Extrait du *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liège.*
Séance du 19 juillet 1945. — N° 6-7.

Quelques remarques sur les surfaces de genres un et de rang deux,

par Lucien GODEAUX, Membre de la Société.

(*Seconde note.*)

Dans cette seconde note [1], nous considérons les surfaces de genres un ($p_a = P_4 = 1$), de rang deux, d'ordre huit, appartenant à un espace à cinq dimensions. Nous commençons par faire quelques remarques sur les surfaces qui contiennent des courbes d'ordre huit et de genre trois, ou qui possèdent deux points doubles coniques. Nous passons ensuite aux surfaces de rang deux, dont nous sommes parvenu à former les équations. Nous obtenons ainsi le théorème suivant :

Si

$$\varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = 0,\ \varphi_3 = 0,\ \varphi_4 = 0,\ \varphi_5 = 0,$$
$$\psi_1 = 0,\ \psi_2 = 0,\ \psi_3 = 0,\ \psi_4 = 0,\ \psi_5 = 0$$

sont les équations de dix hyperplans quelconques d'un espace linéaire à cinq dimensions, les équations

$$\varphi_1 \psi_2 + \varphi_3 \varphi_5 = \varphi_4^2,\quad \psi_1 \varphi_2 + \psi_3 \psi_5 = \psi_4^2,$$
$$\varphi_1 \psi_1 + \varphi_2 \psi_2 + 2\varphi_4' \psi_4 - \varphi_3 \psi_5 - \varphi_5 \psi_3 = 0$$

représentent une surface normale d'ordre huit, de genres un ($p_a = P_4 = 1$), *image d'une involution du second ordre appartenant à une surface de genres un.*

1. Soit F une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$), normale, d'ordre huit, de S_5. Ses sections hyperplanes C sont de genre cinq.

Supposons en premier lieu que la surface F soit assujettie à contenir une courbe Γ d'ordre huit et de genre trois. La courbe Γ appartient à un système linéaire |Γ| de degré quatre et de dimension trois.

Nous allons montrer que la surface F contient une infinité de

---

[1] La première note a été publiée dans le *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liège*, 1945, pp. 282-296. Au sujet des surfaces considérées ici, nous avons déjà obtenu quelques résultats antérieurement. Voir notre note : Sur les surfaces normales de genres un de l'espace à cinq dimensions possédant huit points doubles (*Bull. Soc. roy. Sc. Liége*, 1939, pp. 427-433).

systèmes linéaires de courbes de genre cinq et de genre trois.

Le système linéaire $|\lambda\Gamma|$ est de genre $2\lambda^2+1$ et également de dimension $2\lambda^2+1$. Ses courbes découpent, sur une courbe C, une série linéaire d'ordre 8λ qui, complétée éventuellement, est de dimension $8\lambda-5$. La plus petite valeur de λ pour laquelle on a $2\lambda^2+1>8\lambda-5$ est $\lambda=4$. Le système $|4\Gamma|$, de dimension 33, découpe sur une courbe C une série d'ordre 32 et de dimension 27; il y a donc ∞^5 courbes de $|4\Gamma|$ contenant une courbe C comme partie. Les courbes

$$C_1 \equiv -C + 4\Gamma$$

forment donc un système linéaire $|C_1|$ de dimension cinq et par suite de genre cinq et de degré huit.

Les courbes C_1 coupent les courbes Γ en des groupes de huit points. Les courbes $2C_1$ appartiennent à un système linéaire de dimension 17; elles découpent sur une courbe Γ une série d'ordre 16 et de dimension 13; par suite il y a ∞^3 courbes de $|2C_1|$ contenant une courbe Γ comme partie. Les courbes

$$\Gamma_1 \equiv 2C_1 - \Gamma \equiv -2C + 7\Gamma$$

forment un système linéaire $|\Gamma_1|$ de dimension trois, donc de genre trois et de degré quatre.

