Sur une configuration formée par deux suites de Laplace,

par Lucien GODEAUX, Correspondant de l'Académie.

Nos recherches sur les surfaces ayant mêmes quadriques de Lie nous ont conduit à deux suites de Laplace dont l'une est doublement inscrite dans l'autre ([1]). D'une manière précise, considérons deux suites de Laplace

$$\ldots, p_i, \ldots, p_1, p, q, q_1, \ldots, q_i, \ldots,$$
$$\ldots, m_i, \ldots, m_1, m, n, n_1, \ldots, n_i, \ldots$$

dans lesquelles chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u.

Le point m_i est l'intersection des droites $p_{i-1}\, p_{i-2}$ et $p_{i+1}\, p_{i+2}$ et le point n_i, celui des droites $q_{i-1}\, q_{i-2}$ et $q_{i+1}\, q_{i+2}$. La droite $p_i\, p_{i+1}$ contient donc les points m_{i-1}, m_{i+2} et la droite $q_i\, q_{i+1}$ les points n_{i-1}, n_{i+2}.

Dans cette note, nous nous proposons d'indiquer une configuration analogue, formée par deux suites de Laplace de l'espace à cinq dimensions. Tout plan déterminé par trois points consécutifs de la première suite contient deux points de la seconde.

1. Soit (x) une surface non réglée, rapportée à ses asymptotiques u, v. Les coordonnées projectives homogènes x_1, x_2, x_3, x_4 d'un point x de la surface (x) satisfont au système d'équations aux dérivées partielles complètement intégrable

$$x^{20} + 2bx^{01} + c_1 x = 0, \qquad x^{02} + 2ax^{10} + c_2 x = 0, \tag{1}$$

où a, b, c_1, c_2 sont des fonctions de u, v, différentiables

([1]) Sur les surfaces ayant mêmes quadriques de Lie. (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1928, pp. 158-186, 345-348.)

autant de fois qu'il est nécessaire, les deux premières de ces fonctions n'étant pas identiquement nulles [1].

Désignons par Q une hyperquadrique de l'espace linéaire S_5 à cinq dimensions représentant l'espace réglé. Soient U, V les points de Q qui représentent les tangentes xx^{10}, xx^{01} aux asymptotiques u, v au point x de la surface (x). On sait que U, V sont les transformés de Laplace l'un de l'autre (Tzitzeica, Bompiani).

Les coordonnées radiales

$$U = | x \quad x^{10} |, \qquad V = | x \quad x^{01}$$

des points U, V satisfont aux équations

$$U^{10} + 2bV = 0, \qquad V^{01} + 2aU = 0.$$

Soient U_1, U_2, U_3, ... les transformés successifs de Laplace de U dans le sens des v, V_1, V_2, V_3, ... ceux de V dans le sens des u. On a

$$U_n^{01} = U_{n+1} + U_n (\log b h_1 \dots h_n)^{01}, \qquad U_n^{10} = h_n U_{n-1},$$
$$U_n^{11} - U_n^{10} (\log b h_1 \dots h_n)^{01} - h_n U_n = 0,$$

où l'on a posé

$$h_n = -(\log b h_1 \dots h_{n-1})^{11} + h_{n-1}.$$

On a de même

$$V_n^{10} = V_{n+1} + V_n (\log a k_1 \dots k_n)^{10}, \qquad V_n^{01} = k_n V_{n-1},$$
$$V_n^{11} - V_n^{01} (\log a k_1 \dots k_n)^{10} - k_n V_n = 0,$$

moyennant

$$k_n = -(\log a k_1 \dots k_{n-1})^{11} + k_{n-1}.$$

La suite de Laplace L,

$$\dots, U_n, \dots, U_1, U, V, V_1, \dots, V_n, \dots \tag{L}$$

est autopolaire par rapport à l'hyperquadrique Q. Le point U_n a pour hyperplan polaire par rapport à Q l'hyperplan $V_{n-2}\, V_{n-1}\, V_n\, V_{n+1}\, V_{n+2}$, le point V_n l'hyperplan $U_{n-2}\, U_{n-1}\, U_n\, U_{n+1}\, U_{n+2}$. En particulier, les points U_1, U, V, V_1 ont respec-

(1) Pour les notations et la bibliographie des questions envisagées ici, voir notre exposé : *La théorie des surfaces et l'espace réglé* (Paris, Hermann, 1934).

tivement pour hyperplans polaires $UVV_1V_2V_3$, $U_1UVV_1V_2$, $U_2U_1UVV_1$, $U_3U_2U_1UV$.

