EXTRAIT DU *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liège.*
Séance du 21 mai 1942. — N° 5.

Sur la représentation des transformations birationnelles planes,

par L. GODEAUX, Membre de la Société.

On sait que la surface section de la variété de Segre V_4^6 de S_8, représentant les couples de points de deux plans σ, σ', par un espace S_6, représente les couples de points des plans σ, σ' homologues dans une transformation quadratique. Les sections hyperplanes de cette surface représentent les cubiques planes de l'un des plans σ, σ', passant par les points fondamentaux de la transformation. A ceux-ci correspondent sur la surface six droites. On peut se proposer d'étendre la représentation précédente à une transformation birationnelle plane quelconque; c'est l'objet de cette note. Nous ne parviendrons pas à des propriétés nouvelles des transformations birationnelles planes, mais à une représentation qui montre le rôle symétrique des points et des courbes fondamentaux. L'extension aux transformations birationnelles de l'espace pourra peut être rendre quelques services.

1. Soit T une transformation birationnelle entre deux plans σ, σ'. Aux droites g' de σ, T fait correspondre des courbes γ d'ordre n de σ et aux droites g de σ, des courbes γ' d'ordre n de σ'. Considérons, dans le plan σ, le système linéaire complet

$$|\Gamma| = |g + \gamma|.$$

Il a le degré $2n + 2$ et le genre $n - 1$. La série caractéristique d'une courbe Γ a l'ordre $2n + 2$ et est donc non spéciale; elle a la dimension $n + 3$ et par suite $|\Gamma|$ a la dimension $n + 4$.

Rapportons projectivement les courbes Γ aux hyperplans d'un espace S_{n+4} à $n + 4$ dimensions. Aux points de σ correspondent les points d'une surface F d'ordre $2n + 2$, à sections hyperplanes C de genre $n - 1$.

Aux droites g de σ corrrespondent sur F des courbes rationnelles C_1, d'ordre $n + 1$, formant un réseau homaloïdal $|C_1|$. Aux courbes γ correspondent des courbes rationnelles C_2, d'ordre $n+1$, formant un réseau homaloïdal $|C_2|$. On a évidemment

$$|C| = |C_1 + C_2|$$

et les hyperplans, passant par une courbe C_1 ou par une courbe C_2, doivent être en nombre ∞^2. On en conclut que les courbes C_1 et C_2 appartiennent à des espaces linéaires à $n+1$ dimensions et sont donc normales.

Une courbe C_1 et une courbe C_2 se rencontrent en n points.

2. Soit O un point fondamental de la transformation T, dans le plan σ, multiple d'ordre s pour les courbes γ. Ce point est également multiple d'ordre s pour les courbes Γ. Nous supposerons que O est multiple ordinaire pour les courbes γ. Alors, aux points infiniment voisins de O correspondent sur F les points d'une courbe rationnelle G, d'ordre s. La courbe G rencontre en s points les courbes C_2, mais est fondamentale pour le réseau $|C_1|$.

Soit maintenant Ω une courbe fondamentale d'ordre s' de T dans le plan σ. Aux points de cette courbe correspondent sur F les points d'une courbe rationnelle G', d'ordre s'. La courbe G' rencontre les courbes C_1 en s' points, mais est fondamentale pour le réseau $|C_2|$.

Supposons que dans le plan σ la transformation T possède ν points fondamentaux et ν' courbes fondamentales. Soient $s_1, s_2, \dots s_\nu$ les multiplicités des points fondamentaux pour les courbes γ et s'_1, $s'_2, \dots, s'_{\nu'}$ les ordres des courbes fondamentales. Sur la surface F, on a en correspondance ν courbes rationnelles $G_1, G_2, \dots, G_\nu$, d'ordres $s_1, s_2, \dots, s_\nu$, ne se rencontrant pas deux-à-deux, et ν' courbes rationnelles $G'_1, G'_2, \dots, G'_{\nu'}$ d'ordres $s'_1, s'_2, \dots, s'_{\nu'}$.

3. Considérons maintenant, dans le plan σ', le système

$$|\Gamma'| = |g' + \gamma'|.$$

En opérant sur ce système comme on a opéré sur $|\Gamma|$, on obtient une surface F'. La transformation T échange entre eux les systèmes $|\Gamma|$ et $|\Gamma'|$; donc les surfaces F, F' sont projectivement identiques et l'on peut supposer qu'elles coïncident. Les courbes C_1 correspondent aux courbes γ' et les courbes C_2 aux droites g' de σ'.

Les courbes $G'_1, G'_2, \dots, G'_{\nu'}$ correspondent aux points fondamentaux de T dans σ' et par conséquent ne se rencontrent pas deux-à-deux.

Soit α_{ik} le nombre de points communs aux courbes G_i, G'_k. La courbe fondamentale de T dans σ, homologue de G'_k, a la multiplicité α_{ik} au point fondamental homologue de G_i. La courbe fondamentale de T dans σ', homologue de G_i, a la multiplicité α_{ik} au point fondamental homologue de G'_k.

