Bulletin de la Classe des sciences

Une involution cyclique appartenant à une surface algébrique

Lucien Godeaux

Résumé
Détermination de la structure d'un point uni de seconde espèce d'une involution cyclique d'ordre 41, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique et de celle du point de diramation correspondant sur une surface image de l'involution.

COMMUNICATION D'UN MEMBRE

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Une involution cyclique appartenant à une surface algébrique

par Lucien GODEAUX
Membre de l'Académie

Résumé. — Détermination de la structure d'un point uni de seconde espèce d'une involution cyclique d'ordre 41, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique et de celle du point de diramation correspondant sur une surface image de l'involution.

Dans un ouvrage récent [1], nous avons considéré les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et n'ayant qu'un nombre fini de points unis et indiqué une méthode pour déterminer la structure d'un point uni (c'est-à-dire les branches de points unis issues du point considéré). En même temps, on déterminait la structure du point de diramation correspondant sur une surface image de l'involution. Dans cette note, nous appliquons cette méthode à une involution cyclique d'ordre 41 et nous considérons un point uni de seconde espèce auquel sont attachés les nombres $\alpha = 4$, $\beta = 31$. La raison de cette publication est la présence de certaines difficultés dans l'application de la méthode.

---

[1] *Théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications* (Rome, Cremonese, 1963). Nous sommes revenu à diverses reprises sur ces questions. Voir *Nouvelles recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1970, 11.1192-1204, 1326-1337, 1338-1351; 1971, pp. 251-261, 378-387), *Recherches sur la structure des points de diramation d'une surface algébrique multiple*, 1972. (Idem, pp. 6-22, 158-170, 171-179, 1299-1306; 1973, pp. 125-133, 293-302, 1047-1053; 1974, pp. 91-95).

1. Soit F une surface algébrique contenant une involution cyclique I d'ordre 41 n'ayant qu'un nombre fini de points unis.

Nous pouvons construire sur F un système linéaire | C | de dimension r aussi grande qu'on le veut (en général incomplet) composé au moyen de l'involution donnée I et privé de points-base. En rapportant projectivement les courbes C aux hyperplans d'un espace S_r à r dimensions, il correspond à la surface F une surface Φ image de l'involution.

On peut de plus supposer que les points unis de l'involution I sont simples pour la surface F.

Considérons un point uni O de seconde espèce, c'est-à-dire que dans le domaine de O, la transformation birationnelle de F en soi génératrice de l'involution ne donne pas l'identité. Nous supposerons qu'au point O sont attachés les nombres $\alpha = 4, \beta = 31$. Dans le domaine du premier ordre de O, il existe deux points unis de l'involution. Nous les désignerons par $(\alpha,1)$ et $(\beta,1)$ (1). Dans le plan tangent ω à F en O, il existe deux tangentes unies à la surface en O passant l'une a par le point $(\alpha,1)$, l'autre b par le point $(\beta,1)$.

Nous aurons à considérer les courbes C ayant en O des multiplicités croissantes. A ces courbes correspondront dans le plan ω des courbes C′ transformées en elles-mêmes par l'homographie H d'équation

$$x'_0 : x'_1 : x'_2 = x_0 : \varepsilon x_1 : \varepsilon^4 x_2,$$

où ε est une racine primitive d'ordre 41 de l'unité, le point O étant donné par $x_1 = x_2 = 0$.

Notons que si l'on pose $\eta = \varepsilon^4$, les équations de l'homographie H peuvent s'écrire (2)

$$x'_0 : x'_1 : x'_2 = x_0 : \eta^{31} x_1 : \eta x_2.$$

Les courbes C passant par O ont en ce point la multiplicité $\lambda + \mu$, les entiers positifs λ, μ étant solutions des congruences équivalentes

$$\lambda + 4\alpha \equiv 0, \ \mu + 31\,\lambda \equiv 0, \qquad \text{(Mod. 41)}$$

$\lambda + \mu$ étant inférieur à 41.

(1) Nous utilisons les notations de notre ouvrage cité plus haut. Voir en particulier le N° 35.

