Extrait du *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége.*
Séance du 20 novembre 1941. — N° 11.

Sur une surface bicanonique de genre géométrique égal à un,

par Lucien GODEAUX, Membre de la Société.

Il nous a paru intéressant de signaler la surface qui fait l'objet de cette note, surface que nous avons rencontrée au cours de recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique.

La surface considérée appartient à un espace à quatre dimensions; elle est l'intersection complète d'une hypersurface du sixième ordre et d'une hyperquadrique une fois spécialisée; elle est donc d'ordre douze.

Elle possède un point multiple d'ordre six et une courbe double d'ordre quinze, passant neuf fois par le point sextuple.

Il existe un hyperplan touchant la surface suivant une courbe gauche d'ordre six et de genre quatre, qui est la courbe canonique unique de la surface.

Les sections hyperplanes de la surface forment le système bicanonique de celle-ci.

Le diviseur de Severi de la surface est $\sigma=3$.

La surface possède les caractères

$$p_a = p_g = 1, p^{(1)} = 4, P_2 = 5, \cdots.$$

Cette surface est l'image d'une involution cyclique de période trois, privée de points unis, appartenant à une surface de genres $p_a=p_g=5$, $p^{(1)}=10$.

1. Soit, dans un espace linéaire S_4 à quatre dimensions, F la surface intersection de deux hypersurfaces cubiques générales et irréductibles, V_3^3, $V_3'^3$. Le système canonique $|C|$ de la surface F est formé par ses sections hyperplanes [1]. On peut établir cette propriété de la manière suivante :

Coupons la surface F par un hyperplan ξ; nous obtenons une courbe C de genre dix, intersection des surfaces cubiques (V_3^3, ξ), $(V_3'^3, \xi)$. Représentons la première de ces surfaces sur un plan ϖ de telle sorte qu'à ses sections planes correspondent les cubiques passant par six points $A_1, A_2, \ldots, A_6$. A la courbe C correspond dans ϖ une courbe du neuvième ordre, ayant des points triples en $A_1, A_2, \ldots, A_6$. Les adjointes à cette courbe

(1) Enriques-Campedelli, *Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche* (Padoue, Cedam, 1932). Voir pp. 323 et suiv.

sont les courbes du sixième ordre ayant des points doubles en $A_1, A_2, \ldots, A_6$. On en déduit que la série canonique complète de la courbe C envisagée est découpée par les quadriques de l'espace ξ. Par suite, le système adjoint $|C'|$ de $|C|$ est découpé sur F par les hyperquadriques de S_4. Il en résulte que le système $|C|$ des sections hyperplanes de la surface F est bien le système canonique de cette surface. De plus, les courbes C′ découpent, sur une courbe C, la série canonique complète, donc, d'après le théorème de Picard-Severi, la surface F est régulière.

La surface F a les caractères $p_a = p_g = 5$, $p^{(1)} = 10$, $P_2 = 15$, ...

2. Considérons l'homographie H cyclique de période trois, d'équations

$$x'_0 : x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = x_0 : \varepsilon x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^2 x_3 \quad \varepsilon^2 x,$$

où ε est une racine primitive cubique de l'unité.

Les axes ponctuels de l'homographie H sont le point R_0 (1, 0, 0, 0, 0) et les droites r_1, r_2 respectivement d'équations

$$x_0 = x_3 = x_4 = 0, \quad x_0 = x_1 = x_2 = 0.$$

Envisageons les hypersurfaces cubiques V_3^3, $V_3'^3$ respectivement d'équations

$$\alpha_3(x_1, x_2) + \beta_3(x_3, x_4) + x_0\varphi_1(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) = 0,$$
$$\alpha'_3(x_1, x_2) + \beta'_3(x_3, x_4) + x_0\varphi'_1(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) = 0,$$

où nous posons

$$\alpha_3 \equiv a_0x_1^3 + a_1x_1^2x_2 + a_2x_1x_2^2 + a_3x_2^3, \qquad \alpha'_3 \equiv a'_0x_1^3 + \cdots + a'_3x_2^3,$$
$$\beta_3 \equiv b_0x_3^3 + b_1x_3^2x_4 + b_2x_3x_4^2 + b_3x_4^3, \qquad \beta'_3 \equiv b'_0x_3^3 + \cdots + b'_3x_4^3,$$
$$\varphi_1 \equiv c_0x_0^2 + c_1x_1x_3 + c_2x_2x_3 + c_3x_1x_4 + c_4x_2x_4, \quad \varphi'_1 \equiv c'_1x_0^2 + \cdots + c'_4x_2x_4.$$

Ces hypersurfaces sont transformées en elles-mêmes par H et il en est de même de leur surface d'intersection F. Sur celle-ci, H détermine une involution I_3, d'ordre trois, dépourvue de points unis, si les équations de V_3^3, $V_3'^3$ sont, comme nous le supposerons, à coefficients généraux.

