Extrait du *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liège*.
Séance du 17 janvier 1946. — N° 1.

Observations sur les surfaces algébriques de rang trois,

par Lucien GODEAUX, Membre de la Société.

Nous appelons brièvement surface de rang trois une surface algébrique qui représente les groupes d'une involution cyclique d'ordre trois, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique. Nous avons déjà considéré à plusieurs reprises de telles surfaces [1]. Dans cette note, nous voudrions apporter quelques compléments à nos recherches antérieures.

1. Soit F une surface algébrique contenant une involution cyclique I_3, d'ordre trois, n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Ceux-ci sont de deux sortes : les points unis parfaits, dans le domaine desquels la transformation birationnelle T de F en soi, génératrice de l'involution I_3, détermine l'identité et les points unis non parfaits, dans le domaine desquels T détermine une involution d'ordre trois, ayant deux points unis.

Sur la surface F nous pouvons construire un système linéaire complet $|C|$, dépourvu de points-base, transformé en soi par T et contenant trois systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution I_3, le premier, $|C_0|$, étant dépourvu de points-base, les deux autres, $|C_1|$, $|C_2|$, ayant pour points-base les points unis de I_3.

Soient α le nombre des points unis parfaits, β le nombre des points unis non parfaits de I_3. Nous avons établi que les courbes C_1 passent simplement, avec une tangente variable, par α_1 des points unis parfaits, doublement par les $\alpha_2 = \alpha - \alpha_1$ points unis parfaits restants, les tangentes étant variables, enfin simplement par les β points unis non parfaits, en y touchant une des directions unies. Les courbes C_2 passent doublement par les α_1 premiers points unis parfaits, simplement par les α_2 autres, les tangentes étant variables, simplement par les β points unis non parfaits en y touchant la seconde direction unie pour T.

Désignons par r_0 la dimension du système $|C_0|$ et rapportons

[1] Recherches sur les involutions cubiques appartenant à une surface algébrique (*Bull. Acad. roy. de Belgique*, 1921, pp. 105-124); Sur les involutions cycliques du troisième ordre appartenant à une surface algébrique (*Ibid.*, 1936, pp. 770-780). Voir aussi notre exposé sur Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (*Actual. scient.*, Paris, Hermann, 1935).

projectivement les courbes C_0 aux hyperplans d'un espace à r_0 dimensions. A F correspond une surface Φ, image de l'involution I_3. Soient n le degré et π le genre du système $|\Gamma|$ des sections hyperplanes de Φ (cette surface est donc d'ordre n). Les courbes C_0 et par suite les courbes C sont de degré $3n$ et de genre $3\pi - 2$. Aux courbes C_1, C_2 correspondent sur Φ des courbes Γ_1, Γ_2.

Aux α points unis parfaits de I_3 correspondent sur Φ des points de diramation qui sont des points triples à cônes tangents elliptiques de cette surface. Chacun de ces points est équivalent à une courbe elliptique de degré -3; nous désignerons ces courbes par $a_1, a_2, \ldots, a_\alpha$. Aux β points unis non parfaits de I_3 correspondent sur Φ des points de diramation qui sont des points doubles biplanaires ordinaires; chacun de ceux-ci est équivalent à l'ensemble de deux courbes rationnelles de degré -2, se coupant en un point. Nous désignerons par b_{11} et b_{12}, b_{21} et b_{22}, ..., $b_{\beta 1}$ et $b_{\beta 2}$ ces β couples de courbes rationnelles.