(2) M. B. SEGRE a démontré que la structure d'un point uni ne dépend pas de la nature de la surface F. Voir B. SEGRE, *Some proprieties of differentiable varieties and transformations* (Berlin, Springer, 1971).

Les courbes C passant par O ont en ce point la même multiplicité que les courbes C′ du plan ω, d'ordre 41, passant par O ([1]). Les monômes figurant dans l'équation de ces courbes appartiennent à trois catégories:

les monômes

$$x_0^{3\mu}x_1^{41-4\mu}x_2^{\mu} \quad (\mu = 0,1,\cdots,9,10), \quad \lambda + 4\mu = 41,$$
$$x_0^{3\mu-41}x_1^{82-4\mu}x_2^{\mu} \quad (\mu = 14,15,\cdots,20), \quad \lambda + 4\mu = 82.$$
$$x_0^{3\mu-82}x_1^{123-4\mu}x_2^{\mu} \quad (\mu = 29,30), \quad \lambda + 4\mu = 123.$$

Nous formons les équations des courbes C′ passant par O en écrivant ces monômes suivant les puissances décroissantes de x_0. Nous désignerons par C'_1 les courbes C′ dont l'équation commence par le terme $x_0^{30}x_1x_2^{10}$. Notons que cette équation contient le terme $x_0^{19}x_1^2x_2^{20}$. Nous désignerons par C'_2 les courbes dont l'équation commence par $x_0^{27}x_1^5x_2^9$, par C'_3 les courbes C′ dont l'équation commence par $x_0^{17}x_1^9x_2^8$, par C'_4 celles dont l'équation commence par $x_0^{21}x_1^{13}x_2^7$, par C'_5 celles dont l'équation commence par $x_0^{19}x_1^2x_2^{20}$, et ainsi de suite.

Nous écrirons les équations de ces courbes en évitant d'écrire les coefficients, tous variables, pour éviter les complications d'écriture, ces coefficients ne jouant aucun rôle dans nos développements.

Nous désignerons par C_i les courbes du système | C | qui correspondent aux courbes C′ et qui ont en O le même comportement que ces dernières.

2. Considérons le système | C_1 |, formé par les courbes C assujetties à la seule condition de passer par O.

Les courbes C'_i correspondantes ont pour équation

$$x_0^{30}x_1x_2^{10} + x_0^{27}x_1^5x_2^9 + x_0^{24}x_1^7x_2^8 + x_0^{21}x_1^{13}x_2^7 + x_0^{19}x_1^2x_2^{20} + \cdots = 0$$

dans laquelle nous n'écrivons pas les coefficients, supposés existants et variables.

Ces courbes passent onze fois par le point O et ont une tangente confondue avec *a* et dix avec *b*. Les courbes C_1 passent onze fois par O, une fois par les points (α,1), (α,2), ..., (α,30) et dix fois par les

([1]) Voir note 2 p. 910.

points $(\beta,1)$, $(\beta,2)$, $(\beta,3)$. Ces points sont unis de seconde espèce pour l'involution, sauf les points $(\alpha,30)$ et $(\beta,3)$, qui sont unis de première espèce, c'est-à-dire que dans le domaine de chacun de ces points, la transformation génératrice de l'involution donne l'identité.

Désignons par O' le point de diramation qui correspond à O sur la surface Φ image de l'involution et par Φ_1 la surface projection de Φ à partir de O' sur un hyperplan de l'espace ambiant.

Au domaine du point $(\alpha,30)$ correspond sur Φ_1 une droite que nous désignerons par $\Gamma_{\alpha 1}$ et au domaine de $(\beta,3)$ une courbe rationnelle $\Gamma_{\beta 1}$ d'ordre dix.

Si n est l'ordre de la surface Φ, la surface F et le système $|C|$ sont de degré $41\,n$. Le système $|C_1|$ est de degré effectif $41(n-11)$ et la surface Φ_1 est d'ordre $n-11$. Le point O' est multiple d'ordre 11 pour la surface Φ, le cône tangent en ce point projetant $\Gamma_{\alpha 1}$ et $\Gamma_{\beta 1}$.

