Une variété à trois dimensions à sections hyperplanes de bigenre un

Lucien Godeaux

Résumé

Construction d'une variété algébrique à trois dimensions dont les sections hyperplanes sont de surfaces de bigenre un ($p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$) contenant un système linéaire de dimension huit de surfaces de genres un ($p_a = P_4 = 1$).

COMMUNICATION D'UN MEMBRE

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Une variété à trois dimensions à sections hyperplanes de bigenre un

par Lucien GODEAUX
Membre de l'Académie

Résumé. — Construction d'une variété algébrique à trois dimensions dont les sections hyperplanes sont de surfaces de bigenre un ($p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$) contenant un système linéaire de dimension huit de surfaces de genres un ($p_a = P_4 = 1$).

Dans une note antérieure [1] nous avons démontré que si une variété algébrique normale, dans un espace à p dimensions, a pour sections hyperplanes des surfaces de bigenre un ($p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$), elle contient un système linéaire de dimension $p - 1$ de surfaces de genres un ($p_a = P_4 = 1$). Reprenant cette question, G. Fano [2] a démontré que p ne pouvait prendre que les valeurs $p = 4, 6, 7, 9, 13$ et que de plus, la variété possédait huit points quadruples.

Dans cette note, nous commençons par construire une variété W à cinq dimensions qui, dans un espace à onze dimensions, représente l'involution engendrée dans un espace à cinq dimensions par une homographie biaxiale harmonique ayant des plans pour axes. Les sections de la variété W par des espaces à huit dimensions sont préci-

(1) *Sur les variétés algébriques à trois dimensions dont les sections hyperplanes sont des surfaces de genres zéro et de bigenre un* (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1933, pp. 134-140).

(2) *Sulle varietà algebriche a tre dimensioni le cui sezioni iperpiane sono superficie di genere zero e bigenere uno* (Memorie delle Società Italiana delle Scienze detta dei XL, 1938, pp. 1-26).

sément des surfaces de bigenre un, de sorte que la section de W par un espace à neuf dimensions donne une des variétés étudiées dans le cas $p = 9$. Nous donnons également quelques propriétés de la variété W.

1. Considérons dans un espace linéaire S_5 à cinq dimensions, une homographie biaxiale harmonique H dont les axes sont deux plans σ_1, σ_2. Nous écrirons les équations de cette homographie sous la forme

$$x'_0 : x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 : x'_5 = x_0 : x_1 : x_2 : -x_3 : -x_4 : -x_5.$$

Les hyperquadriques transformées en elles-mêmes par H forment deux systèmes linéaires $| Q_1 |$ et $| Q_2 |$. Le premier $| Q_1 |$ a des équations de la forme

$$\varphi(x_0,x_1,x_2) + \psi(x_3,x_4,x_5) = 0,$$

où φ et ψ sont des formes quadratiques de leurs arguments.

Le second système $| Q_2 |$ a pour équation

$$\Sigma \lambda_{ik} x_i x_k = 0. \quad (i = 0, 1, 2 \text{ et } k = 3, 4, 5).$$

Le système $| Q_1 |$ a la dimension onze et $| Q_2 |$ la dimension huit.

Rapportons projectivement les hyperquadriques Q_1 aux hyperplans d'un espace S_{11} à onze dimensions en posant

$$X_{ik} = x_i x_k. \quad (i,k = 0, 1, \ldots, 5).$$

L'élimination des x entre ces équations conduit aux équations

$$| X_{ik} | = 0, \quad (i,k = 0,1,2 \text{ et } i,k = 3,4,5)$$

ces déterminants étant de caractéristique un.

Les premières équations, pour $i,k = 0,1,2$, représentent dans un espace Σ_1 à cinq dimensions une surface de Veronese Φ_1. Les secondes équations, pour i,k égaux à 3,4,5, représentent dans un espace Σ_2 à cinq dimensions, une surface de Veronese Φ_2. Les espaces Σ_1, Σ_2 appartiennent à l'espace S_{11} et ne se rencontrent pas.