Les sections de Q par les plans conjugués $U_n\,U_{n+1}\,U_{n+2}$, $V_n\,V_{n+1}\,V_{n+2}$ représentent les systèmes de génératrices des deux modes d'une quadrique Φ_n. On obtient ainsi une suite de quadriques Φ, Φ_1, Φ_2, ... dont la première, qui correspond aux plans UU_1U_2, VV_1V_2, est la quadrique de Lie attachée à la surface (x) au point x. Deux quadriques consécutives de la suite se touchent en quatre points qui sont des points caractéristiques de ces quadriques. Les faisceaux des tangentes aux quatre points de contact des quadriques Φ_{n-1}, Φ_n sont représentés sur Q par les droites joignant les points de rencontre de Q avec la droite $U_n\,U_{n+1}$, aux points de rencontre de Q avec la droite $V_n\,V_{n+1}$.

2. Désignons par C_1, C_2 les points de rencontre de la droite V_1V_2 avec Q, par D_1, D_2 ceux de la droite U_1U_2 avec Q. Les faisceaux des tangentes à la quadrique de Lie Φ aux points caractéristiques de cette quadrique distincts du point x sont représentés sur Q par les droites C_1D_1, C_1D_2, C_2D_1, C_2D_2.

Nous avons établi que la condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait conservation des asymptotiques sur les différentes nappes de l'enveloppe de la quadrique de Lie Φ est que l'un des points C_1, C_2, D_1, D_2 et par suite les autres, engendre un réseau conjugué à la congruence (V_1V_2) ou à la congruence (U_1U_2).

Analytiquement, cette condition se traduit de la manière suivante : Posons

$$\alpha = 2(\log a)^{20} + \overline{(\log a)^{10}}^2 + 4(b^{01} + c_1),$$

$$\beta = 2(\log b)^{02} + \overline{(\log b)^{01}}^2 + 4(a^{10} + c_2).$$

On a

$$a\alpha^{10} + 2\alpha a^{10} = b\beta^{01} + 2\beta b^{01},$$

relation qui se déduit des conditions d'intégrabilité du système (1).

Pour que les asymptotiques des différentes nappes de l'enveloppe de la quadrique de Lie soient les courbes u, v, il faut et il suffit que les deux membres de cette relation soient nuls, c'est-à-dire que l'on ait

$$(\log a^2\alpha)^{10} = 0, \qquad (\log b^2\beta)^{01} = 0. \tag{2}$$

Nous avons établi que dans ces conditions, les droites $C_1C_1^{01}$, $C_2C_2^{01}$, $D_1D_1^{01}$, $D_2D_2^{01}$ concourent en un même point

$$A = 2a\,[\alpha V + V_1 (\log a k_1)^{10} + V_2]$$

et que les droites $D_1D_1^{10}$, $D_2D_2^{10}$, $C_1C_1^{10}$, $C_2C_2^{10}$ concourent également en un même point

$$B = 2b\,[\beta U + U_1 (\log b h_1)^{01} + U_2].$$

Les points A, B se correspondent dans une transformation de Laplace. On a précisément

$$A^{10} + 2aB = 0, \qquad B^{01} + 2bA = 0.$$

Nous avons établi la relation

$$U_3 + U_2 (\log b^3 h_1^2 h_2)^{01} + \beta_1 U_1 + \frac{1}{2}\,\beta U\,(\log b^2\beta)^{01}$$
$$+ 2a\,[\alpha V + V_1 (\log a k_1)^{10} + V_2] = 0,$$

où l'on a posé

$$\beta_1 = \beta + (\log b h_1)^{02} + (\log b h_1)^{01} (\log b^2 h_1)^{01}.$$

Sous la condition (**2**), cette relation se simplifie. Tout d'abord, le terme en U disparaît. Observons ensuite que, d'après les conditions d'intégrabilité du système (**1**), on a

$$\beta^{10} = -\,2h_1 (\log b h_1)^{01}.$$

D'autre part, d'après (**2**), on a

$$\beta^{01} = -\,2\beta\,(\log b)^{01}.$$

En exprimant la condition d'intégrabilité, on déduit

$$h_1\beta_1 = 4ab\beta.$$

Par suite, on a

$$A = -\left[U_3 + U_2(\log b^3 h_1^2 h_2)^{01} + \frac{4ab\beta}{h_1} U_1\right].$$

Le point A est l'intersection des plans VV_1V_2, $U_1U_2U_3$, qui appartiennent à un même hyperplan.