Les courbes Γ_1 rencontrent les courbes C_1 en huit points; donc, en reprenant le raisonnement fait plus haut, les courbes

$$C_2 \equiv -C_1 + 4\Gamma_1 \equiv -7C + 24\Gamma$$

forment un système linéaire $|C_2|$, de dimension cinq, de genre cinq et de degré huit.

De même, les courbes

$$\Gamma_2 \equiv 2C_2 - \Gamma_1 \equiv -12C + 41\Gamma$$

forment un système linéaire $|\Gamma_2|$ de dimension trois, de genre trois et de degré quatre. Et ainsi de suite.

D'un autre côté, les courbes

$$\Gamma_{-1} \equiv 2C - \Gamma$$

sont de genre trois et forment un système linéaire $|\Gamma_{-1}|$ de dimension trois et de degré quatre. Elles rencontrent les courbes C en huit points; par suite les courbes

$$C_{-1} \equiv -C + 4\Gamma_{-1} \equiv 7C - 4\Gamma$$

forment un système linéaire $|C_{-1}|$ de genre cinq, de dimension cinq et de degré huit.

Le système

$$|\Gamma_{-2}| = |12C - 7\Gamma|$$

et le système

$$|C_{-2}| = |41C - 24\Gamma|$$

sont le premier de genre et dimension trois, degré quatre, le second de genre et dimension cinq, degré huit. Et ainsi de suite.

Si le fait de contenir la courbe Γ est la seule condition imposée à la surface F, les courbes C, Γ forment, sur cette surface, une base de déterminant

$$\begin{vmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = -32.$$

La forme quadratique associée à cette base est

$$4(2\lambda^2 + 4\lambda\mu + \mu^2).$$

Cette forme admet la substitution automorphe

$$\lambda' = -\lambda - 2\mu,\ \mu' = 4\lambda + \mu,$$

de module 1. Cette substitution fait correspondre aux courbes C, Γ les courbes C_1, Γ_1, à celles-ci les courbes C_2, Γ_2, etc. Son inverse fait correspondre à C, Γ les courbes C_{-1}, Γ_{-1}, etc. Il ne semble pas cependant que la surface F possède une transformation birationnelle en soi. Pour pouvoir appliquer la théorie de M. Severi (²), il faudrait prouver que les courbes C, Γ forment une base minima. Il semble assez difficile d'écarter la possibilité d'une base de déterminant -8.

2. Supposons en second lieu que la surface F possède deux points doubles coniques O_1, O_2. En projetant la surface de ces deux points sur un espace S_3, il correspond à F dans celui-ci une surface F′, d'ordre quatre, sur laquelle, aux domaines des points O_1, O_2, correspondent deux coniques γ_1, γ_2, ne se rencontrant pas.

Le plan σ_1 de γ_1 coupe encore F′ suivant une conique γ'_1 et le plan σ_2 de γ_2 suivant une conique γ'_2. γ'_1 rencontre γ_2 en deux points et γ'_2 rencontre γ_1 en deux points également.

Soient $\alpha_1 = 0$ l'équation du plan σ_1; $\beta_1 = 0$ celle de σ_2; $\alpha_2 = 0$

(²) Complementi alla teoria della base per la totalità delle curve di una superficie algebrica (*Rendiconti Circolo Matematico di Palermo*, 1920, t. XXX).

l'équation d'une quadrique passant par les coniques γ_1, γ'_2, et $\beta_2=0$ l'équation d'une quadrique passant par γ_2, γ'_1, α_1, β_1, α_2, β_2 étant des formes en x_0, x_1, x_2, x_3 dont le degré est indiqué par l'indice. L'équation de la surface F peut s'écrire sous la forme

$$\alpha_2\,\beta_2 + \alpha_1\,\beta_1\,\varphi_2 = 0,$$

$\varphi_2=0$ étant l'équation d'une quadrique.