Cela étant, nous avons les relations fonctionnelles

$$3\Gamma \equiv 3\Gamma_1 + \sum_1^{\alpha_1} a_i + 2\sum_{\alpha_1+1}^{\alpha} a_i + 2\sum_1^{\beta} b_{i1} + \sum_1^{\beta} b_{i2},$$

$$3\Gamma \equiv 3\Gamma_2 + 2\sum_1^{\alpha_1} a_i + \sum_{\alpha_1+1}^{\alpha} a_i + \sum_1^{\beta} b_{i1} + 2\sum_1^{\beta} b_{i2}.$$

Le système $|\Gamma_1|$ est de degré et de genre respectifs

$$n - \frac{1}{3}(\alpha + 3\alpha_2 + 2\beta), \qquad \pi - \frac{1}{3}(\alpha + 2\alpha_2 + \beta).$$

Le système $|\Gamma_2|$ est de degré et de genre respectifs

$$n - \frac{1}{1}(\alpha + 3\alpha_1 + 2\beta), \qquad \pi - \frac{1}{3}(\alpha + 2\alpha_1 + \beta).$$

2. Désignons par p_a, $p^{(1)}$ le genre arithmétique et le genre linéaire de la surface Φ, par p^*_a, $p^{*(1)}$ ceux de la surface F. Nous avons

$$12(p^*_a + 1) = 36(p_a + 1) - 4\alpha - 8\beta,$$
$$p^{*(1)} - 1 = 3(p^{(1)} - 1) + \alpha.$$

Les dimensions r_0, r_1, r_2 de $|\Gamma|$, $|\Gamma_1|$, $|\Gamma_2|$ satisfont, d'après le théorème de Riemann-Roch, aux inégalités

$$r_0 \geq p_a + n - \pi + 1,$$

$$r_1 \geq p_a + n - \pi + 1 - \frac{1}{3}(\alpha_2 + \beta),$$

$$r_3 \geq p_a + n - \pi + 1 - \frac{1}{3}(\alpha_1 + \beta).$$

Si r est la dimension de $|C|$, on a

$$r \geq 3p_a + 3n - 3\pi + 5 - \frac{1}{3}(\alpha + 2\beta).$$

D'après la théorie des homographies cycliques, on a

$$r_0 + r_1 + r_2 + 3 = r + 1.$$

On peut toujours supposer $|C|$ régulier, quitte à le remplacer par un de ses multiples suffisamment élevé. On voit immédiatement que dans ces conditions, les systèmes $|\Gamma|$, $|\Gamma_1|$ et $|\Gamma_2|$ sont également réguliers.

3. Fixons l'attention sur un point uni P de seconde espèce et soient p_1, p_2 les tangentes unies à F en ce point. Les courbes C_1 touchent en P l'une de ces tangentes, par exemple p_1, et ces courbes ont deux points d'intersection absorbés en P.

Considérons les courbes C_1 assujetties à toucher en P une droite (tangente à F) distincte de p_1, p_2. Ces courbes, que nous désignerons par C^*_1, ont en P un point double et trois cas peuvent se présenter :

a) Les deux tangentes sont confondues avec p_1;

b) Les tangentes sont p_1, p_2;

c) Les deux tangentes sont confondues avec p_2.

Le degré effectif de $|C^*_1|$ doit être multiple de 3 et il en est de même du nombre des points d'intersection variables des courbes C_1 et C^*_1. Comme il y a deux points d'intersection de deux courbes C_1 absorbés en P, le nombre x des points d'intersection des courbes C_1, C^*_1 absorbés en P, diminué de 2, doit être multiple de 3. Dans le premier cas, il y a 3 ou 4 points d'intersection absorbés suivant que P est, pour une courbe C^*_1, un cuspide ou un tacnode. Dans le second cas, il y a 3 points d'intersection absorbés. Seul le troisième cas peut donc se présenter.

Le nombre de points d'intersection variables d'une courbe

C^*_1 et d'une courbe C_2, absorbés en P, diminué de 1, doit être multiple de 3; donc les courbes C^*_1 ont un tacnode en P, la tangente tacnodale étant p_2.

De même, les courbes C_2, qui touchent p_2 en P, assujetties à toucher en ce point une droite distincte de p_2, acquièrent un tacnode en ce point, la tangente tacnodale étant p_1.

4. Considérons maintenant les courbes C^*_1 assujetties à toucher en P une droite distincte de p_2 et désignons-les par C^{**}_1. Ces courbes possèdent un point triple en P et doivent rencontrer les courbes C_1 en $3x+2$ points confondus en P et les courbes C_2 en $3y+1$ points confondus en P, x et y étant des entiers positifs ou nuls.