Les hyperquadriques de S_4 transformées en elles-mêmes par H forment trois systèmes linéaires de dimension quatre. Considérons l'un d'eux,

$$\lambda_0x_0^2 + \lambda_1x_1x_3 + \lambda_2x_2x_3 + \lambda_3x_1x_4 + \lambda_4x_2x_4 = 0$$

et, pour obtenir un modèle projectif de la surface Φ image de l'involution I_3, rapportons projectivement les hyperquadriques de ce système aux hyperplans d'un espace S'_4 en posant

$$X_0 : X_1 : X_2 : X_3 : X_4 = x_0^2 : x_1 x_3 : x_2 x_3 : x_1 x_4 : x_2 x_4.$$

La surface Φ est tracée sur l'hyperquadrique conique R d'équation

$$X_1 X_4 - X_2 X_3 = 0. \tag{1}$$

Des équations de V_3^3, $V_3'^3$, on déduit

$$x_1^3 \alpha_3 (X_1, X_2) + x_3^3 \beta_3 (X_1, X_3) + \rho X_1^3 x_0 \varphi_1 = 0,$$
$$x_1^3 \alpha'_3 (X_1, X_2) + x_3^3 \beta'_3 (X_1, X_3) + \rho X_1^3 x_0 \rho'_1 = 0,$$

où ρ est donné par $x_0{}^2 = \rho X_0$ et où l'on écrit

$$\varphi_1 \equiv c_0 X_0 + c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3 + c_4 X_4, \qquad \varphi'_1 \equiv c'_0 X_0 + \cdots + c'_4 X_4$$

On en tire

$$X_0 X_1^3 (\varphi_1 \alpha'_3 - \varphi'_1 \alpha_3)(\varphi_1 \beta'_3 - \varphi'_1 \beta_3) + (\alpha_3 \beta'_3 - \alpha'_3 \beta_3)^2 = 0. \tag{1'}$$

Observons que l'on a, sur l'hyperquadrique Q,

$$\alpha_3 \beta'_3 \equiv X_1^3 \varphi_3 (X_1, X_2, X_3, X_4), \qquad \alpha'_3 \beta_3 \equiv X_1^3 \varphi'_3 (X_1, X_2, X_3, X_4),$$
$$\alpha_3 \beta_3 \equiv X_1^3 \psi_3 (X_1, X_2, X_3, X_4), \qquad \alpha'_3 \beta'_3 \equiv X_1^3 \psi'_3 (X_1, X_2, X_3, X_4),$$

où φ_3, φ'_3, ψ_3, ψ'_3 sont des formes cubiques.

Cela posé, l'équation précédente s'écrit

$$X_0 \left[\varphi_1^2 \psi'_3 + \varphi_1'^2 \psi_3 - \varphi_1 \varphi'_1 (\varphi_3 + \varphi'_3) \right] + (\varphi_3 - \varphi'_3)^2 = 0. \tag{2}$$

Le degré du système $|2\,C|$ étant $4 . 9$, la surface Φ doit être du douzième ordre; elle est l'intersection des hypersurfaces (1) et (2).

3. Dans le système canonique $|C|$ de F, il existe trois systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution I_3, ce sont :

a) La courbe isolée C_0 déterminée sur F par l'hyperplan $x_0 = 0$ passant par r_1, r_2;

b) Le faisceau de courbes $|C_1|$ découpé par les hyperplans $x_2 = \lambda x_1$ passant par le point R_0 et la droite r_2;

c) Le faisceau de courbes $|C_2|$ découpé par les hyperplans $x_4 = \lambda x_3$ passant par le point R_0 et la droite r_1.