Les sections planes de F′ sont les courbes $C—\gamma_1—\gamma_2$; par conséquent les courbes C sont découpées sur F′ par les surfaces cubiques passant par les coniques γ'_1, γ'_2. Les équations de ces courbes étant respectivement $\alpha_1=\beta_2=0$, $\beta_1=\beta_2=0$, les surfaces cubiques sont représentées par l'équation

$$\alpha_1\,\beta_1\,(\lambda_0\,x_0 + \lambda_1\,x_1 + \lambda_2\,x_2 + \lambda_3\,x_3) + \lambda_4\,\alpha_1\,\alpha_2 + \lambda_5\,\beta_1\,\beta_2 = 0.$$

Rapportons projectivement ces surfaces aux hyperplans d'un espace S_5 en posant

$$\frac{x_0}{\alpha_1\,\beta_1\,x_0} = \cdots = \frac{x_3}{\alpha_1\,\beta_1\,x_3} = \frac{x_4}{\alpha_1\,\alpha_2} = \frac{x_5}{\beta_1\beta_2}.$$

A la surface F′ correspond la surface F, dont les équations sont

$$x_4\,\beta_1 = \alpha_2,\ x_5\,\alpha_1 = \beta_2,\ x_4\,x_5 + \varphi_2 = 0.$$

Les points doubles coniques O_1, O_2 de cette surface sont respectivement les points (0,0,0,0,0,1), (0,0,0,0,1,0).

Les courbes

$$\gamma'_1 \equiv C - 2\,\gamma_1 - \gamma_2,\ \gamma'_2 \equiv C - \gamma_1 - 2\,\gamma_2$$

de F′ correspondent respectivement aux sections de F par les hyperplans passant par O_1, O_2 et contenant, le premier le cône tangent en O_1 à F, le second, le cône tangent en O_2.

Observons que la surface F′ est aussi la projection de la surface

$$x_4\,\alpha_1 = \alpha_2,\ x_5\,\beta_1 = \beta_2,\ x_4\,x_5 + \varphi_2 = 0$$

à partir des points doubles coniques (0,0,0,0,1,0), (0,0,0,0,0,1). Les domaines de ces points doubles ont respectivement pour homologues sur F′ les coniques γ'_1, γ'_2

3. Supposons maintenant que la surface F soit de rang deux. Elle possède donc huit points doubles coniques O_1, O_2, ..., O_8 et un système linéaire $|\Gamma|$ de courbes de genre trois, le long de chacune desquelles une hyperquadrique passant par les huit points doubles touche la surface. Si l'on désigne par $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_8$ les courbes rationnelles de degré -2 équivalentes aux points doubles et par C les sections hyperplanes de F, on a donc

$$2C \equiv 2\Gamma + \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_8.$$

Projetons la surface F des points O_1, O_2 sur un espace S_3. Nous obtenons une surface du quatrième ordre F' sur laquelle les courbes γ_1, γ_2 sont des coniques ne se rencontrant pas. Aux points doubles O_3, O_4, ..., O_8 de F correspondent six points doubles coniques O'_3, O'_4, ..., O'_8 de F'.

Le plan σ_1 de γ_1 coupe encore F' suivant une conique γ'_1 et le plan σ_2 de γ_2 suivant une conique γ'_2. Celle-ci rencontre en deux points γ_1, et γ'_1 rencontre en deux points γ_2.

Aux courbes Γ, d'ordre huit, de F, correspondent sur F' des sextiques de genre trois, rencontrant en un point chacune des courbes γ_1, γ_2 et par conséquent en cinq points chacune des coniques γ'_1, γ'_2. Les courbes Γ de F' passent de plus simplement par les points O'_3, O'_4, ..., O'_8.

