Bulletin de la Classe des sciences

Sur les involutions cycliques n'ayant qu'un nombre fini de points unis de première espèce

Lucien Godeaux

Résumé
Détermination d'une relation entre le genre géométrique d'une surface algébrique F contenant une involution cyclique d'ordre premier *p* n'ayant que des points unis de première espèce et celui d'une surface image de l'involution.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur les involutions cycliques n'ayant qu'un nombre fini de points unis de première espèce

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie

Résumé. — Détermination d'une relation entre le genre géométrique d'une surface algébrique F contenant une involution cyclique d'ordre premier p n'ayant que des points unis de première espèce et celui d'une surface image de l'involution.

Dans notre ouvrage sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (1), nous avons établi que si une surface algébrique F contient une involution cyclique d'ordre premier p ne possède qu'un nombre fini de points unis de première espèce, entre son genre arithmétique p_a et celui p'_a d'une surface image de l'involution, on a la relation

$$12(p_a + 1) = 12p(p'_a + 1) + \delta(p - 1)(p - 5).$$

Notre but dans cette note est d'établir une relation analogue entre le genre géométrique p_g de F et celui p'_g de la surface Φ image de l'involution, en faisant toutefois une hypothèse sur l'amplitude du système canonique de la surface F. Précisément, nous établissons le théorème suivant:

(1) *Théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications* (Rome, Cremonese, 1963).

Si une surface algébrique F *contient une involution cyclique* I *d'ordre premier p n'ayant que des points unis de première espèce et si le système canonique de* F *contient p systèmes appartenant à l'involution* I, *entre le genre géométrique p_g de* F *et celui p'_g d'une surface image de l'involution, on a la relation*

$$12(p_g + 1) \geqslant 12(p'_g + 1) + 12(p - 1)(p'_a + 1) + (p - 1)(p - 5)\delta,$$

où δ est le nombre des points unis.

1. Dans notre ouvrage cité plus haut, nous avons montré que si une surface F contient une involution cyclique d'ordre premier p, on peut prendre comme modèle projectif de F une surface normale F sur laquelle l'involution est déterminée par une homographie H de l'espace ambiant possédant p axes ponctuels $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{p-1}$ dont un seul, ξ_0 rencontre F en des points simples, points unis de l'involution.

Il en résulte que dans le système $|\,C\,|$ des sections hyperplanes, il y a p systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution I, l'un étant dépourvu de points-base.

Si O est un point uni de première espèce, le plan tangent à F en O rencontre suivant une droite un axe de H distinct de ξ_0. Par suite, les courbes $C_1, C_2, \ldots, C_{p-1}$ qui engendrent des systèmes composés au moyen de l'involution, passent une fois, deux fois, ..., $p - 1$ fois par les points unis.

Dans cette note, nous supposerons que le système canonique de la surface F est assez ample pour être considéré comme système $|\,C\,|$ et contient par conséquent p systèmes linéaires partiels dont l'un, $|\,C_0\,|$, est dépourvu de points-base, les autres systèmes ayant pour points-base les points unis comme il a été indiqué plus haut.

2. Nous désignerons par p_g, p_a et $p^{(1)} = \pi$ les genres géométrique, arithmétique et linéaire de la surface F, par p'_g, p'_a, π' les nombres analogues pour une surface Φ image de l'involution I.

Soit $|\,\Gamma_0\,|$ le système canonique de la surface Φ. A une courbe Γ_0 correspond sur F une courbe qui, ajoutée à la courbe de coïncidence, donne une courbe canonique de F. La courbe de coïncidence étant d'ordre zéro, à une courbe Γ_0 correspond une courbe C_0, ne passant pas par les points unis de I.

Entre le genre π d'une courbe C_0 et celui π' de la courbe Γ_0 homologue, on a la relation

$$\pi - 1 = p(\pi' - 1).$$

3. Commençons par le cas le plus simple, où l'on a $p = 2$.

Les courbes C_1 passent simplement par les δ points unis de I. Le degré de $| C_1 |$ est donc $\pi - 1 - \delta$. Au système $| C_1 |$ correspond sur Φ un système $| \Gamma_1 |$ dont le degré est la moitié de celui de $| C_1 |$. Il en résulte que δ est pair. Nous poserons $\delta = 2\alpha'$ et le degré de $| \Gamma_1 |$ est donc $\pi' - 1 - \alpha'$.

