Bulletin de la Classe des sciences

Correspondances rationnelles entre deux surfaces dont la courbe canonique est d'ordre zéro

Lucien Godeaux

Résumé

Étude des involutions cycliques n'ayant qu'un nombre fini de points unis appartenant à une surface dont la courbe canonique est d'ordre zéro ($p_a = p_4 = 1$), la surface image de l'involution étant également une surface dont la courbe canonique est d'ordre zéro.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Correspondances rationnelles entre deux surfaces dont la courbe canonique est d'ordre zéro

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie

Résumé. — Étude des involutions cycliques n'ayant qu'un nombre fini de points unis appartenant à une surface dont la courbe canonique est d'ordre zéro ($p_a = p_4 = 1$), la surface image de l'involution étant également une surface dont la courbe canonique est d'ordre zéro.

Nous avons jadis étudié les involutions cycliques n'ayant qu'un nombre fini de points unis appartenant à une surface de genres $p_a = P_4 = 1$, la surface image de l'involution étant elle-même de genres $p_a = P_4 = 1$ (1) ou étant de genres $p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$ (2). Nous avons poursuivi nos recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique quelconque et n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Les résultats que nous avons obtenus nous permettent de simplifier et de compléter les résultats obtenus dans nos premières recherches. L'objet de cette note est précisément d'étudier le cas où le support et l'image de l'involution ont des courbes canoniques d'ordre zéro ($p_a = P_4 = 1$).

(1) *Mémoire sur les involutions appartenant à une surface de genre un* (Annales de l'École Normale Supérieure, 1914, pp. 357-430; 1919, pp. 51-70), *Sur les involutions d'ordre huit appartenant à une surface de genres un* (Mémoires in-8° de l'Académie roy. de Belgique, 1923), *Recherches sur les correspondances algébriques du sixième ordre entre deux surfaces de genres un* (Mémoires de la Société roy. des Sciences de Liège, 1928).

(2) *Recherche des involutions de genres zéro, bigenre un appartenant à une surface de genres un* (Annaes da Acad. do Porto, 1916, pp. 65-78).

Nous supposerons connu l'exposé que nous avons fait sur les involutions appartenant à une surface algébrique [1].

1. Soit F une surface algébrique contenant une involution cyclique I n'ayant qu'un nombre fini de points unis. On peut prendre comme modèle projectif de la surface F une surface normale d'un espace S_r à r dimensions sur laquelle l'involution est déterminée par une homographie H, de période p, possédant p axes ponctuels $\xi^0, \xi^1, \ldots, \xi^{p-1}$ dont un seul, ξ^0, rencontre la surface en un nombre fini de points, simples pour la surface, qui sont les points unis de l'involution.

Nous supposerons p premier et nous désignerons par C les sections hyperplanes de F, par C_i celles qui sont découpées par les hyperplans passant par les axes de l'homographie H sauf par ξ^i. Le système $|C|$ contient p systèmes linéaires partiels $|C_0|, |C_1|, \ldots, |C_{p-1}|$ appartenant à l'involution I, le premier étant dépourvu de points-base, les autres ayant pour points-base les points unis de l'involution.

Soient $r_0, r_1, \ldots, r_{p-1}$ les dimensions des systèmes $|C_0|, |C_1|, \ldots, |C_{p-1}|$. Rappelons que l'on peut prendre r_0 aussi grand qu'on le veut.

Rapportons projectivement les courbes C_0 aux hyperplans d'un espace à r_0 dimensions. Il correspond aux groupes de l'involution I les points d'une surface normale Φ, image de l'involution I. Nous désignerons par $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_{p-1}$ les courbes qui correspondent respectivement aux courbes $C_0, C_1, \ldots, C_{p-1}$, les courbes Γ_0 étant les sections hyperplanes de Φ.

Nous allons maintenant supposer que les surface F et Φ ont tous leurs genres égaux à l'unité ($p_a = P_4 = 1$), c'est-à-dire ont des courbes canoniques d'ordre zéro. Si π est le genre des courbes Γ_0, on a $r_0 = \pi$ et la surface Φ est d'ordre $2\pi - 2$. Par suite la surface F est d'ordre $2p(\pi - 1)$, les courbes C sont de genre $p(\pi - 1) + 1$ et on a $r = p(\pi - 1) + 1$.