Dans cet espace S_{11}, les équations simultanées représentent une variété W à cinq dimensions, lieu des droites s'appuyant sur les surfaces Φ_1 et Φ_2. Celles-ci étant d'ordre quatre, la variété W est d'ordre 16. Cette variété est l'intersection du cône projetant la surface Φ_1 de Σ_2 et du cône projetant Φ_2 de Σ_1. Les surfaces Φ_1 ct Φ_2 sont donc quadruples pour la variété W.

Dans l'espace S_5, l'homographie H engendre une involution I du second ordre et la variété W est l'image de cette involution.

2. Considérons la surface F′ intersection de la variété W par un espace à huit dimensions. Aux ∞^2 hyperplans de S_{11} passant par cet espace correspondent les ∞^2 hyperquadriques Q_1 passant par une surface F de S_5. On sait qu'une telle surface est de genres un ($p_a = P_4 = 1$). La surface F′ représente les groupes de l'involution I appartenant à F. Si p'_a est le genre arithmétique de F′, on a

$$p_a + 1 = 2(p'_a + 1),$$

d'où $p'_a = 0$.

Les hyperquadriques Q_1 découpent sur F des courbes C_1 d'ordre 16 et de genre 17. A ces courbes correspondent sur F′ des courbes C'_1 de genre neuf, sections hyperplanes de la surface F′. Les hypersurfaces Q_2 découpent sur F des courbes C'_2 de genre 17 auxquelles correspondent sur F′ des courbes C_2 de genre neuf. Sur une courbe C_1, les autres courbes C_1 et les courbes C_2 découpent des groupes canoniques, donc sur une courbe C'_1, soit les courbes C'_1, soit les courbes C'_2 découpent la série canonique. La série canonique d'une courbe C'_1 étant de dimension huit, ce sont les courbes C'_2 oui découpent sur les courbes C'_1 la série canonique. On en conclut que la surface F′ est dépourvue de courbe canonique.

Un raisonnement analoguc montrc quc lc systèmc $| C'_1 |$ cst l'adjoint au système $| C'_2 |$ et que par conséquent, la surface F′ possède une courbe bicanonique d'ordre zéro. Elle est caractérisée par les genres $p_a = p_g = 0, P_6 = 1$.

Les sections de la variété W *par des espaces linéaires à huit dimensions sont des surfaces de genres* $p_a = p_g = 0, P_6 = 1$.

3. A une hyperquadrique Q de S_5 n'appartenant pas à un des systèmes $| Q_1 |, | Q_2 |$ correspond sur la variété W une variété à quatre dimensions que nous désignerons par Q′, Ces variétés Q′ appartiennent à un système linéaire $| Q' |$. Faisons varier l'hyperquadrique Q dans S_5 d'une manière continue en la faisant tendre vers une hyperquadrique $| Q_1 |$. La quadrique homologue Q′ varie d'une manière continue et tend vers une variété $2Q'_1$ découpée par un hyperplan compté deux fois. On en conclut que les variétés Q′ sont découpées sur W par des

hyperquadriques de S_{11}. On peut d'ailleurs le vérifier aisément. En élevant au carré les deux membres de l'équation d'une hyperquadrique Q et en les ajoutant aux carrés des deux membres de la transformée de Q par H,

$$\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0, \qquad (i,k = 0,1,...,5)$$

on obtient une équation de la forme

$$\Sigma a_{ik} a_{jh} X_{ij} X_{kh} = 0$$

qui s'exprime en fonction des coordonnées de S_{11}.

Faisons maintenant varier d'une manière continue l'hyperquadrique Q en la faisant tendre vers une hyperquadrique Q_2. La variété Q' varie d'une manière continue et tend vers une variété Q'_2 comptée deux fois. Il en résulte que le long d'une variété Q'_2, il y a une hyperquadrique qui touche la variété W en tout point d'intersection. Il est à noter que les hyperquadriques homologues des hyperquadriques Q_2 passent par les surfaces Φ_1 et Φ_2.