Sur la surface F', les courbes C sont découpées par les surfaces cubiques passant par les coniques γ'_1, γ'_2 et par conséquent par la droite $\sigma_1\sigma_2$, que ces surfaces cubiques rencontrent en quatre points distincts. Les courbes $2C$ sont donc découpées sur F' par les surfaces du sixième ordre ayant comme courbes doubles les coniques γ'_1, γ'_2 et la droite $\sigma_1\sigma_2$. D'après les propriétés des courbes Γ, il existe une de ces surfaces du sixième ordre touchant la surface F' le long de chacune de ces courbes. Une telle surface du sixième ordre doit rencontrer la conique γ_1 au point d'appui de la courbe Γ correspondante sur γ_1; elle rencontre donc le plan σ_1 suivant la conique double γ'_1, suivant la droite double $\sigma_1\sigma_2$ et suivant un point extérieur; par suite elle comprend le plan σ_1 comme partie. Pour une raison analogue, elle comprend également le plan σ_2 comme partie. Par conséquent, il existe une surface du quatrième ordre passant par γ'_1, γ'_2 et touchant la surface F' le long d'une courbe Γ quelconque.

4. Le système $|\Gamma|$ a la dimension trois et ses courbes rencontrent γ_1 en un point variable; il existe donc ∞^1 courbes Γ passant par deux points de γ_1 et comprenant par conséquent cette courbe comme partie. Elles sont complétées par des quartiques elliptiques K_1 s'appuyant en trois points sur γ_1 et en un point sur γ'_1. Les courbes K_1 s'appuient de plus en un point sur γ_2

et en trois points sur γ'_2. Elles passent en outre simplement par les points doubles O'_3, O'_4, ..., O'_8.

Considérons une courbe K_1. Il existe une surface du quatrième ordre Φ passant par γ'_1, γ'_2 et touchant F' le long de la courbe $K_1+\gamma_1$. Les surfaces F', Φ déterminent donc un faisceau de surfaces du quatrième ordre passant par γ'_1, γ'_2 et se touchant le long des courbes K_1, γ_1. Ces surfaces ne rencontrent pas le plan σ_1 en dehors des coniques γ_1, γ'_1; par conséquent, il existe une surface du faisceau comprenant le plan σ_1 comme partie. Elle est complétée par une surface cubique φ_1 passant par les coniques γ_1, γ'_2 et touchant la surface F' le long de la quartique K_1.

La première polaire d'un point P quelconque de l'espace par rapport à F' est une surface cubique coupant une courbe K_1 en douze points parmi lesquels les six points doubles O'_3, O'_4, ..., O'_8. La développable engendrée par les plans tangents à F' le long d'une courbe K_1 est donc de classe six. La première polaire du point P par rapport à la surface cubique φ_1 touchant F' le long d'une courbe K_1 est une quadrique coupant K_1 en huit points. En deux de ces points, le plan tangent à φ_1 doit être indéterminé et la surface φ_1 possède donc deux points doubles sur la courbe K_1.

Représentons la surface φ_1 point par point sur un plan ϖ. Nous pouvons obtenir cette représentation de manière qu'aux sections planes de φ_1 correspondent des cubiques ψ_3 passant par six points distincts A_0, A_1, A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, les droites $a_1=A_{11}A_{12}$, $a_2=A_{21}A_{22}$ se coupant au point A_1. Ces droites correspondent aux points doubles coniques de la surface. Au domaine du point A_1 correspond la droite de φ_1 joignant ces deux points doubles.

Aux sections de φ_1 par les plans passant par la droite $\sigma_1\sigma_2$ correspondent les courbes ψ_3 d'un faisceau. Dans ce faisceau se trouvent deux courbes dégénérées, correspondant aux sections de φ_1 par les plans σ_1, σ_2. A la courbe γ_1 correspond, dans le plan ϖ, une conique $\overline{\gamma}_1$ passant par les points A_0, A_1, A_{11}, A_{21} qui, avec la droite $A_{12}A_{22}$, forme une courbe ψ_3. A la conique γ'_2 correspond dans ϖ une conique $\overline{\gamma'}_2$ passant par les points A_0, A_1, A_{12}, A_{22} et formant, avec la droite $A_{11}A_{21}$, une courbe ψ_3.