A la courbe C_0 correspond sur Φ une courbe Γ_0 de genre quatre, appartenant à l'hyperplan $X_0=0$. L'hypersurface (2) touche cet hyperplan le long de la surface cubique

$$X_0=0, \qquad \varphi_3-\varphi'_3=0$$

et le cône Q coupe cette surface le long de la courbe Γ_0 de genre quatre.

On remarquera que la variété (2) possède une courbe double

$$X_0=0, \qquad \varphi_1^2\psi'_3+\varphi_1'^2\psi_3-\varphi_1\varphi'_1(\varphi_3+\varphi'_3)=0, \qquad \varphi_3-\varphi'_3=0,$$

d'ordre quinze. La surface Φ possède donc trente points doubles sur la courbe Γ_0.

Aux hyperplans de S'_4 passant par le point O_0 (1, 0, 0, 0, 0) correspondent dans S_4 les cônes

$$\lambda_1 x_1 x_3+\lambda_2 x_2 x_3+\lambda_3 x_1 x_4+\lambda_4 x_2 x_4=0$$

de sommet R_0. Ces cônes passent par les plans $R_0 r_1$, $R_0 r_2$, contenant chacun trois groupes de l'involution I_3. Il en résulte que le point O_0 est sextuple pour la surface Φ. Effectivement, on voit que le point O_0 est double pour le cône (1) et triple pour la variété (2).

Aux courbes C_1 correspondent sur Φ des courbes Γ_1 d'ordre six et de genre quatre. De même aux courbes C_2 correspondent des courbes Γ_2 d'ordre six et de genre quatre.

Envisageons, par exemple, les courbes Γ_2. A la courbe C_2 découpée sur F par l'hyperplan $x_4=\lambda x_3$ correspond, sur Φ, une courbe Γ, située dans le plan

$$X_3=\lambda X_1, X_4=\lambda X_2,$$

dont le lieu, lorsque λ varie, est le cône Q.

Dans ce plan, l'équation de la courbe Γ_2 est

$$X_0 \,|\, \varphi_1 \quad \alpha_3(X_1,X_2) \,|\cdot|\, \varphi_1 \quad \beta_3(1,\lambda) \,| + |\, \alpha_3(X_1,X_2) \quad \beta_3(1,\lambda) \,|^2=0.$$

Cette courbe possède un point triple à tangentes, en général, distinctes au point O_0 et trois points doubles représentés par

$$\left\|\begin{matrix} \varphi_1 & \alpha_3(X_1,X_2) & \beta_3(1,\lambda) \\ \varphi'_1 & \alpha'_3(X_1,X_2) & \beta'_3(1,\lambda) \end{matrix}\right\| = 0. \qquad (3)$$

Elle est donc bien de genre trois.

Dans ces dernières formules, on a

$$\varphi_1 \equiv c_0 X_0+(c_1+\lambda c_3)X_1+(c_2+\lambda c_4)X_2$$

et une expression analogue pour φ'_1.

On trouve de même que les courbes Γ_1 ont un point triple en O_0 et trois points doubles représentés par des équations analogues aux équations (3), à savoir

$$\left\| \begin{matrix} \varphi_1 & \alpha_3(1, \lambda) & \beta_3(X_1, X_3) \\ \varphi_1' & \alpha_3'(1, \lambda) & \beta_3'(X_1, X_3) \end{matrix} \right\| = 0, \tag{4}$$

$$X_2 = \lambda X_1, \quad X_4 = \lambda X_3.$$

4. Le lieu des points doubles, tant des courbes Γ_1 que des courbes Γ_2, est une courbe appartenant aux surfaces

$$\left\| \begin{matrix} \varphi_1 & \alpha_3(X_1, X_2) & \beta_3(X_1, X_3) \\ \varphi_1' & \alpha_3'(X_1, X_2) & \beta_3'(X_1, X_3) \end{matrix} \right\| = 0, \tag{5}$$

$$X_1 X_4 - X_2 X_3 = 0. \tag{1}$$

Cette courbe est également située, par exemple, sur la surface

$$\left\| \begin{matrix} \varphi_1 & \alpha_3(X_1, X_2) & \beta_3(X_2, X_4) \\ \varphi_1' & \alpha_3'(X_1, X_2) & \beta_3'(X_2, X_4) \end{matrix} \right\| = 0.$$

On remarquera que la surface (5), du quinzième ordre, est double pour l'hypersurface (1').