4. Considérons dans S_5 la surface F_0 intersection de deux hyperquadriques Q_1 et d'une hyperquadrique Q_2. C'est une surface de genre un ($p_a = P_4 = 1$) sur laquelle l'homographie H détermine une involution possédant huit points unis, quatre dans chacun des plans σ_1, σ_2. On sait que la surface F'_0 image de cette involution sur W est une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$). On le vérifie aisément.

Les sections de la surface F_0 par les hyperquadriques Q_1 sont des courbes C_0 d'ordre 16 et de genre 17, sur lesquelle les groupes de I forment une involution privée de points unis. Il correspond à ces courbes sur F'_0 des courbes C'_0 de genre neuf. Les autres courbes C'_0 découpent sur une d'entre elles la série canonique complète. Il en résulte que les courbes canoniques et pluricanoniques de la surface F'_0 sont d'ordre zéro.

5. Considérons l'intersection V de deux hyperquadriques Q_1. L'homographie H détermine sur V une involution présentant huit points unis, quatre dans chacun des plans σ_1, σ_2. Cette involution est représentée dans la variété W par une variété V' à trois dimensions, section de W par un espace S_9 à neuf dimensions. Les sections hyperplanes de la variété V' sont des surfaces F' de bigenre un ($p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$).

Sur la variété V, il existe ∞^9 surfaces F_0 de genres $p_a = P_4 = 1$, découpées par les ∞^9 hyperquadriques Q_1 ne passant pas par V. Il leur correspond, sur la variété V', des surfaces de genres un ($p_a = P_4 = 1$), F'_0. Ces surfaces sont en nombre ∞^9 et forment un système linéaire $| F'_0 |$.

Le long de la variété Q'_2 il existe une hyperquadrique de S_{11} touchant la variété W en tout point d'intersection. La section de cette hyperquadrique par S_9 est une hyperquadrique de cet espace touchant la variété V' le long d'une surface F'_0. De plus, l'espace S_9 coupe chacune des surfaces Φ_1, Φ_2 en quatre points, qui sont quadruples pour la variété V' et qui sont les points de diramation.

La variété V'*, section de la variété* W *par un espace* S_9 *à neuf dimensions a comme sections hyperplanes des surfaces de genres* $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$ *et possède huit points quadruples. Elle contient un système linéaire de dimension neuf de surfaces de genrs* $p_a = P_4 = 1$, *le long de chacune desquelles il y a une hyperquadrique passant par les points quadruples et touchant la variété* V' *en tout point d'intersection.*

C'est bien là la variété rencontrée par C. Fano dans le cas $p = 9$.

Ajoutons que le cône tangent en un point de diramation, appartenant pour fixer les idées à Φ_1, projette de ce point la surface Φ_2 et est donc rationnel. Un point de diramation de V' est équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à une surface rationnelle. Si nous désignons par $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ les surfaces rationnelles équivalentes aux points de diramation de V' situés sur Φ_1 et par $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$, celles qui sont équivalentes aux points de diramation situés sur Φ_2 nous avons la relation fonctionnelle

$$2F' \equiv 2F'_0 + \Sigma\varphi_i + \Sigma\psi_i.$$

6. Parmi les hyperquadriques Q_2 se trouvent celles qui sont dégénérées en un hyperplan ξ_1 passant par σ_1 et en un hyperplan ξ_2 passant par σ_2.

Un hyperplan ξ_1 coupe σ_2 suivant une droite à laquelle correspond une conique γ_2 de Φ_2. Aux couples de l'involution appartenant à ξ_1 correspondent sur W le lieu W_1 des droites s'appuyant sur Φ_1 et sur la conique γ_2, c'est-à-dire une variété à quatre dimensions W_1 passant deux fois par la surface Φ_1, et quatre fois par la conique γ_2. La variété W_1 est située dans un hyperplan ξ'_1 passant par Σ_1.

De même à une hyperplan ξ_2 passant par σ_2 correspond sur W une variété W_2 située dans un hyperplan ξ'_2 passant par Σ_2.

L'ensemble des hyperplans ξ'_1 et ξ'_2 constitue une hyperquadrique Q'_2, qui touche W en chaque point d'intersection. On en conclut que l'hyperplan ξ'_1 touche W le long de W_1 et que de même l'hyperplan ξ'_2 touche W le long de W_2.