Une surface du quatrième ordre passant par γ'_1, γ'_2 coupe φ_1 suivant une courbe représentée dans ϖ par une courbe du douzième ordre comprenant $\overline{\gamma}_1$, $\overline{\gamma'}_2$ et complétée par une courbe du huitième ordre passant deux fois par les points A_0, A_1 et trois fois par les points A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}. Si, en outre, la surface du quatrième ordre passe par les points doubles de φ_1, cette courbe du huitième ordre comprend comme parties les droites a_1, a_2 et est complétée par une courbe du sixième ordre passant deux fois par les points A_0, A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, mais ne passant pas par le point A_1. Si la surface du quatrième ordre envisagée est la surface F′, cette courbe du sixième ordre est une cubique $\overline{K_1}$, comptée deux fois, correspondant à la courbe de contact K_1 de F′ et de φ_1. La cubique $\overline{K_1}$ passe simplement par les points A_0, A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, mais ne passe pas par A_1.

5. Sur la surface F′, les courbes K_1 forment un faisceau $|K_1|$ et il existe donc ∞^1 surfaces cubiques φ_1 touchant F′ le long de ces courbes. Ces ∞^1 surfaces φ_1 appartiennent à un réseau $|\varphi|$ de surfaces cubiques et forment, dans ce réseau, un système $\{\varphi_1\}$ d'indice deux, dont l'enveloppe comprend F′ comme partie.

Les surfaces cubiques φ passent par les coniques γ_1, γ'_2. Deux de ces surfaces ont encore en commun une courbe du cinquième ordre s'appuyant en quatre points sur chacune des coniques γ_1, γ'_2. Une troisième surface φ ne passant pas par cette courbe du cinquième ordre, la rencontre encore, en dehors de γ_1, γ'_2 en sept points. Le réseau $|\varphi|$ a donc pour base les coniques γ_1, γ'_2 et sept points isolés.

L'enveloppe du système $\{\varphi^1\}$ est une surface du sixième ordre formée de la surface F′ et d'une quadrique Q. Les points-base de $|\varphi|$ sont doubles pour cette enveloppe; il en résulte que les sept points-base isolés du système $\{\varphi_1\}$ sont les points O'_3, O'_4, ..., O'_8 doubles pour F′ et un point O, qui doit être double pour la quadrique Q, qui est donc un cône. De plus, les coniques γ_1, γ'_2 étant doubles pour l'enveloppe de $\{\varphi_1\}$ et simples pour F′, le cône Q doit passer par ces coniques.

Reprenons la représentation d'une surface cubique φ_1 sur le plan ϖ. Une seconde surface φ_1, soit φ'_1, coupe φ_1 suivant une courbe qui comprend les coniques γ_1, γ'_2; le restant de l'intersection est représenté sur ϖ par une courbe ψ_5, du cinquième ordre, passant une fois par les points A_0, A_1 et deux fois par les points A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}.

Faisons tendre d'une manière continue la surface φ'_1 vers la surface φ_1; l'intersection des deux surfaces, en dehors des coniques φ_1, φ'_2, tend vers une courbe formée de la courbe K_1 de φ_1 et d'une droite qui doit appartenir au cône Q. Dans le plan ϖ, la courbe ψ_5 doit donc tendre vers une courbe qui comprend la courbe $\overline{K}_1$. Le restant de cette courbe limite est une conique passant par les points A_1, A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}. Cette conique dégénère en les deux droites a_1, a_2 et a donc un point double en A_1. Par suite, à la limite, l'intersection de φ'_1 et de φ_1 se compose de la courbe K_1 et d'une droite, représentant le domaine du point A_1, passant par les points doubles de φ_1. Cette droite s'appuie sur les coniques γ_1, γ'_2 et appartient au cône Q.

