubles en question.

Aux sections hyperplanes  $\Delta_0$  de  $\Phi$  correspondent sur  $\Psi_1$  des courbes  $H_{01}$  de genre 19, formant un système linéaire de degré 24 et de dimension 6, appartenant à I.

Aux courbes  $\Delta_{11}$  de  $\Phi$  correspondent sur  $\Psi_1$  des courbes  $H_{02}$  de genre 19, formant un système linéaire de degré 24, de dimension 3, appartenant à  $I'_2$ , et ayant pour point-base les 12 points unis de cette involution.

Les courbes  $H_{01}$ ,  $H_{02}$  appartiennent totalement à un même système linéaire  $|H_0|$ , de dimension 10, transformé lui-même par la transformation birationnelle  $T_1$  de  $\Psi_1$  en soi, génératrice de l'involution  $I'_2$ . Nous prendrons comme modèle projectif de la surface  $\Psi_1$  celui que l'on obtient en rapportant projectivement les courbes  $H_0$  aux hyperplans d'un espace  $S_{10}$ .

Les courbes  $H_{01}$  sont les transformées des courbes bicanoniques de  $\Phi$ , donc  $|H_0|$  est le système bicanonique de  $\Psi_1$ . A une courbe  $\Gamma_0$  de  $\Phi$  correspond sur  $\Psi_1$  une courbe  $G'_{01}$  de genre 7 et à la courbe  $\Gamma_1$ , une courbe  $G_{02}$  de genre 7 également, passant par les 12 points unis de  $I_2$ . Les courbes  $2G'_{01}$  et  $G'_{01} + G_{02}$  appartiennent au système  $|H_0|$ , donc les courbes  $G'_{01}$ ,  $G_{02}$  sont équivalentes et appartiennent à un même système linéaire  $|G'_0|$ . Les courbes  $\Gamma_0$  étant les courbes canoniques de  $\Phi$ ,  $|G'_0|$  est le système canonique de  $\Psi_1$ . Ce système a le genre 7, le degré 6 et la dimension 3.

Entre le genre  $p_a$  de  $\Psi_1$ , le genre  $p'_a = 3$  de  $\Phi$  et le nombre des points unis de  $I'_2$ , on a la relation

$$4(p_a + 1) = 8(p'_a + 1) - 12,$$

d'où  $p_a = 4$ . On en conclut que la surface  $\Psi_1$  est régulière et a les caractères



$$p_a = p_g = 4, \quad p^{(1)} = 7, \quad P_g = 11, \quad P_s = 23, \quad \dots$$

Aux 16 points doubles de  $\Phi$  appartenant aux courbes  $\Delta_{12}$  correspondent sur  $\Psi_1$  32 points doubles coniques dont chacun est équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à une courbe rationnelle de degré — 2. Nous désignerons par A la somme de ces courbes.

Aux courbes  $\Delta_{12}$  correspondent sur  $\Psi_1$  des courbes  $H_1$  de genre 11, formant un système linéaire de degré 8 ; ces courbes passent par les 32 points doubles de  $\Psi_1$ . Le système  $|H_1|$  est un réseau et de la relation (1), on déduit

$$2H_0 \equiv 2H_1 + A. \quad (2)$$

On observera que si la dimension de  $|H_1|$  était supérieure à 2, comme ce système est transformé en lui-même par  $T_1$ , il contiendrait, outre les transformées des courbes  $\Delta_{12}$ , un système linéaire partiel de courbes appartenant à  $I'_2$  et ayant pour points-base les points unis de cette involution.  $|H_1|$  étant de degré 8, ce système devrait se réduire à une courbe unique, à laquelle devrait correspondre, sur  $\Phi$ , une courbe X de genre trois, satisfaisant à la relation fonctionnelle.

$$2\Delta_{12} \equiv 2X + A_1.$$

Cette courbe passant par les 28 points doubles de  $\Phi$ , on aurait

$$2\Delta_0 \equiv 2X + A_1 + A'_1$$

et à la courbe X correspondrait, sur F, une courbe bicanonique  $D_0$  passant par les 28 points unis de  $I_2$ , ce qui est impossible.