En utilisant de même les relations

$$\alpha^{01} = -2k_1(\log ak_1)^{10}, \qquad \alpha^{10} = -2\alpha(\log a)^{10},$$

on obtient de même

$$B = -\left[V_3 + V_2(\log a^3 k_1^2 k_2)^{10} + \frac{4ab\alpha}{k_1} V_1\right]$$

et le point B est l'intersection des plans UU_1U_2, $V_1V_2V_3$.

3. Désignons par A_1, A_2, A_2, ... les transformés successifs de Laplace du point A dans le sens des v; nous avons

$$A_n^{01} = A_{n+1} + A_n(\log ak_1 \ldots k_n)^{01}, \qquad A_n^{10} = k_n A_{n-1},$$
$$A_n^{11} - A_n^{10}(\log ak_1 \ldots k_n)^{01} - k_n A_n = 0.$$

Désignons par B_1, B_2, B_3, ... les transformés successifs de Laplace de B dans le sens des u. On a

$$B_n^{10} = B_{n+1} + B_n(\log bh_1 \ldots h_n)^{10}, \qquad B_n^{01} = h_n B_{n-1},$$
$$B_n^{11} - B_n^{01}(\log bh_1 \ldots h_n)^{10} - h_n B_n = 0.$$

Nous allons rechercher les expressions de A_n, B_n en fonction des points de la suite de Laplace

$$\ldots, U_n, \ldots, U_1, U, V, V_1, \ldots, V_n, \ldots \tag{L}$$

et les liaisons de cette suite avec la suite (M),

$$\ldots, A_n, \ldots, A_1, A, B, B_1, \ldots, B_n, \ldots \tag{M}$$

Auparavant, nous établirons quelques formules.

4. Posons, pour abréger l'écriture,

$$K_n = a^{n+1} k_1^n k_2^{n-1} \ldots k_n, \qquad H_n = b^{n+1} h_1^n h_2^{n-1} \ldots h_n,$$
$$K'_n = ak_1k_2 \ldots k_n, \qquad H'_n = bh_1h_2 \ldots h_n.$$

Posons ensuite $\alpha_0 = \alpha$ et, pour $n > 1$,

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} + \left(\log \frac{K_n}{H_{n-3}}\right)^{20} + \left(\log \frac{K_n}{H_{n-3}}\right)^{10} \left(\log \frac{K'_n}{H'_{n-2}}\right)^{10},$$

en convenant d'écrire $H_{-1} = 1$.

Nous avons trouvé plus haut

$$k_1 \alpha_1 = 4ab\alpha.$$

On en déduit

$$\alpha_1^{10} = \alpha_1 \left(\log \frac{b}{K'_1}\right).$$

D'autre part, de l'expression donnée comme définition de α_1, on déduit

$$\alpha_1^{01} = -k_2 (\log K_2)^{10} + 4ab (\log K'_1)^{10}.$$

En exprimant la condition d'intégrabilité, on trouve

$$\alpha_2 = \frac{h_1}{k_2} \alpha_1 = 4a^2\alpha \frac{H'_1}{K'_2}.$$

Supposons que l'on ait, d'une manière générale,

$$\alpha_n = 4a^2\alpha \frac{H'_{n-1}}{K'_n}, \tag{3}$$

pour une valeur de n et pour les valeurs inférieures.

On en déduit

$$\alpha_n^{10} = \alpha_n \left(\log \frac{H'_{n-1}}{K'_n}\right)^{10}.$$

D'autre part, on a

$$\alpha_n^{01} = \alpha_{n-1}^{01} + h_{n-1} \left(\log \frac{K_n}{H_{n-3}}\right)^{10} - k_{n+1} \left(\log \frac{K_{n+1}}{H_{n-2}}\right)^{10}$$
$$- h_{n-2} \left(\log \frac{K_{n-1}}{H_{n-4}}\right)^{10} + k_n \left(\log \frac{K_n}{H_{n-3}}\right)^{10}.$$

On en conclut

$$\alpha_n^{01} = h_{n-1} \left(\log \frac{K_n}{H_{n-3}}\right)^{10} - k_{n+1} \left(\log \frac{K_{n+1}}{H_{n-2}}\right)^{10}.$$

En exprimant les conditions d'intégrabilité, on trouve

$$\alpha_{n+1} = \frac{h_n}{k_{n+1}} \alpha_n = 4a^2\alpha \frac{H'_n}{K'_{n+1}}.$$

La relation (3) est donc vraie en général.