Ce point établi, soient

$$\alpha_1 = 0, \beta_1 = 0. \alpha_2 = 0, \beta_2 = 0$$

les équations des plans σ_1, σ_2, d'une quadrique passant par γ_1, γ'_2 et d'une quadrique passant par γ_2, γ'_1. L'équation de F' doit être de la forme

$$\alpha_2 \beta_2 + \alpha_1 \beta_1 \varphi_2 = 0,$$

où φ_2 est une forme du second degré.

Si ξ', η', ζ' et ξ'', η'', ζ'' sont des formes linéaires, l'équation du système $\{\varphi_1\}$ s'écrit sous la forme

$$k^2 (\alpha_1 \beta_1 \xi' + \alpha_2 \xi'') + 2k (\alpha_1 \beta_1 \eta' + \alpha_2 \eta'') + \alpha_1 \beta_1 \zeta' + \alpha_2 \zeta'' = 0.$$

L'enveloppe de ce système a pour équation

$$(\alpha_1 \beta_1 \eta' + \alpha_2 \eta'')^2 - (\alpha_1 \beta_1 \xi' + \alpha_2 \zeta')(\alpha_1 \beta_1 \xi'' + \alpha_2 \zeta'') = 0,$$

c'est-à-dire

$$\alpha_1^2 \beta_1^2 (\eta'^2 - \xi'\zeta') + \alpha_1 \beta_1 \alpha_2 (2\eta'\eta'' - \xi'\zeta'' - \zeta'\xi') + \alpha_2^2 (\eta''_2 - \xi''\zeta'') = 0.$$

Posons, dans cette équation,

$$\alpha_2 \equiv \eta'^2 - \xi'\zeta', \beta_2 \equiv \eta''^2 - \xi''\zeta''.$$

Elle se réduit à

$$\alpha_2 [\alpha_1^2 \beta_1^2 + \alpha_1 \beta_1 (2\eta'\eta'' - \xi'\zeta'' - \zeta'\xi'') + \alpha_2 \beta_2] = 0$$

ou, en posant

$$\varphi_2 \equiv \alpha_1 \beta_1 + 2\eta'\eta'' - \xi'\zeta'' - \zeta'\xi'',$$

à

$$\alpha_2 (\alpha_2 \beta_2 + \alpha_1 \beta_1 \varphi_2) = 0.$$

Cette équation représente l'ensemble de la surface F' et du cône Q, d'équation $\alpha_2 = 0$, enveloppe du plan

$$k^2 \xi' + 2k\eta' + \zeta' = 0,$$

cône passant par les coniques γ_1, γ'_2.

Le point O, sommet de ce cône, appartient à la base du système $\{\varphi_1\}$.

6. Au lieu de raisonner en partant des quartiques elliptiques K_1 qui, avec la conique γ_1, forment des courbes Γ, nous eussions pu raisonner sur les quartiques elliptiques K_2 qui, avec la conique γ_2, forment également des courbes Γ. Cela nous eût conduit à un système de surfaces cubiques $\{\varphi_2\}$ dont l'enveloppe doit être formée de la surface F' et d'un cône passant par les coniques γ_2, γ'_1.

Il est aisé de voir que le système $\{\varphi_2\}$ a pour équation

$$k^2(\alpha_1\beta_1\xi'' + \beta_2\xi') + 2k(\alpha_1\beta_1\eta'' + \beta_2\eta') + \alpha_1\beta_1\zeta'' + \beta_2\zeta' = 0.$$