5. Nous pouvons faire un raisonnement analogue au précédent en partant non plus de la courbe  $\Delta_{11}$ , mais de la courbe  $\Delta_{12}$ . On obtient alors une surface  $\Psi_2$ , contenant une involution  $I'_2$  d'ordre deux, dont l'image

est la surface  $\Phi$ , les points de diramation étant les 16 points doubles coniques appartenant aux courbes  $\Delta_{12}$ .

Aux courbes  $\Delta_0$  de  $\Phi$  correspondent sur  $\Psi_1$  des courbes  $K_{01}$  de genre 19, formant un système linéaire de degré 24 et de dimension 6, appartenant à  $I'_2$ . Aux courbes  $\Delta_{12}$  correspondent des courbes  $K_{02}$  également de genre 19, formant un système linéaire  $|K_{02}|$  de degré 24, de dimension 2, appartenant à l'involution  $I''_2$  et ayant pour points-base les 16 points unis de cette involution.

Les systèmes  $|K_{01}|$ ,  $|K_{02}|$  appartenant à un même système linéaire complet  $|K_0|$  de genre 19, de degré 24 et de dimension 9, qui est le système bicanonique de  $\Psi_2$ .

Le calcul du genre arithmétique de  $\Psi_2$  donne  $p_a = 3$ .

A la courbe  $\Gamma_0$  de  $\Phi$  correspond sur  $\Psi_2$  une courbe  $G'_0$  de genre 7. Le système complet  $|G'_0|$  est le système canonique de  $\Psi_2$ . Le système  $|\Gamma_0|$  de  $\Phi$  étant un réseau, la dimension de  $|G'_0|$  est au moins égale à deux. Si elle est supérieure à 2,  $|G'_0|$  étant transformé en lui-même par la transformation  $T_2$  de  $\Psi_2$  en soi génératrice de  $I'_2$ , il existe des courbes de  $|G'_0|$  transformées en elles-mêmes par  $T_2$  et passant par les 16 points unis de  $I'_2$ .  $|G'_0|$  étant de degré 6, il ne peut d'ailleurs exister qu'une telle courbe. A cette courbe correspondrait sur  $\Phi$  une courbe rationnelle du sixième ordre passant par les 16 points doubles communs aux courbes  $\Delta_{12}$ . Si nous désignons cette courbe par X, on aurait

$$2\Gamma_0 \equiv 2X + A'_1$$

et  $2X + A'_1$  serait une section hyperplane bicanonique de  $\Phi$ , ce qui est impossible, car les 16 points doubles de  $\Phi$  appartenant aux courbes  $\Delta_{12}$  ne peuvent se trouver dans un hyperplan.  $|G'_0|$  est donc un réseau.

En rapportant projectivement les courbes  $K_0$  aux hyperplans d'un espace  $S_9$ , on obtient pour  $\Psi_2$  une surface d'ordre 24. Aux 12 points doubles coniques

de  $\Phi$  appartenant aux courbes  $\Delta_{11}$ , correspondent sur ce modèle projectif de  $\Psi_2$ , 24 points doubles coniques. Nous désignerons par  $A'$  la somme des courbes rationnelles de degré  $-2$  équivalentes à ces 24 points doubles.

Aux courbes  $\Delta_{11}$  correspondent sur  $\Psi_2$  des courbes  $K_1$  de genre 13, passant par les 24 points doubles de  $\Psi_2$ . Les courbes  $K_1$  forment un système linéaire de degré 12 et de dimension 3. La relation (1) donne, sur  $\Psi_2$ ,

$$2K_0 \equiv 2K_1 + A'. \quad (3)$$

La surface  $\Psi_2$  est régulière et présente les caractères  $p_a = p_g = 3$ ,  $p^{(a)} = 7$ ,  $P_2 = 10$ ,  $P_3 = 22$ , ...