2. Considérons une courbe C_0 ne passant par aucun des points unis de l'involution I. Sur cette courbe, H détermine une transformation birationnelle et la série canonique de cette courbe est découpée par les courbes C. Cette série canonique contient p séries linéaires composées avec l'involution I. L'une est la transformée de la série canonique

[1] *Théories des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications* (Rome, Cremonese, 1963).

de la courbe Γ_0 homologue de C_0 et a la dimension $\pi - 1$, les autres sont découpées par les courbes $C_1, C_2, \dots, C_{p-1}$. Leur dimension est $\pi - 2$ et on a donc $r_i \leqslant \pi - 2$, pour i positif.

D'après la théorie des homographies, on a

$$\pi + r_1 + r_2 + \dots + r_{p-1} + p = p(\pi - 1) + 2,$$

donc on doit avoir $r_1 = r_2 = \dots = r_{p-1} = \pi - 2$.

Les systèmes $| C_1 |, | C_2 |, \dots, | C_{p-1} |$ et par suite les systèmes $| \Gamma_1 |, | \Gamma_2 |, \dots, | \Gamma_{p-1} |$ ont tous la dimension $\pi - 2$.

3. Une surface normale de genres $p_a = P_4 = 1$ ne peut posséder que des points au plus doubles, donc les points de diramation sont au plus doubles pour Φ.

Si O est un point uni de l'involution I et si le plan tangent à F en ce point rencontre suivant une droite un des axes de H distinct de ξ^0, c'est-à-dire si le point O est uni de première espèce, le point O′ qui correspond à O sur la surface Φ est multiple d'ordre p pour cette surface. On a donc alors $p = 2$ et on sait que O′ est un point double conique. Nous laisserons ce cas de côté, il est bien connu.

Le point O est donc un point uni de seconde espèce, c'est-à-dire que le plan tangent à F en O rencontre en un point deux des axes de H distincts de ξ^0. Nous avons démontré que dans ce cas, le cône tangent à Φ en O′ se scinde et deux, trois ou quatre cônes. Comme le point O′ est double biplanaire pour Φ, le cône tangent à Φ en O′ se scinde en deux plans. Le point O est alors l'origine de deux branches linéaires. En utilisant la notation définie dans notre ouvrage cité plus haut, l'une de ces branches contient les points (1,1), (1,2), ..., (1,h) infiniment voisins successifs de O. L'autre branche contient les points (2,1), (2,2), ..., (2,h'). Les courbes C_0 passant par O acquièrent un point multiple en ce point et contiennent les deux suites de points. Comme O′ est biplanaire, aux points (1,h) et (2,h'), qui sont unis de première espèce correspondent les points infiniment voisins de O′ situés dans les plans tangents. Ces points sont donc simples et il en est de même de tous les points des deux suites pour les courbes C_0 passant par O. On a $h = h' = p - 2$ et le point O est ce que nous appelé un point uni symétrique ([1]). Il est double pour les courbes C_0 qui le contienne.

([1]) *Sur les points unis symétriques des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Revista de la Universidadde Tucuman, 1940, pp. 283-291).

Appelons C_0 les courbes C_0 passant par O, C_0'' les courbes C_0' assujetties à toucher en O une droite distincte des droites O(1,1), O(2,1), C_0''' les courbes C_0'' assujetties à la même condition, et ainsi de suite.

Les courbes C_0'' ont un point quadruple en O et on peut écrire que ces courbes ont en ce point le schéma, en posant $p = 2\nu + 1$,

$$\begin{array}{ll} & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad (1,\nu-1,1)^1 \\ O^4 & \begin{cases} (1,1)^2,(1,2)^2,\ldots,(1,\nu-2)^2,(1,\nu-1)^1, \\ (2,1)^2,(2,2)^2,\ldots,(2,\nu-2)^2,(2,\nu-1)^1, \end{cases} \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad (2,\nu-1,1)^1. \end{array}$$

Les points $(1,\nu-1,1)$ et $(2,\nu-1,1)$ sont unis de première espèce, les autres sont unis de seconde espèce.

Les courbes C_0''' ont en O la multiplicité six. Supposons pour fixer les idées $p = 7$. Leur comportement en O est alors fixé par le schéma

$$\begin{array}{ll} & (1,1,2)^1 \\ & (1,1,1)^1 \\ O^6 & \begin{cases} (1,1)^1 \\ (2,1)^1 \end{cases} \\ & (2,1,1)^1 \\ & (2,1,2)^1 \end{array}$$

les points (1,1,2) et (2,1,2) étant unis de première espèce et les autres étant unis de seconde espèce.