Si nous désignons par π_1 le genre d'une courbe Γ_1, nous avons d'après la formule de Zeuthen,

$$4(\pi_1 - 1) + 2\alpha' = 2(\pi - 1) = 4(\pi' - 1).$$

On en conclut que α' est pair et nous poserons $\delta = 4\alpha$. Le genre des courbes Γ_1 est donc $\pi_1 = \pi' - \alpha$.

La dimension du système $| \Gamma_1 |$ est donnée par le théorème de Riemann-Roch. On a

$$r_1 \geqslant p'_a + (\pi' - 1 - 2\alpha) - (\pi' - \alpha) + 1,$$

c'est-à-dire

$$r_1 \geqslant p'_a - \alpha.$$

Le système canonique $| \Gamma_0 |$ de Φ a la dimension $p'_g - 1$ et on doit avoir

$$p'_g - 1 + r_1 + 2 = p_g - 1.$$

On a donc

$$p_g \geqslant p'_g - 1 + p'_a - \alpha + 2,$$

c'est-à-dire

$$p_g + 1 \geqslant p'_g + 1 + p'_a + 1 - \alpha,$$

ou encore

$$4(p_g + 1) \geqslant 4(p'_g + 1) + 4(p'_a + 1) - \delta.$$

Formule analogue à celle que nous avons établie

$$4(p_a + 1) = 4(p'_a + 1) - \delta.$$

4. Passons au cas général et considérons le système $| C_k |$ dont les courbes ont la multiplicité k en chacun des points unis ([2]).

Le degré du système $| C_k |$ est égal à $p(\pi' - 1) - \delta k^2$. Le système qui lui correspond sur la surface Φ, $| \Gamma_k |$, a ce degré divisé par p, donc δ est multiple de p. Nous poserons $\delta = p\alpha$ et le degré du système $| \Gamma_k |$ est $\pi' - 1 - \alpha k^2$.

L'involution sur une courbe C_k possède $p\alpha$ points unis multiples d'ordre k, donc $p\alpha k$ points unis comptant chacun pour $p - 1$. D'autre part le genre de la courbe C_k est égal à

$$\pi - 1 - \frac{1}{2}\delta k(k-1) = p(\pi' - 1) - \frac{1}{2}p\alpha k(k-1).$$

La formule de Zeuthen donne pour le genre π_k de la courbe Γ_k qui correspond à C_k sur la surface Φ,

$$2p(\pi_k - 1) + 2p\alpha k v = 2p(\pi' - 1) - p\alpha k(k-1),$$

Or $p\alpha$ est $p = 2v + 1$, ou encore

$$\pi_k = \pi' - \frac{1}{2}[k^2 - k(p-2)].$$

La dimension r_k du système $| \Gamma_1 |$ et par suite du système $| C_k |$ satisfait à l'inégalité

$$r_k \geqslant p'_a + [\pi' - 1 - \alpha k^2]\left[\pi' - \frac{\alpha}{2}\{k^2 - k(p-2)\}\right] + 1.$$

c'est-à-dire à l'inégalité

$$r_k \geqslant p'_a - \frac{\alpha}{2}[k^2 - k(p-2)].$$

5. Nous avons

$$r_0 + r_1 + \ldots + r_{p-1} + p = p_g,$$

où $r_0 = p'_g - 1$.

Nous avons d'autre part

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_p - 1 > (p-1)p'_a + \frac{\alpha}{12}(p-1)(p-5)$$

([2]) *Sur les points unis parfaits des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Bulletin de la Société roy. des Sciences de Liège, 1937, pp. 37-40).

et par conséquent

$$p_g \geqslant p_g' - 1 + (p-1)p_a' + \frac{\alpha}{12}\, p(p-1)(p-5).$$

On en déduit

$$12(p_g + 1) \geqslant 12(p_g' + 1) + 12(p-1)(p_a' + 1) + \delta(p-1)(p-5).$$

Formule à rapprocher de

$$12(p_a + 1) = 12 + (p_a' + 1) + (p-1)(p-5)\delta,$$

que nous avons obtenue par un tout autre procédé.

En soustrayant la seconde formule de la première, on a

$$p_g - p_a \geqslant p_g' - p_a',$$

relation évidente.

Si la surface F est régulière ($p_g = p_a$) et par suite également la surface $\Phi(p_g' = p_a')$, les deux formules sont confondues et le système $|\,C_k\,|$ est régulier. On a

$$r_k = p_a' - \frac{\alpha}{2}[k^2 - k(p-2)]$$

quelque soit $\boldsymbol{k}$.

Liège, le 15 novembre 1974.