3. Pour étudier la structure du point O pour les courbes C' d'ordre 41 du plan ω, nous utiliserons des transformations quadratiques T_1, T_2 données par

$$T_1 = \begin{pmatrix} y_0^2 & y_0y_1 & y_1y_2 \\ x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix},$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} z_0^2 & z_1z_2 & z_0z_2 \\ x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}.$$

Au point $(\beta,1)$, T_1 fait correspondre le point $y_1 = y_2 = 0$ et au point $(\alpha,1)$, T_2 fait correspondre le point $z_1 = z_2 = 0$.

Plus généralement, nous aurons à utiliser des puissances de ces transformations, soient

$$T_1^k = \begin{pmatrix} y_0^{k+1} & y_0^k y_1 & y_1^k y_2 \\ x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}$$

qui fait correspondre au point $(\beta, k-1)$ le point $y_1 = y_2 = 0$ et

$$T_2^k = \begin{pmatrix} z_0^{k+1} & z_1 z_2^k & z_0^k z_2 \\ x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix},$$

qui fait correspondre au point $(\alpha, k-1)$ le point $z_1 = z_2 = 0$.

4. Envisageons la courbe d'équation

$$\Sigma x_0^{3\mu} x_1^{41-4\mu} x_2^{\mu} = 0, \quad (\mu = 10,9,\cdots,1,0) \tag{2}$$

et effectuons la transformation T_1. On obtient l'équation

$$y_0^{123}(\Sigma y_1^{41-\mu} y_2^{\mu}) = 0. \tag{2'}$$

On en conclut que le point $(\beta,3)$ est multiple d'ordre μ à tangentes variables pour les courbes (2'), donc pour les courbes (2).

Si, en particulier, on fait $\mu < 10$ dans l'équation (2), on vérifie que le point $(\beta,10)$ est bien multiple d'ordre dix pour les courbes C_1.

Si dans l'équation (2), on fait successivement $\mu < 9, 8, \ldots, 1$, on voit que pour les courbes C' obtenues, le point $(\beta,3)$ est multiple d'ordre 9, 8, ..., à tangentes variables.

Opérons maintenant sur l'équation (2) la transformation T_1^3. On obtient l'équation, après suppression du facteur commun $y_2^{41-2\mu}$,

$$y_0^{92} y_1^{10} + y_0^{91} y_1^2 y_2^9 + y_0^{82} y_1^{20} = 0.$$

Le terme de degré le plus élevé en y_0 dans cette équation est le premier. On en conclut que le point $(\beta,2)$ est multiple d'ordre 10 pour les courbes C', les tangentes étant toutes confondues avec la droite $(\beta,2)$ $(\beta,3)$. Ce résultat subsiste lorsque l'on fait $\lambda \leqslant 9, 8, \ldots; 1$ et l'on voit que pour les courbes C_i $(i \geqslant 3)$ passent avec la même multiplicité par les points $(\beta,2)$, $(\beta,3)$.

5. Considérons les courbes C'_3 dont l'équation est

$$x_0^{19} x_1^2 x_2^{20} + x_0^{18} x_1^{11} x_2^6 + x_0^{16} x_1^6 x_2^{19} + \cdots + x_1^{41} = 0.$$

D'après ce qu'on vient de voir, ces courbes passent six fois par les points $(\beta,2)$, $(\beta,3)$. Comme le point O est multiple d'ordre 22, la suite de points $(\beta,1)$, $(\beta,2)$, $(\beta,3)$ a des multiplicités dont la somme vaut $41 - 22 = 19$ et le point $(\beta,1)$ doit être multiple d'ordre sept. D'ailleurs, si l'on effectue la transformation T_1 sur les courbes C'_1, on obtient, après suppression du facteur commun y_1^{22}, l'équation

$$y_0^{40} y_2^{20} + y_0^{53} y_1 y_2^6 + y_0^{36} y_1^3 y_2^{19} + \cdots + y_0^{41} y_1^{19} = 0.$$

Le terme de degré le plus élevé en y_0 est le second, donc $(\beta,1)$ est bien multiple d'ordre sept pour les courbes C'_5. Le coefficient de y_0^{53} est $y_1 y_2^6$, donc les tangentes aux courbes C'_5 en $(\beta,1)$ sont six droites confondues avec $(\beta,1)$, $(\beta,2)$ et une droite passant par $(\beta,1,1)$.