Si nous désignons par x_0, x_1, x_2 les coordonnées des points du plan tangent à F en O, le point O étant donné par $x_1 = x_2 = 0$, l'homographie H détermine dans ce plan l'homographie

$$x_0' : x_1' : x_2' = x_0 : \varepsilon^h x_1 : \varepsilon^{p-h} x_2,$$

ε étant une racine primitive d'ordre p de l'unité.

4. Nous pouvons attacher à chacun des systèmes $|C_0|$, $|C_1|$, ..., $|C_{p-1}|$ une racine primitive d'ordre p de l'unité. Au système $|C_i|$, nous attacherons la racine ε^i.

Considérons le système $| 2C |$. Il se comporte comme le système $| C |$ et contient p systèmes partiels appartenant à l'involution I. L'un d'eux est privé de points-base, nous le désignerons par $| (2C)_0 |$. Il contient les courbes $2C_0, C_0 + C'_0, \ldots$, mais aussi les courbes $C_h + C_{p-h}$.

Considérons pour fixer les idées les courbes $C_1 + C_{p-1}$. Les courbes C_1, C_{p-1} passant par O, donc les courbes $C_1 + C_{p-1}$ appartiennent au système $| C_0 + C'_0 |$, ou $| C_0 + C''_0 |, \ldots$

Supposons que les courbes $C_1 + C_{p-1}$ appartiennent; au système $| C_0 + C'_0 |$. Chacune de ces courbes a un point double en O et passe simplement par les points (1,1), (1,2), ..., $(1, p-2)$, (2,1), (3,2), ..., $(2, p-2)$. La courbe C_1 ne peut se comporter comme la courbe C'_0 en O, car la courbe C_{p-1} passe par O. Il en résulte que les courbes C_1 passent simplement par les points O, (1,1), ..., $(,1\ p-2)$ et les courbes C_{p-1} simplement par les points 0, (2,1), ..., $(2, p-2)$.

Supposons maintenant que les courbes $C_1 + C_{p-1}$ se comportent en O comme les courbes $C_0 + C''_0$. Ces dernières courbes passent par deux points unis de première espèce: $(1, \nu - 1,1)$ et $(2, \nu - 1,1)$. Il y a au moins un de ces points sur les courbes C_1 et un sur les courbes C_{p-1}. Supposons que les courbes C_1 passent par le point $(1, \nu - 1,1)$ mais non par le point $(2, \nu - 1,1)$. Alors les courbes C_1 passent simplement par le point $(1, \nu - 1)$ et doublement par les points $(1, \nu - 2), \ldots, (1,1)$. Comme elles ne peuvent passer par le point (2,1), elles passent deux fois par le point O. On a donc le résultat suivant:

Les courbes C_1 passent doublement par les points 0,(1,1), ..., $(1, \nu - 2)$ et simplement par les points $(1, \nu - 1)$, $(1, \nu - 1,1)$.

Les courbes C_{p-1} passent deux fois par les points 0,(2,1), ..., $(2, \nu - 2)$ et une fois par les points $(2, \nu - 1)$, $(2, \nu - 1,1)$.

Supposons que les courbes $C_1 + C_{p-1}$ se comportent au point 0 comme les courbes $C_0 + C'''_0$ et, pour simplifier, supposons $p = 7$ comme plus haut.

Une courbe $C_1 + C_{p-1}$ doit passer six fois par O et une fois par les points (1,1), (1,1,1), (1,1,2),(2,1),(2,1,1),(2,1,2) et seuls les points (1,1,2),(2,1,2) sont unis de première espèce et l'un d'eux, par exemple (1,1,2) appartient aux courbes C_1. Celles-ci passent donc simplement par les points (1,1,1),(1,1). Le point O est au moins triple pour les courbes C_1 et précisément triple puisque elles ne peuvent passer par le point (2,1) En résumé.

Les courbes C_1 passent trois fois par O et une fois par les points (1,1),(1,1,1),(1,1,2).

Les courbes C_{p-1} passent trois fois par O et une fois par les points (2,1),(2,1,1),(2,1,2).

Et ainsi de suite.

5. Dans le cas actuel, les points unis de l'involution I sont des points unis symétriques. Supposons que ces points soient au nombre de α. Entre le genre arithmétique p_a de F et celui p'_a de Φ, nous avons établi la relation

$$12(p_a + 1) = 12p(p'_a + 1) - (p^2 - 1)\alpha.$$

Actuellement $p_a = p'_a = 1$ et on a, après division par $p - 1$,

$$24 - (p + 1)\alpha = 0.$$

Le nombre p étant premier et par hypothèse supérieur à 2, les cas suivants peuvent se présenter:

$$p = 3, \alpha = 6; p = 5, \alpha = 4; p = 7, \alpha = 3; p = 11, \alpha = 2;$$

$$p = 23, \alpha = 0.$$

Ce dernier cas s'élimine immédiatement, car on a sur la surface Φ l'égalité fonctionnelle

$$p\Gamma_0 \equiv p\Gamma_1 \equiv \dots \equiv p\Gamma_{p-1}$$

et les systèmes $|\, \Gamma_0 \,|, |\, \Gamma_1 \,|, \dots$ devraient avoir les mêmes caractères.