Si nous retournons à la variété V', les sections des variétés W_1, W_2 sont des surfaces dont la somme est une surface F'_0.

7. Soit ρ_1 un plan de S_5 qui ne rencontre aucun des axes σ_1, σ_2 de H. Cette homographie lui fait correspondre un plan ρ_2 qui ne rencontre pas ρ_1. En effet, si ρ_1 et ρ_2 se rencontraient en un point P, H ferait correspondre à P un point P' appartenant aux deux plans et la droite PP' serait unie pour H et rencontrerait σ_1 et σ_2, contrairement à l'hypothèse.

Des ∞^1 hyperquadriques Q_1, ∞^6 contiennent le plan ρ_1 et les autres découpent sur ce plan les ∞^5 coniques et sur le plan ρ_2, les ∞^5 coniques. A ces hyperquadriques correspondent dans $S_{11} \infty^5$ hyperplans coupant W suivant une surface de Veronese R'.

On voit donc que la variété W contient ∞^6 surfaces de Veronese (dont quelques-unes sont dégénérées).

On sait qu'une hyperquadrique Q de S_5 contient deux systèmes de dimension trois, $\{\rho_1\}$, $\{\rho_2\}$ de plans tels que:

Deux plans ρ_1 (ou ρ_2) se rencontrent en un point.

Par un point de Q passent ∞^1 plans ρ_1 et ∞^1 plans ρ_2.

Deux plans ρ_1, ρ_2 ne se rencontrent pas en général, mais s'ils se rencontrent, c'est suivant une droite [1].

8. Considérons une hyperquadrique Q_1 et un plan ρ_1 de cette hyperquadrique qui rencontre le plan ρ_2 que H lui fait correspondre suivant une droite. Celle-ci, *r*, est unie pour H et s'appuie donc sur σ_1 et σ_2.

---

[1] Voir BERTINI, *Introduzione alla Geometria proiettiva degli iperspazi* (Pisa, Spoerri, 1907). Voir page 132.

Si l'on considère une hyperquadrique de S_5 comme représentant les droites de l'espace à trois dimensions suivant la méthode de Klein, les plans ρ_1 représentent les gerbes de droites et les plans ρ_2 les plans réglés.

Les plans ρ_1, ρ_2 appartiennent à un espace à trois dimensions S_3 qui est transformé en soi par H et qui rencontre donc σ_1 suivant une droite r_1 et le plan σ_2 suivant une droite r_2. A ces droites correspondent sur Φ_1 une conique ρ'_1 et sur Φ_2 une conique ρ'_2. A l'espace S_3 correspond sur W le lieu des droites s'appuyant sur les coniques ρ'_1 et ρ'_2. C'est une variété du quatrième ordre R à trois dimensions qui est coupée par l'hyperplan de S_{11} homologue de Q_1 suivant une surface R_0, d'ordre quatre, représentant le couple de plans ρ'_1, ρ'_2. Il est clair que la droite de W qui correspond à r appartient à cette surface.

Une hyperquadrique Q_1 coupe σ_1 suivant une conique γ'_1 et σ_2 suivant une conique γ'_2. Les droites s'appuyant sur ces deux coniques sont unies pour H et appartiennent à Q_1. Par chacune de ces droites passe un plan ρ_1 dont le transformé ρ_2 passe par la même droite. Ces plans appartiennent à Q_1 et on a donc sur une section hyperplane de W ∞^2 surfaces R_0.

A un plan ρ_1 rencontrant en un point la conique γ_1, H fait correspondre un plan ρ_2 passant par le même point. A ces deux plans correspond sur la section hyperplane de W homologue de Q_1, une surface de Veronese.

9. Une droite du plan σ_1 et une droite du plan σ_2 déterminent un espace S_3 à trois dimensions qui appartient à ∞^7 hyperquadriques Q_2. A cet espace S_3 correspond dans W une variété à trois dimensions R, du quatrième ordre. Il y a donc ∞^7 hyperquadriques Q'_2 de S_{11} passant par une surface R.

Liège, le 18 mars 1974.