Comme on a $\mu = 20$, les courbes C'_5 passent une fois par les points $(\beta,1,1)$, $(\beta,1,2)$, ..., $(\beta,1,13)$, ce dernier point étant uni de première espèce pour l'involution I.

Les courbes C'_5 passent deux fois par le point $(\alpha,1)$. Effectuons sur leur équation la transformation T_2^k. Après suppression du facteur commun z_1^{2k+20}, en supposant $k \leqslant 9$, le terme comptant z_0 à la plus haute puissance est le premier et on voit que, quelque soit $k \leqslant 9$, les courbes C'_5 passent deux fois par les points $(\alpha,1)$, $(\alpha,2)$, ..., $(\alpha,9)$.

Si nous faisons $k = 10$, le terme contenant z_0 à la plus haute puissance est le dernier et on voit que le point $(\alpha,10)$ est simple pour les courbes C'_5. Le point $(\alpha,10,1)$ est nécessairement simple pour les courbes C'_5 et uni de première espèce pour l'involution I.

De ce qui précède on conclut que les courbes C_5 ont la multiplicité 22 en 0, passent deux fois par les points $(\alpha,1)$, $(\alpha,2)$, ..., $(\alpha,9)$, une fois par les points $(\alpha,10)$, $(\alpha,10,1)$, sept fois par le point $(\beta,1)$, six fois par les points $(\beta,2)$, $(\beta,3)$, une fois par les points $(\beta,1,1)$, $(\beta,1,2)$, ..., $(\beta,1,13)$. Le degré effectif du système $| C_5 |$ est égal à $41(n - 16)$.

Rapportons projectivement les courbes C_5 aux hyperplans d'un espace à $r - 5$ dimensions. Il correspond à F une surface Φ_5 d'ordre $n - 16$. Aux domaines des points $(\alpha,10,1)$ et $(\beta,1,13)$ correspondent des droites qui seront désignées par $\Gamma_{\alpha 2}$ et $\Gamma_{\beta 2}$. Au domaine du point $(\beta,3)$ correspond une courbe rationnelle d'ordre six, $\Gamma_{\beta 1}$, projection de la courbe déjà rencontrée sur Φ_1.

6. Occupons-nous maintenant des courbes C_2 et C'_2. L'équation de ces dernières s'écrit

$$x_0^{27}x_1^5x_2^9 + x_0^{24}x_1^9x_2^8 + x_0^{21}x_1^{13}x_2^7 + x_0^{19}x_1^2x_2^{20} + x_0^{18}x_1^{17}x_2^6 + \cdots + x_2^{41} = 0.$$

Les courbes C_2 passent neuf fois par les points $(\beta,1)$, $(\beta,2)$, $(\beta,3)$.

Opérons la transformation T_2^k. Il vient

$$z_0^{36k+27}z_1^5z_2^{5k+9} + z_0^{32k+24}z_1^9z_2^{9k+8} + z_0^{26k+21}z_1^{13}z_2^{13k+9}$$
$$+ z_0^{39k+19}z_1^2z_2^{2k+30} + \cdots + z_0^{41k}z_2^{41} = 0.$$

Pour $k = 1$, le terme qui contient z_0 à la plus haute puissance est le premier. Après suppression du facteur commun z_2^{14}, on voit que le point $(\alpha,1)$ est multiple d'ordre cinq pour les courbes C'_2.

Pour $k = 2$, on a à considérer le même terme et le point $(\alpha,2)$ est également multiple d'ordre cinq pour les courbes C'_2.