L'enveloppe de ce système est, en effet, la surface

$$\beta_2(\alpha_2\beta_2 + \alpha_1\beta_1\varphi_2) = 0,$$

qui comprend la surface F' comme partie et est complétée par le cône $\beta_2 = 0$, enveloppe du plan

$$k_2\xi'' + 2k\eta'' + \zeta'' = 0.$$

7. Revenons à la surface F, dont les équations peuvent s'écrire (cfr. n° 2)

$$x_4\beta_1 = \alpha_2,\ x_5\alpha_1 = \beta_2,\ x_4x_5 + \varphi_e = 0.$$

A la surface φ_1 correspond dans S_5 l'hyperquadrique

$$k^2(\alpha_1\xi' + x_4\xi'') + 2k(\alpha_1\eta' + x_4\eta'') + \alpha_1\zeta' + x_4\zeta'' = 0,$$

touchant la surface F le long d'une courbe qui correspond à une courbe K_1, c'est-à-dire le long d'une courbe $\Gamma - \gamma_1$. C'est une courbe du huitième ordre ayant un point triple en O_1 et passant simplement par les points $O_2, O_3, \ldots, O_8$.

Cela étant, considérons dans un espace S_6 la surface F_0 d'équations

$$x_4\beta_1 = \eta'^2 - \xi'\zeta',\ x_5\alpha_1 = \eta''^2 - \xi''\zeta'',$$
$$x_4x_5 + \alpha_1\beta_1 + 2\eta'\eta'' - \xi'\zeta'' - \zeta'\xi'' = 0,$$
$$x_6^2 = k^2(\alpha_1\xi' + x_4\xi'') + 2k(\alpha_1\eta' + x_4\eta'') + \alpha_1\zeta' + x_4\zeta''.$$

Elle contient une involution du second ordre, engendrée par l'homologie

$$x'_0 : x'_1 : \ldots : x'_5 : x'_6 = x_0 : x_1 : \ldots : x_5 : -x_6,$$

ayant pour image la surface F et pour points de diramation sur cette surface les points $O_1, O_2, \ldots, O_8$; elle est donc de genres un.

En partant de l'équation d'une surface φ_2, on obtient de même les équations d'une surface

$$x_4\beta_1 = \eta'^2 - \xi'\zeta',\ x_5\alpha_1 = \eta''_2 - \xi''\zeta'',$$
$$x_4x_5 + \alpha_1\beta_1 + 2\eta'\eta'' - \xi'\zeta'' - \zeta'\xi'' = 0,$$
$$x_6^2\,x^2(\beta_1\xi'' + x_5\xi') + 2k(\beta_1\eta'' + x_5\eta') + \beta_1\zeta'' + x_5\zeta',$$

projectivement identique à F_0 (il suffit d'échanger x_4 et β_1, x_5 et α_1).

En utilisant une remarque faite plus haut (n° 2), on voit que la surface F′ peut également être transformée birationnellement en une surface

$$x_4\alpha_1 = \alpha_2,\ x_5\beta_1 = \beta_2,\ x_4x_5 + \varphi_2 = 0,$$

qui possède également huit points doubles coniques.

On voit aisément que cette seconde surface représente également une involution du second ordre appartenant à une surface de genres un, dont les équations peuvent s'écrire

$$x_4\alpha_1 = \eta'^2 - \xi'\zeta',\ x_5\beta_1 = \eta''^2 - \xi''\zeta'',$$
$$x_4x_5 + \alpha_1\beta_1 + 2\eta'\eta'' - \xi'\zeta'' - \zeta'\xi'' = 0,$$
$$x_6^2 = k^2(\alpha_1\xi' + x_4\xi'') + 2k(\alpha_1\eta' + x_4\eta'') + \alpha_1\zeta' + x_4\zeta''.$$

Nous avons déjà signalé qu'une surface de genres un, image d'une involution du second ordre appartenant à une surface de genres un, représente des involutions du second ordre appartenant à d'autres surfaces de genres un [3]. Le résultat obtenu ici n'est d'ailleurs qu'un cas particulier des résultats plus généraux que nous avons établis.

Liége, le 29 juin 1945.

(3) Sur une propriété des surfaces de genres un et de rang deux (*Bull. Acad. roy. de Belgique*, 1943, pp. 622-636).

M. HAYEZ, Imprimeur de l'Académie royale de Belgique, rue de Louvain, 112, Bruxelles.
(Domicile légal: rue de la Chancellerie, 4)