6. Les surfaces  $\Psi_1$ ,  $\Psi_2$  sont liées par une correspondance algébrique (2, 2), deux points homologues appartenant à un groupe de  $I'_2$  sur  $\Psi_1$  et à un groupe de  $I'_2$  sur  $\Psi_2$  correspondant à un même point de  $\Phi$ . Nous désignerons par  $F_0$  une surface dont les points représentent les couples de points homologues de  $\Psi_1$ ,  $\Psi_2$  dans la correspondance envisagée.

A un point de  $\Psi_1$  correspondent deux points de  $F_0$  et les couples de points ainsi obtenus forment une involution  $J'_2$ . De même, il existe sur  $F_0$  une involution  $J''_2$  dont  $\Psi_2$  est une image.

Dans la correspondance (1, 2) entre  $\Psi_1$  et  $F_0$ , les points de diramation sont les 32 points doubles coniques de  $\Psi_1$ . De même, dans la correspondance (1, 2) entre  $\Psi_2$  et  $F_0$ , les points de diramation sont les 24 points doubles coniques de  $\Psi_2$ .

A un point de  $\Phi$  correspondent quatre points de  $F_0$  se répartissant en deux groupes de  $J'_2$  et deux groupes de  $J''_2$ . Si nous désignons par  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  les transformations birationnelles de  $F_0$  en soi génératrices de  $J'_2$ ,  $J''_2$ , la transformation  $\theta = \theta_1\theta_2$  est involutive et engendre une involution  $J_2$ .

Deux courbes  $H_0$  de  $\Psi_1$  correspondent sur  $F_0$  aux courbes  $L'_{01}$  de genre 37, formant un système  $|L'_{01}|$

de degré 48 et de dimension 10, appartenant à  $J'_2$ . Aux courbes  $H_1$  correspondent des courbes  $L'_{02}$ , de genre 37, formant un réseau  $|L'_{02}|$ , de degré 48, appartenant à  $J'_2$ . En vertu de la relation (2), les systèmes  $|L'_{01}|$ ,  $|L'_{02}|$  appartiennent à un même système  $|L_0|$ , de genre 37, de degré 48 et de dimension 13, transformé en lui-même par  $\theta_1$ . Les courbes  $L'_{02}$  passent par les 32 points unis de  $J'_2$ . Le système  $|H_0|$  étant le système bicanonique de  $\Psi_1$ ,  $|L_0|$  est le système bicanonique de  $F_0$ .

Aux courbes  $K_0$  de  $\Psi_2$  correspondent sur  $F_0$  des courbes  $L'_{01}$  de genre 37, formant un système  $|L'_{01}|$  de degré 48 et de dimension 9, appartenant à  $J'_2$ . Aux courbes  $K_1$  correspondent des courbes  $L'_{02}$  de genre 37, formant un système  $|L'_{02}|$  de degré 48, de dimension 3, appartenant à  $J'_2$  et ayant pour points-base les 24 points unis de cette involution. En vertu de la relation fonctionnelle (3), les systèmes  $|L'_{01}|$ ,  $|L'_{02}|$  appartiennent à un même système qui doit être le système bicanonique  $|L_0|$  de  $F_0$ , puisque  $|K_0|$  est le système bicanonique de  $\Psi_2$ .

Aux courbes canoniques  $G'_0$  de  $\Psi_1$  correspondent sur  $F_0$  des courbes  $G_0$  de genre 13, formant un système  $|G_0|$ , de degré 12, et de dimension au moins égale à trois.  $|G_0|$  est le système canonique de  $F_0$ .