Faisons maintenant $k = 3$. Le terme contenant z_0 à la plus haute puissance est le quatrième et après suppression du facteur commun z_2^{24}, il s'écrit $z_0^{136}z_1^2z_2^2$. On en conclut que le point $(\alpha,3)$ est multiple d'ordre quatre pour les courbes C_2'. Deux tangentes en ce point sont confondues avec la droite $(\alpha,3)$ $(\alpha,4)$ et deux avec la droite $(\alpha,3)$ $(\alpha,3,1)$.

Pour $k = 9$, le terme contenant z_0 à la plus haute puissance, après suppression du facteur commun z_2^{36}, est le terme $z_0^{370}z_1^2$. Les points $(\alpha,4)$,$(\alpha,5)$, ..., $(\alpha,9)$ ont une multiplicité au plus égale à deux et d'autre part au moins égale à deux. Les courbes C_2' passent donc deux fois par les points $(\alpha,4)$, ..., $(\alpha,9)$ et, nécessairement une fois par les points $(\alpha,10)$ et $(\alpha,10,1)$.

D'autre part le point $(\alpha,2)$ étant quintuple et le point $(\alpha,3)$ quadruple, les points $(\alpha,3,1)$ et $(\alpha,3,1,1)$ sont nécessairement simples pour les courbes C_2'.

Il en résulte que les courbes C_2 passent 14 fois par O, cinq fois par $(\alpha,1)$, $(\alpha,2)$, quatre fois par $(\alpha,3)$, deux fois par $(\alpha,4)$, ..., $(\alpha,9)$, une fois par $(\alpha,10)$, $(\alpha,10,1)$, $(\alpha,3,1)$, $(\alpha,3,1,1)$, neuf fois par $(\beta,1)$, $(\beta,2)$, $(\beta,3)$. Le degré effectif du système $| C_2 |$ est égal à $41(n - 13)$.

Rapportons projectivement les courbes C_1 aux hyperplans de l'espace S_{r-1} contenant la surface Φ. A la surface F correspond une surface Φ_α d'ordre $n - 13$.

Au domaine du point $(\alpha,10,1)$ correspond une droite $\Gamma_{\alpha 2}$, à celui du point $(\alpha,3,1,1)$ une droite $\Gamma_{\alpha 3}$, enfin au domaine du point $(\beta,3)$ correspond une courbe rationnelle d'ordre neuf, $\Gamma_{\beta 1}$.

Aux courbes C_2 correspondent sur la surface Φ_1 les sections par les hyperplans passant par un point O_1' commun à la droite $\Gamma_{\alpha 1}$ et à la courbe $\Gamma_{\beta 1}$. La surface Φ_2 est la projection de Φ_1 à partir de O_1' sur un hyperplan de S_{r-1}. Ce point est double pour la surface Φ_1.

7. Passons au système $| C_3 |$ dont les courbes ont la multiplicité 17 en O et passent huit fois par les points $(\beta,1)$, $(\beta,2)$, $(\beta,3)$.

L'équation des courbes C_3' est

$$x_0^{24}x_1^9x_2^8 + x_0^{21}x_1^{13}x_2^7 + x_0^{19}x_1^2x_2^{20} + \cdots + x_2^{41} = 0.$$

Effectuons la transformation T_2. Après suppression du facteur commun z_2^{17}, on obtient l'équation

$$z_0^{56}z_1^9 + z_0^{48}z_1^{13}z_2^3 + z_0^{58}z_1^2z_2^5 + \cdots + z_0^{41}z_2^{26} = 0.$$

Le terme contenant z_0 à la plus haute puissance set est le troisième et on en conclut que le point $(\alpha,1)$ est multiple d'ordre sept pour les courbes C'_3. Deux tangentes en ce point passent par $(\alpha,2)$ et cinq par le point $(\alpha,1,1)$.

En reprenant le raisonnement fait plus haut, on voit que les points $(\alpha,2), \ldots, (\alpha,9)$ sont doubles et les points $(\alpha,10), (\alpha,10,1)$ simples pour les courbes C'_3.