4. Aux courbes $C - G_1'$ correspondent dans le plan σ les courbes du système linéaire complet $|g + \gamma - \Omega_1|$, Ω_1 étant la courbe fondamentale homologue de G_1' dans σ. Ce système a le degré $2(n - s_1') + 1$, le genre $n - s_1' - 1$ et sa série caractéristique est non spéciale. On en déduit que sa dimension est égale à $n - s_1' + 3$. Par conséquent, les hyperplans de S_{n+1} assujettis à contenir Γ_1 satisfont à $s_1' + 1$ conditions; donc l'espace linéaire minimum contenant G_1' a s_1' dimensions. La courbe G_1' est par suite normale.

Les courbes $G_1, G_2, \ldots, G_\nu, G_1', G_2', \ldots, G_{\nu'}'$ sont normales.

De ceci résulte qu'aux hyperplans de S_{n+1} contenant la courbe G_1 correspondent des courbes Γ ayant la multiplicité $s_1 + 1$ au point fondamental O_1 de σ homologue de G_1. On en conclut que les courbes $G_1, G_2, \ldots, G_\nu, G_1', G_2', \ldots, G_{\nu'}'$ ont le degré -1.

5. Désignons par $|C_j|$ le système jacobien de $|C|$, par C_{1j} la jacobienne de $|C_1|$ et par C_{2j} celle de $|C_2|$. On a les relations fonctionnelles

$$|C_j + 3C_1| = |C_{1j} + 3C|, \quad |C_j + 3C_2| = |C_{2j} + 3C|, \quad |C_{1j} + 3C_2| = |C_{2j} + 3C_1|.$$

D'autre part, on a

$$C_{1j} \equiv G_1 + G_2 + \ldots + G_{\nu'}$$
$$C_{2j} \equiv G_1' + G_2' + \ldots + G_{\nu'}'.$$

Des deux premières relations on déduit que les courbes C_j rencontrent les courbes C_1, C_2 chacune en $3n$ points. Ces relations donnent alors, en considérant celles que l'on en déduit sur C_2 et sur C_1,

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_\nu = 3(n-1),$$
$$s_1' + s_2' + \ldots + s_{\nu'}' = 3(n-1).$$

La troisième relation donne, sur G_i et sur G_k',

$$\alpha_{i1} + \alpha_{i2} + \ldots + \alpha_{i\nu'} = 3s_i - 1,$$
$$\alpha_{ik} + \alpha_{2k} + \ldots + \alpha_{\nu k} = 3s_k - 1.$$

On en déduit, suivant le procédé habituel, $\nu' = \nu$.

6. Les courbes $C_1, G_1, G_2, \ldots, G_\nu$ sont linéairement indépendantes, car le déterminant formé au moyen des nombres des points d'intersection de ces courbes prises deux-à-deux et de leurs degrés est

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & -1 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{\nu}.$$

Par contre, chacune des courbes C_2, G_1', G_2', ..., G_ν' dépend des courbes précédentes. Un calcul simple montre que l'on a

$$\left.\begin{array}{l} C_2 \equiv n\, C_1 - s_1\, G_1 \;- s_2\, G_2 \;- \dots - s_\nu\, G_\nu, \\ G_1' \equiv s_1'\, C_1 - \alpha_{11} G_1 \;- \alpha_{21} G_2 \;- \dots - \alpha_{\nu 1} G_\nu, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ G_\nu' \equiv s_\nu'\, C_1 - \alpha_{1\nu}\, G_1 - \alpha_{2\nu}\, G_2 - \dots - \alpha_{\nu\nu}\, G_\nu. \end{array}\right\} \quad (1)$$

En considérant les intersections des courbes intervenant dans les relations avec une courbe C_2, on trouve les relations connues

$$1 = n^2 - s_1^2 - s_2^2 - \dots - s_\nu^2,$$
$$0 = n\, s_1' - s_1\, \alpha_{11} - s_2\, \alpha_{21} - \dots - s_\nu\, \alpha_{\nu 1}, \dots,$$
$$0 = n\, s_\nu' - s_1\, \alpha_{1\nu} - s_2\, \alpha_{2\nu} - \dots - s_\nu\, \alpha_{\nu\nu}.$$

En considérant les intersections avec les courbes G_1', G_2', ... G_ν', on obtient les autres relations connues entre les α_{ik}.

De même, les courbes C_2, G_1', G_2', ..., G_ν' sont linéairement indépendantes et l'on a

$$\left.\begin{array}{l} C_1 \equiv n\, C_2 - s_1'\, G_1' \;- s_2'\, G_2' \;- \dots - s_\nu'\, G_\nu', \\ G_1 \equiv s_1\, C_2 - \alpha_{11}\, G_1' - \alpha_{12}\, G_2' - \dots - \alpha_{1\nu}\, G_\nu', \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ G_\nu \equiv s_\nu\, C_2 - \alpha_{\nu 1}\, G_1' - \alpha_{\nu 2}\, G_2' - \dots - \alpha_{\nu\nu}\, G_\nu'. \end{array}\right\} \quad (2).$$

Les relations (1) et (2) se déduisent les unes des autres.

Liége, le 15 mai 1942.

M. HAYEZ, Impr. de l'Académie royale, 112, rue de Louvain, Bruxelles
(Domicile légal : rue de la Chancellerie, 4)
N° Réf. 2019.