Aux courbes canoniques  $G'_0$  de  $\Psi_2$  correspondent sur  $F_0$  des courbes appartenant à  $|G_0|$  et formant un réseau appartenant à  $J'_2$ . A la courbe  $\Gamma_1$ , de  $\Phi$  correspond sur  $\Psi_2$  une courbe  $G''_1$  de genre 1, passant par les 34 points unis de  $I'_2$ . On a

$$2G'_0 \equiv 2G''_1 + A'.$$

La courbe  $G'_1$  est isolée et il lui correspond sur  $F_0$  une courbe de genre 13 qui, en vertu de la relation fonctionnelle précédente, appartient au système  $|G_0|$ . Celui-ci a par conséquent la dimension trois et appartient à l'involution  $J'_2$ .

Entre les genres arithmétiques  $p'_a, p_a$  de deux surfaces liées par une correspondance (1, 2) présentant  $\sigma$  points unis, on a la relation

$$4(p_a + 1) = 8(p'_a + 1) - \sigma.$$

Appliquons cette relation à la correspondance entre  $\Psi_1$  et  $F_0$ , puis à la correspondance entre  $\Psi_2$  et  $F_0$ . Dans le premier cas, on a  $p'_a = 4$ ,  $\sigma = 32$ , d'où  $p_a = 1$ . Dans le second cas, on a  $p'_a = 3$ ,  $\sigma = 24$ , d'où  $p_a = 1$ .

La surface  $F_0$  présente donc les caractères

$$p_a = 1, \quad p_o = 4, \quad p^{(1)} = 13, \quad P_2 = 14, \quad P_3 = 38, \quad \dots$$

7. La transformation  $\theta$  engendre sur  $F_0$  une involution  $J_2$  d'ordre deux qui, d'après la construction de  $F_0$ , a pour image la surface  $F$ .

Nous avons vu que toute courbe canonique  $G_0$  de  $F_0$  est transformée en elle-même par  $\theta_1$ . Par contre, il existe un réseau de courbes canoniques appartenant à  $J_2'$  et en dehors de ce réseau, une courbe canonique isolée transformée en elle-même par  $\theta_2$ . Il en résulte que ce réseau appartient à l'involution  $J_2$ ; il a pour homologue sur  $F$  le système canonique  $|C_0|$  de cette surface. La courbe canonique isolée, est transformée en elle-même par  $\theta$ ; il lui correspond sur  $F$  la courbe  $C_1$ .

Le système bicanonique  $|L_0|$  de  $F_0$  contient deux systèmes linéaires partiels composés au moyen de  $J_2$ . L'un, de dimension six, est le transformé du système bicanonique  $|D_0|$  de  $F$ ; l'autre, de dimension six également, est le transformé de  $|D_1|$ . Ces deux systèmes sont dépourvus de points-base, par conséquent l'involution  $J_2$  est dépourvue de points unis.

Nous avons rappelé qu'il existe, sur la surface  $F$ , un système continu  $\infty^1, \{K\}$ , de courbes de genre trois. A ce système correspond sur  $F_0$  un système continu  $\infty^1$  de courbes  $\{M_1\}$  de genre cinq, ayant également, comme  $\{K\}$ , l'indice deux.

Sur la surface  $F$ , les courbes  $C_0-K$  forment également un système continu  $\infty^1$  d'indice deux, de courbes de genre trois. Les courbes  $C_0-K$  et  $K$  se coupent en deux points. Aux courbes  $C_0-K$  correspondent, sur  $F_0$ , des courbes  $M_2$ , de genre cinq, formant un système continu  $\infty^1, \{M_2\}$ , d'indice deux. Les courbes  $M_1, M_2$  se coupent en quatre points et on a évidemment

$$G_0 \equiv M_1 + M_2.$$

8. Nous allons maintenant construire un modèle projectif de la surface  $F$ , sous forme d'une surface double, en partant du modèle projectif canonique de la surface  $\Psi_1$ .