Les courbes C_3 passent donc sept fois par le point $(\alpha,1)$, deux fois par les points $(\alpha,2), \ldots, (\alpha,9)$, une fois par les points $(\alpha,10), (\alpha,10,1)$. comme on a $\lambda = 9$, les courbes C_3 passent nécessairement deux fois par $(\alpha,1,1), (\alpha,1,1,1)$ et une fois par les points $(\alpha,1,1,2), (\alpha,1,1,2,1)$.

Le degré effectif du système $|C_3|$ est $41(n-14)$. Si nous rapportons projectivement les courbes C_3 aux hyperplans d'un espace à $r-3$ dimensions appartenant à l'espace contenant Φ_2, il correspond à F une surface Φ_3 d'ordre $n-14$.

Aux domaines des points unis de première espèce $(\alpha,10,1), (\alpha,1,1,2,1)$, $(\beta,3)$ correspondent sur la surface Φ_3 respectivement une droite $\Gamma_{\alpha 2}$, une droite $\Gamma_{\alpha 3}$ et une courbe rationnelle $\Gamma_{\beta 1}$ d'ordre huit. On en conclut que sur la surface Φ_2 la droite $\Gamma_{\alpha 3}$ et la courbe $\Gamma_{\beta 1}$ se rencontrent en un point O'_2, simple pour la surface puisque Φ_3, projection de Φ_2 à partir de O'_2, a l'ordre inférieur d'une unité à celui de Φ_2.

On conclut de ce qui précède qu'au point de vue des transformations birationnelles, le point O' est équivalent à l'ensemble des courbes $\Gamma_{\alpha 1}, \Gamma_{\alpha 2}, \Gamma_{\alpha 3}, \Gamma_{\beta 1}$.

8. Étudions maintenant le système $|C_4|$ dont les courbes passent vingt fois par le point O et sept fois par les points $(\beta,1), (\beta,2), (\beta,3)$.

Si nous effectuons sur l'équation des courbes C'_4 la transformation T_2, nous trouvons que le point $(\alpha,1)$ est multiple d'ordre quatre, deux tangentes passant par $(\alpha,2)$ et deux par $(\alpha,1,1)$.

Le raisonnement déjà fait montre que les courbes C'_3 passent deux fois par les points $(\alpha,2), \ldots, (\alpha,9)$ et une fois par les points $(\alpha,10)$, $(\alpha,10,1)$.

D'autre part, on a $\lambda = 13$, donc les courbes C_4 doivent passer deux fois par les points $(\alpha,1,1), (\alpha,1,2), (\alpha,1,3), (\alpha,1,4)$ et une fois par les points $(\alpha,1,5), (\alpha,1,5,1)$.

En rapportant projectivement les courbes C_4 aux hyperplans d'un espace à $r-4$ dimensions appartenant à l'espace S_{r-3} contenant

Φ_3, il correspond à F une surface Φ_4 d'ordre $n - 15$, car le degré effectif du système $| C_4 |$ est égal à $41(n - 15)$.

Aux domaines des points unis de première espèce $(\alpha,10,1)$, $(\alpha,1,5,1)$, $(\beta,3)$ correspondent respectivement sur la surface Φ_4 une droite $\Gamma_{\alpha 2}$, une seconde droite $\Gamma_{\alpha 4}$ et une courbe rationnelle d'ordre sept $\Gamma_{\beta 1}$.

La surface Φ_4 est projectivement identique à la projection de la surface Φ_3 à partir d'un point O'_3 commun aux courbes $\Gamma_{\alpha 3}$, $\Gamma_{\beta 1}$ sur un hyperplan de l'espace ambiant.

9. Nous avons considéré plus haut le système $| C_5 |$ et la surface Φ_5. Celle-ci est projectivement identique à la projection de la surface Φ_4 sur un hyperplan de l'espace ambiant à partir d'un point O'_4 commun à la droite $\Gamma_{\alpha 5}$ et à la courbe $\Gamma_{\beta 1}$. Comme la surface Φ_5 est d'ordre $n - 16$, le point O'_4 est simple pour la surface Φ_4.

Sur la surface Φ_5, nous avons une droite $\Gamma_{\alpha 2}$, une courbe rationnelle d'ordre six $\Gamma_{\beta 1}$ et une droite $\Gamma_{\beta 2}$ représentant le domaine du point $(\beta,13)$.