Projetons la courbe intersection des variétés (1) et (5) du point O_4 (0, 0, 0, 0, 1) sur le plan $X_4 = 0$. Nous obtenons la courbe

$$\left\| \begin{matrix} c_0X_0X_1 + c_1X_1^2 + c_2X_1X_2 + c_3X_1X_3 + c_4X_2X_3 & \alpha_3(X_1, X_2) & \beta_3(X_1, X_3) \\ c_0'X_0X_1 + c_1'X_1^2 + c_2'X_1X_2 + c_3'X_1X_3 + c_4'X_2X_3 & \alpha_3'(X_1, X_2) & \beta_3'(X_1, X_3) \end{matrix} \right\| = 0.$$

Cette courbe est d'ordre 21 et comprend trois fois chacune des droites $X_1 = X_2 = 0$, $X_1 = X_3 = 0$. Il en résulte que la courbe lieu des points doubles des courbes Γ_1, Γ_2 est du quinzième ordre; elle est double pour la surface Φ.

La courbe intersection d'une quadrique et d'une surface du sixième ordre étant de genre 25, les sections hyperplanes de la surface Φ, qui possèdent 15 points doubles, sont de genre dix. Nous désignerons ces sections hyperplanes par Γ.

Une courbe Γ_1 et une courbe Γ_2 constituant une section hyperplane de Φ, la courbe double de cette surface doit avoir la multiplicité 9 en O_0.

La surface Φ possède donc une courbe double du quinzième ordre passant neuf fois par le point sextuple de la surface.

5. Nous avons vu que le système canonique $|C|$ de F contient une courbe C_0 et deux faisceaux de courbes $|C_1|$, $|C_2|$ appartenant à l'involution I_3. Nous avons démontré que si une surface possède une involution cyclique privée de points unis, le transformé du système canonique de la surface image de cette involution est le système de dimension minimum, appartenant à l'involution, compris dans le système canonique de la surface support de l'involution ([2]).

Il résulte de ce théorème que la courbe canonique de la surface Φ est la courbe Γ_0.

Dans le système $|2C|$ se trouvent trois systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution I_3; ils sont respectivement découpés par les hyperquadriques

$$\lambda_0 x_0^2 + \lambda_1 x_1 x_3 + \lambda_2 x_2 x_3 + \lambda_3 x_1 x_4 + \lambda_4 x_2 x_4 = 0,$$
$$\lambda_0 x_1^2 + \lambda_1 x_1 x_2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_0 x_3 + \lambda_4 x_0 x_4 = 0,$$
$$\lambda_0 x_3^2 + \lambda_1 x_3 x_4 + \lambda_2 x_4^2 + \lambda_3 x_0 x_1 + \lambda_4 x_0 x_2 = 0.$$

La courbe C_0 étant découpée par l'hyperplan $x_0 = 0$ sur F, le premier de ces systèmes est le transformé du système bicanonique de Φ, puisqu'il contient la courbe $2C_0$. Par conséquent, le système bicanonique de Φ est le système $|\Gamma|$ de ses sections hyperplanes.

D'ailleurs, la courbe Γ_0 est du sixième ordre et sa série canonique est découpée par les plans de l'espace à trois dimensions $X_0 = 0$, donc par les hyperplans de S'_4.

La surface Φ est régulière comme F et a donc les genres

$$p_a = p_g = 1, \quad p^{(1)} = 4, \quad P_2 = 5, \cdots.$$

Ce sont également les valeurs que donnent les relations liant, d'une part, les genres arithmétiques et, d'autre part, les genres linéaires des surfaces F, Φ, relations que nous avons établies dans le cas des involutions cycliques ([3]).

Remarquons, en outre, que le diviseur de Severi de la surface Φ est $\sigma = 3$, d'après un théorème que nous avons établi autrefois ([4]).

Liége, le 28 octobre 1941.

([2]) Sur les involutions cycliques dépourvues de points unis, appartenant à une surface algébrique régulière (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1932, pp. 672-679).

([3]) Voir notre exposé sur *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Paris, Hermann, 1935).

([4]) Sur certaines surfaces algébriques de diviseur supérieur à l'unité (*Bull. de l'Acad. des Sciences de Cracovie*, 1914, pp. 362-368).

M. HAYEZ, Imprimeur de l'Académie royale de Belgique, rue de Louvain, 112, Bruxelles.
(Domicile légal : rue de la Chancellerie, 4)

N° Réf. 2019