Nous avons vu que le système canonique  $|G'_0|$  de  $\Psi_1$  était  $\infty^3$  et contenait un réseau  $|G'_{01}|$  appartenant à l'involution  $I'_2$  et une courbe  $G'_{02}$ , isolée, lieu de  $\infty^1$  couples de  $I'_1$ . Rapportons projectivement les courbes  $G'_0$  aux plans de l'espace. La surface  $\Psi_1$  se transforme birationnellement en une surface du sixième ordre, à sections planes de genre 7, que nous désignerons par  $\Psi_1^*$ .

Soit  $P_1P_2$  un couple de  $I'_2$  appartenant à  $G'_{02}$ . Les courbes de  $|G'_0|$  passant par  $P_1$  forment un réseau déterminé par la courbe  $G'_{02}$  et par les courbes d'un faisceau de  $|G'_{01}|$ . Ces courbes passent par  $P_2$ , donc les courbes  $G'_0$  passant par  $P_1$  passent par  $P_2$  et au couple  $P_1P_2$  correspond un point double de la surface  $\Psi_1^*$ . Il en résulte que la surface  $\Psi_1^*$  possède une cubique plane double  $\gamma$ , dont le domaine correspond à la courbe  $G'_{02}$ .

Aux courbes  $G'_{01}$  correspondent les sections de  $\Psi_1^*$  par les plans d'une gerbe de sommet  $O$ , n'appartenant pas à la surface. L'involution  $I'_2$  est engendrée sur  $\Psi_1^*$  par une homologie harmonique de sommet  $O$ , dont le plan est celui de la cubique  $\gamma$ . Les points unis de cette involution sont les 12 points-pinces de la surface appartenant à la courbe  $\gamma$ . Aux 32 points doubles

coniques de  $\Psi_1$  correspondent 32 points doubles coniques de  $\Psi_1^*$ , situés par couples sur des droites passant par O.

Comme vérification, remarquons que les courbes canoniques de  $\Psi_1^*$  sont découpées par les quadriques passant par  $\gamma$ , c'est-à-dire par les quadriques formées du plan de  $\gamma$  et des plans de l'espace. La surface  $\Psi_1^*$  a donc bien ses sections planes comme courbes canoniques. On a bien  $\phi_0 = 4$ ,  $\phi^{(1)} = 7$ .

Les courbes bicanoniques de  $\Psi_1^*$  sont découpées par les surfaces du quatrième ordre passant doublement par  $\gamma$ , c'est-à-dire par des surfaces formées du plan de  $\gamma$  et des surfaces cubiques passant par  $\gamma$ . Les courbes bicanoniques correspondent aux courbes  $H_0$  et on a bien  $P_2 = 11$ .

Interprétons maintenant la relation fonctionnelle

$$|2H_0| = |2H_1 + A|$$

sur la surface  $\Psi_1^*$ . Le système  $|2H_0|$  est découpé sur  $\Psi_1^*$  par les surfaces du sixième ordre passant doublement par la courbe  $\gamma$ . Parmi celles de ces surfaces (distinctes de  $\Psi_1^*$ ) qui passent par les 32 points doubles, il y en a  $\infty^2$  qui touchent la surface  $\Psi_1^*$  le long d'une des  $\infty^2$  courbes  $H_1$ .

Cela étant, soient

$$\Psi(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0, \quad \phi(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0$$

l'équation de  $\Psi_1^*$  et celle d'une surface du 6<sup>e</sup> ordre, passant doublement par  $\gamma$ , touchant  $\Psi_1^*$  le long d'une courbe  $H_1$ . Les équations

$$\Psi(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0, \quad x_4^2 = \phi(x_0, x_1, x_2, x_3)$$

représentent, dans un espace  $S_4$ , une surface birationnellement identique à  $F_0$ . Entre  $\Psi_1^*$  et la surface qui vient d'être construite, existe en effet une correspondance (1, 2) dont les points de diramation sont les 32 points doubles coniques.

Liège, le 8 mai 1943.