En posant de même $\beta_0 = \beta$ et, pour $n > 1$,

$$\beta_n = \beta_{n-1} + \left(\log \frac{H_n}{K_{n-3}}\right)^{02} + \left(\log \frac{H_n}{K_{n-3}}\right)^{01} \left(\log \frac{H'_n}{K'_{n-2}}\right)^{01},$$

avec $K_{-1} = 1$, on trouve

$$\beta_n = 4b^2\beta \frac{K'_{n-1}}{H'_n}, \tag{4}$$

$$\beta_n^{10} = k_{n-1} \left(\log \frac{H_n}{K_{n-3}}\right)^{01} - h_{n+1} \left(\log \frac{H_{n+1}}{K_{n-2}}\right)^{01}.$$

5. Dans un travail antérieur (1), nous avons établi la relation

$$V_{n+3} + V_{n+2}\left(\log \frac{K_{n+2}}{H_{n-1}}\right)^{10} + \alpha_{n+1} V_{n+1} + \gamma_n V_n$$
$$- \frac{H'_n}{K'_{n-1}} \left[\beta_n V_{n-1} - k_{n-1} V_{n-2} \left(\log \frac{H_n}{K_{n-3}}\right)^{01} + k_{n-2} k_{n-1} V_{n-3}\right] = 0,$$

où γ_n est donné par la formule

$$(h_{n+1} - k_{n+1})\gamma_n = k_{n+1}\left[\alpha_{n+1}^{10} + \alpha_{n+1}\left(\log \frac{K'_{n+1}}{H'_n}\right)^{10}\right]$$
$$- \frac{H'_{n+1}}{K'_n}\left[\beta_{n+1}^{01} + \beta_{n+1}\left(\log \frac{H'_{n+1}}{K'_n}\right)^{01}\right].$$

D'après les relations (3) et (4), γ_n est nul tout au moins lorsque h_{n+1} et k_{n+1} sont distincts. On peut voir aisément que γ_n est nul dans tous les cas.

Le point B est l'intersection des plans $V_1V_2V_3$ et UU_1U_2; le point B_1, transformé de Laplace de B dans le sens des u, est par conséquent l'intersection des plans $V_2V_3V_4$ et VUU_1; ...; le point B_n est l'intersection des plans $V_{n+1}\ V_{n+2}$

(1) Sur la suite de Laplace de l'espace réglé associée à une surface. (*Bull. de la Soc. roy. des Sciences de Liége*, 1934, pp. 64-67.)

V_{n+3} et $V_{n-3}\,V_{n-2}\,V_{n-1}$. On en conclut que ces plans appartiennent à un même hyperplan et que par suite $\gamma_n=0$.

On doit avoir, d'après ce qui précède,

$$B_n = \lambda\left[V_{n+3} + V_{n+2}\left(\log\frac{K_{n+2}}{H_{n-1}}\right)^{10} + \alpha_{n+1}V_{n-1}\right].$$

On a

$$B_n^{01} = h_n B_{n-1}$$

et, en remplaçant B_n par sa valeur, on en déduit

$$B_{n-1} = \lambda\left[V_{n+2} + V_{n+1}\left(\log\frac{K_{n+1}}{H_{n-2}}\right)^{10} + \alpha_n V_n\right].$$

On en déduit de plus que λ ne peut dépendre de u.

En continuant de la sorte, on arrive à

$$B = \lambda[V_3 + V_2(\log K_2)^{10} + \alpha_1 V_1],$$

d'où $\lambda=-1$. On a donc, en tenant compte des relations (3) et (4),

$$B_n = -\left[V_{n+3} + V_{n+2}\left(\log\frac{K_{n+2}}{H_{n-1}}\right)^{10} + 4a^2\alpha\,\frac{H'_n}{K'_{n+1}}\,V_{n+1}\right]$$

et

$$B_n = -4b^2\beta\,V_{n-1} + \frac{H'_n}{K'_{n-2}}\,V_{n-2}\left(\log\frac{H_n}{K_{n-3}}\right)^{01} - \frac{H'_n}{K'_{n-3}}\,V_{n-3}.$$

On obtient de même

$$A_n = -\left[U_{n+3} + U_{n+2}\left(\log\frac{H_{n+2}}{K_{n-1}}\right)^{01} + 4b^2\beta\,\frac{K'_n}{H'_{n+1}}\,U_{n+1}\right]$$

et

$$A_n = -4a^2\alpha\,U_{n-1} + \frac{K'_n}{H'_{n-2}}\,U_{n-2}\left(\log\frac{K_n}{H_{n-3}}\right)^{10} - \frac{K'_n}{H'_{n-3}}\,U_{n-3}.$$