Notons en passant que si $p = 2$, in a $\alpha = 8$, les points unis étant alors de première espèce.

6. Supposons que sur une courbe C_i $(i > 0)$, l'homographie H détermine une involution présentant x points unis et que, d'autre part, la courbe C_i possède des points multiples équivalents à y points doubles. La formule de Zeuthen donne, le genre des courbes Γ_i étant $\pi - 2$,

$$2p(\pi - 3) + x(p - 1) = 2p(\pi - 1) - 2y$$

ou, en posant $p = 2\nu + 1$,

$$\nu x + y = 2p.$$

D'autre part, le degré effectif du système $|C_i|$ doit être égal à $2p(\pi - 3)$.

7. Supposons $p = 3, \alpha = 6$.

L'involution I possède six points unis $O_1, O_2, \dots, O_6$. Le plan tangent à F en chacun de ces points s'appuie en un point A_1 sur ξ^1 et en un point A_2 sur ξ^2. Les courbes C_1 sont tangentes en chacun des points O à la droite OA_2 et elles passent simplement par les points unis. Il en est de même des courbes C_2. On a $y = 0, x = 6$.

8. Supposons $p = 5, \alpha = 4$. L'involution I possède quatre points unis O_1, O_2, O_3, O_4. Nous avons $2x + y = 10$.

Supposons que le plan tangent à F en O_1 s'appuie en un point A_{11} sur ξ^1 et en un point A_{14} sur ξ^4. Supposons en outre que le plan tangent à F en O_2 s'appuie en un point A_{22} sur ξ^2 et un en point A_{23} sur ξ^3, que le plan tangent à F en O_3 s'appuie en un point A_{33} sur ξ^3 et en un point A_{32} sur ξ^2, enfin que le plan tangent à F en O_4 s'appuie en un point A_{41} sur ξ^1 et en un point A_{44} sur ξ^4.

Les hyperplans passant par ξ^2, ξ^3, ξ^4, qui découpent sur F les courbes C_1, contiennent les droites O_1A_{14} et O_4A_{44}, donc les courbes C_1 sont tangentes à ces droites respectivement en ces points. En O_1, O_4, les courbes $C_1 + C_4$ ont le même comportement que les courbes $C_0 + C'_0$.

Les hyperplans des courbes C_1 contiennent les plans tangents à F en O_2, O_3, donc ces points sont au moins doubles pour les courbes C_1.

Convenons d'affecter d'un indice i les points $(1,1),\dots,(2,1),\dots$ attachés au point O_i. On peut supposer que les courbes $C_1 + C_4$ ont en O_2, O_3, le même comportement que les courbes $C_0 + C''_0$. Les courbes C_1 passeraient alors deux fois par O_2 et une fois par $(1,1)_2$, $(1,1,1)_2$, deux fois par O_3 et une fois par $(2,1)_3$, $(2,1,1)_3$.

Dans ces conditions, on a pour les courbes C_1, $x = 4$ et $y = 2$. D'autre part, les courbes C_1 passant par les points O_1, $(1,1)_1$, $(1,2)_1$, $(1,3)_1$ et par les points O_4, $(1,1)_4$, $(1,2)_4$, $(1,3)_4$, le degré effectif de $|C_1|$ est égal à $10(\pi - 3)$ et les courbes C_1 ont donc le comportement indiqué.

Le même raisonnement montre que les courbes C_2 passent doublement par les points O_3, O_4 et simplement par O_1, O_2.

Et ainsi de suite pour les courbes C_3, C_4.

Nous avons construit une surface du quatrième ordre ($p_a = P_4 = 1$) contenant une involution cyclique d'ordre cinq, présentant quatre points unis, et dont l'image est une surface de genres $p_a = P_4 = 1$ (¹).

9. Supposons $p = 7, \alpha = 3$. L'involution I possède trois points unis O_1, O_2, O_3 et on a $3x + y = 14$. Le nombre x est au plus égal à 3, donc y est au moins égal à cinq.