10. Considérons les courbes C_6 et C'_6. Celles-ci passent 23 fois par O et six fois par les points $(\beta,1)$, $(\beta,2)$, $(\beta,3)$. Elles ont en O 17 tangentes passant par $(\alpha,1)$. En effectuant successivement les transformations T_2, T_2^2, T_2^3, on voit que les courbes C_6 passent huit fois par $(\alpha,1)$, six fois par $(\alpha,2)$, quatre fois par $(\alpha,3)$, mais ne passent plus par $(\alpha,4)$. On en conclut, puisque $\lambda = 17$, que les courbes C_6 passent deux fois par les points $(\alpha,1,1)$, $(\alpha,1,2)$, $(\alpha,1,3)$, $(\alpha,1,4)$, une fois par les points $(\alpha,1,5)$, $(\alpha,1,5,1)$. De plus, ces courbes doivent passer deux fois par les points $(\alpha,3,1)$, $(\alpha,3,1,1)$.

Le degré effectif de $| C_6 |$ est $41(n - 19)$.

En rapportant projectivement les courbes C_6 aux hyperplans d'un espace à $r - 6$ dimensions, il correspond à F une surface Φ_6 d'ordre $n - 19$. Cette surface est projectivement identique à la projection de la surface Φ_5 sur un hyperplan de l'espace ambiant à partir d'un point O'_6 commun aux droites $\Gamma_{\alpha 2}$ et $\Gamma_{\beta 2}$. Ce point est triple pour la surface Φ_5, mais ne fait pas partie de l'entourage du point O′. On a ici une circonstance analogue à celle sur laquelle nous avons appelé l'attention dans une communication faite au Congrès de Bari de l'Unione Matematica Italiana [1].

[1] *Sur les points de diramation isolés des surfaces multiples* (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1971, pp. 1098-1161).

Sur la surface Φ_6, il correspond au domaine du point $(\alpha,1,5,1)$ une droite $\Gamma_{\alpha 5}$ déjà rencontrée, au domaine du point $(\alpha,3,1,1)$ une conique $\Gamma_{\alpha 6}$ et au domaine du point $(\beta,3)$ une courbe rationnelle $\Gamma_{\beta 1}$ du sixième ordre.

11. Il convient de faire une remarque. Nous avons vu que le point O'_5 était double pour la surface Φ_1. En projetant la surface Φ_1 de ce point, on devrait donc trouver une conique sur la surface Φ_2. Or, il n'en est rien et on trouve seulement une droite $\Gamma_{\alpha 3}$. Observons qu'au point $(\alpha,3)$, il existe deux tangentes aux courbes C_2 mais que celles-ci passent simplement par les points $(\alpha,3,1)$ et $(\alpha,3,1,1)$. On en conclut que le plan tangent au point O'_1 à la surface Φ_1 doit toucher la surface Φ_2 le long de la droite $\Gamma_{\alpha 3}$. En d'autres termes, le point O'_1 est double uniplanaire pour la surface Φ_1.

12. Appelons G les sections hyperplanes de la surface Φ et en général G_i les courbes de Φ qui correspondent aux courbes C_i.

Nous avons la relation fonctionnelle

$$G \equiv G_1 + \Gamma_{\alpha 1} + \Gamma_{\beta 1}$$

et la droite $\Gamma_{\alpha 1}$ a le degré virtuel -2, la courbe $\Gamma_{\beta 1}$ le degré virtuel -11.

Nous avons ensuite

$$G \equiv G_2 + \Gamma_{\alpha 1} + \Gamma_{\alpha 2} + \Gamma_{\alpha 3} + \Gamma_{\beta 1},$$

les droites $\Gamma_{\alpha 2}$ et $\Gamma_{\alpha 3}$ ayant toutes deux le degré virtuel -2 mais ne se rencontrant pas. Par contre, toutes deux rencontrent $\Gamma_{\alpha 1}$ en un point.

Liège, le 15 juillet 1974.