Pour $n=1, 2$, on a

$$B_1 = -4b^2\beta V - 2bh_1(\log bh_1)^{01}U + 2bh_1U_1,$$

$$B_2 = -4b^2\beta V_1 - \frac{H'_2}{a}(\log H_2)^{01}V + 2H'_2U,$$

$$A_1 = -4a^2\alpha U - 2ak_1(\log ak_1)^{10}V + 2ak_1V_1,$$

$$A_2 = -4a^2\alpha U_1 - \frac{K'_2}{b}(\log K_2)^{10}U + 2K'_2V.$$

6. Observons que l'on a

$$B_{n+4} = -4b^2\beta V_{n+3} + \frac{H'_{n+4}}{K'_{n+2}} V_{n+2}\left(\log \frac{H_{n+4}}{K_{n+1}}\right)^{01} - \frac{H'_{n+4}}{K'_{n+1}} V_{n+1}$$

et

$$A_{n+4} = -4a^2\alpha U_{n+3} + \frac{K'_{n+4}}{H'_{n+2}} U_{n+2}\left(\log \frac{K_{n+4}}{H_{n+1}}\right)^{10} - \frac{K'_{n+4}}{H'_{n+1}} U_{n+1}.$$

Par conséquent, le plan $V_{n+1}\ V_{n+2}\ V_{n+3}$ contient les points B_n, B_{n+4} de la suite (M), et le plan $U_{n+1}\ U_{n+2}\ U_{n+3}$ les points A_n, A_{n+4} de cette suite.

En particulier, le plan VV_1V_2 contient les points A et B_3; le plan UVV_1 les points A_1 et B_2; le plan U_1UV, les points A_2 et B_1; enfin le plan U_2U_1U contient les points A_3 et B. *Chaque plan déterminé par trois points consécutifs de la série* (L) *contient deux points de la série* (M); *entre ces deux points se trouvent trois points consécutifs de cette série.*

Comme nous l'avons remarqué, les plans $V_{n+1}\ V_{n+2}\ V_{n+3}$ et $V_{n-1}\ V_{n-2}\ V_{n-3}$ appartiennent à un même hyperplan et se rencontrent au point B_n. Les plans conjugués des précédents par rapport à Q sont les plans $U_{n+1}\ U_{n+2}\ U_{n+3}$ et $U_{n-1}\ U_{n-2}\ U_{n-3}$. Ces plans se rencontrent au point A_n, donc ce point a pour hyperplan polaire par rapport à Q l'hyperplan $V_{n-3}\ V_{n-2}\ V_{n-1}\ V_{n+1}\ V_{n+2}\ V_{n+3}$. De même, le point B_n a pour hyperplan polaire par rapport à Q l'hyperplan $U_{n-3}\ U_{n-2}\ U_{n-1}\ U_{n+1}\ U_{n+2}\ U_{n+3}$.

En particulier, le point A est le pôle de l'hyperplan $U_2U_1UV_1V_2V_3$ et le point B, celui de l'hyperplan $V_2V_1VU_1U_2U_3$.

Si l'on prend sept points consécutifs de la série (L), *les trois premiers et les trois derniers appartiennent à un même hyperplan dont le pôle par rapport à* Q *est un point de la suite* (M).

Cette propriété est réciproque. Considérons en effet l'hyperplan $U_{n-2}\ U_{n-1}\ U_n\ U_{n+1}\ U_{n+2}$, qui a pour pôle par rapport à Q le point V_n. Le plan $U_{n-2}\ U_{n-1}\ U_n$ contient les points A_{n-3} et A_{n+1}; le plan $U_{n-1}\,U_n\,U_{n+1}$ les points A_{n-2} et A_{n+2}; le plan $U_n\,U_{n+1}\,U_{n+2}$ les points A_{n-1} et A_{n-3}. Par conséquent, l'hyperplan polaire de V_n par rapport à Q contient les points A_{n-3}, A_{n-2}, A_{n-1}, A_{n+1} A_{n+2}, A_{n+3}.

Si l'on prend sept points consécutifs de la série (M), *les trois premiers et les trois derniers appartiennent à un même hyperplan dont le pôle par rapport à* Q *est un point de la suite* (L).

En particulier, l'hyperplan $B_2B_1BA_1A_2A_3$ a pour pôle V et l'hyperplan $B_3B_2B_1AA_1A_2$ a pour pôle le point U.

Liége, le 16 mars 1938.