Nous supposerons que le plan tangent à F en O_1 s'appuie en un point A_{11} sur ξ^1 et en un point A_{16} sur ξ^6, que le plan tangent à F en O_2 s'appuie en un point A_{22} sur ξ^2 et en un point A_{25} sur ξ^5 enfin que le plan tangent à F en O_3 s'appuie en un point A_{33} sur ξ^3 et en un point A_{34} sur ξ^4.

Les hyperplans découpant sur F les courbes C_1 contiennent la droite O_1A_{16} et par conséquent, les courbes C_1 sont tangentes à cette droite et passent par les points $(1,1)_1, (1,2)_1, \ldots, (1,5)_1$.

Les hyperplans des courbes C_1 contenant les plans tangents en O_2, O_3, ces points sont au moins doubles pour les courbes C_1. Supposons que les courbes $C_1 + C_6$ se comportent aux points O_2, O_3 comme les courbes $C_0 + C_0''$, c'est-à-dire que les courbes C_1 passent deux fois par O_2 et par les points $(1,1)_2$, et une fois par les points $(1,2)_2$ et $(1,1,1)_2$, et qu'elles aient un comportement analogue en O_3. On a alors $x = 3, y = 4$, ce qui est impossible. D'ailleurs, le degré effectif de $| C_1 |$ est $14(\pi - 1) - 26$.

Supposons encore que les courbes C_1 se comportent comme plus haut en O_2, mais que les courbes $C_1 + C_6$ aient le comportement des courbes $C_0 + C_0''$ au point O_3. Alors les courbes C_1 passent trois fois par O_3 et une fois par les points $(1,1)_3, (1,1,1)_3, (1,1,2)_3$. Cette fois on a $x = 3$ et $y = 5$. D'autre part le degré effectif de $| C_1 |$ est égal à $14(\pi - 1) - 28$.

On vérifie sans peine que les courbes $C_2, C_3, \ldots, C_6$ ont des comportements analogues.

Nous avons construit une surface du quatrième ordre ($p_a = P_4 = 1$) possédant une involution cyclique d'ordre sept ayant trois points unis, dont la surface image est de genres $p_a = P_4 = 1$ (²).

(¹) *Sur l'ordre des correspondances rationnelles entre deux surfaces de genres un* (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1935, pp. 345-353).

(²) *Sur l'ordre des correspondances rationnelles...* (Loc. cit.).

10. Il nous reste à examiner le cas $p = 11$, $\alpha = 2$. On a $5x = y = 22$. Comme x est au plus égal à 2, y doit être supérieur ou égal à 10.

Les plans tangents à F en O_1, O_2, points unis de l'involution, rencontrent en un point quatre des espaces $\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^{10}$, donc il existe des axes de H qui ne sont pas rencontrés par un de ces plans. Supposons que ce soit ξ^1.

Supposons que le plan tangent à F en O_1 rencontre en un point les espaces ξ^2 et ξ^9, et que le plan tangent en O_2 rencontre en un point les espaces ξ^3 et ξ^8.

Les hyperplans contenant les courbes C_1 contiennent les plans tangents à F en O_1, O_2, donc les courbes C_1 ont en ces points la multiplicité deux au moins.

Supposons que les courbes $C_1 + C_{10}$ se comportent en O_1, O_2 comme les courbes $C_0 + C_0''$. Alors les courbes C_1 passent deux fois par les points 0_1, $(1,1)_1$, $(1,2)_1$, $(1,3)_1$ et une fois par les points $(1,4)_1$, $(1,4,1)_1$. Elles ont un comportement analogue en O_2. On a donc $x = 2$, $y = 8$. D'autre part, le degré effectif de $| C_1 |$ est égal à $22(\pi - 1) - 36$. Nous arrivons donc à une absurdité.

Si l'on supposait que les courbes $C_1 + C_{10}$ se comportaient en O_2 comme les courbes $C_0 + C_0'''$, les courbes C_1 passeraient trois fois par O_2, $(1,1)_2$, deux fois par $(1,1)_2$, une fois par $(1,2,1)_2$, $(1,2,1,1)_2$. On aurait alors $x = 2$ et $y = 10$, d'où encore une impossibilité.

On serait de même conduit à des impossibilités si l'on supposait qu'en un des points O_1, O_2 les courbes $C_1 + C_{10}$ se comportaient commes les courbes $C_0 + C_0^{(i)}$.

On voit donc qu'il ne peut exister sur une surface de genres $p_a = P_4 = 1$ une involution cyclique d'ordre 11, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, dont la surface image est également de genres $p_a = P_4 = 1$.

Liège, le 14 janvier 1974.