Il est facile de voir que l'on a $x=y=1$. En P, les courbes C^{**}_1 ont un point triple, deux tangentes étant confondues avec p_1 et une avec p_2. De plus, le point infiniment voisin de P sur la droite p_1 est double pour les courbes en question.

Si l'on appelle C^*_2 les courbes C_2 ayant un tacnode en P, de tangente tacnodale p_1, et C^{**}_2 les courbes C^*_2 ayant un point triple en P, ces courbes ont deux tangentes confondues avec p_2 et une tangente confondue avec p_1. Le point infiniment voisin de P sur t_2 est double pour les courbes C^{**}_2.

5. On peut retrouver dans une certaine mesure les résultats précédents de la manière suivante : Considérons le système linéaire le plus ample appartenant à l'involution I_3 et comprenant les courbes C_1+C_2. Soit Φ_1 le modèle projectif de la surface Φ qui a pour sections hyperplanes les courbes qui correspondent à celles du système linéaire envisagé. Au point de p_1 infiniment voisin de P correspond sur Φ_1 une droite b_1 et au point analogue situé sur p_2 correspond une droite b_2. Les droites b_1, b_2 se rencontrent en un point qui représente l'involution du troisième ordre engendrée par T dans le domaine de P.

Une courbe Γ_2 tracée sur Φ_1 coupe b_2 en un point, mais ne rencontre pas b_1. Les hyperplans passant par cette courbe Γ_2 rencontrent encore Φ_1 suivant les courbes Γ_1. Les hyperplans passant par la courbe Γ_2 et par la droite b_2 coupent encore Φ_1 suivant les courbes qui correspondent aux courbes C^*_1; ces courbes ne rencontrent plus b_1 mais rencontrent b_2 en deux points variables.

Considérons les hyperplans passant par une courbe Γ_2 et par les droites b_1, b_2; ils coupent encore Φ_1 suivant les courbes qui correspondent aux courbes C^{**}_1; ces courbes rencontrent la droite b_1 en deux points et la droite b_2 en un point variables.

6. Considérons le système complet $|2C|$; il contient également trois systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution I_3; nous dénoterons ces systèmes par $|(2C)_0|$, $|(2C)_1|$ et $|(2C)_2|$.

Si nous rapportons projectivement les courbes C aux hyperplans d'un espace linéaire à r dimensions, la surface F se transforme birationnellement en une surface normale sur laquelle la transformation T est déterminée par une homographie cyclique. Les invariants de cette homographie sont l'unité, ε, ε^2, où ε est une racine cubique primitive de l'unité. On attache évidemment un de ces invariants à chacun des systèmes $|C_0|$, $|C_1|$, $|C_2|$ et nous supposerons précisément qu'à $|C_0|$, $|C_1|$, $|C_2|$ sont attachés respectivement 1, ε, ε^2. Dans ces conditions, aux systèmes $|(2C)_0|$, $|(2C)_1|$, $|(2C)_2|$ sont respectivement attachés les invariants 1, ε, ε^2.

Le système $|(2C)_0|$ contient les courbes $2C_0$ et C_1+C_2. Ces dernières courbes ont, au point P, le même comportement que les courbes C_0 passant par P.

Le système $|(2C)_1|$ contient les courbes C_0+C_1, qui ont en P le même comportement que les courbes C_1 et les courbes $2C_2$, qui ont en P le même comportement que les courbes C^{*}_1.

Le système $|(2C)_2|$ contient les courbes C_0+C_2, qui se comportent en P comme les courbes C_2 et les courbes $2C_1$, qui se comportent en P comme les courbes C^{*}_2.

De même, le système $|3C|$ contient trois systèmes $|(3C)_0|$, $|(3C)_1|$, $|(3C)_2|$ appartenant à l'involution I_3. Le système $|(3C)_0|$ contient les courbes $3C_0$, $3C_1$, $3C_2$, $C_0+C_1+C_2$. Le système $|(3C)_1|$ contient les courbes $2C_0+C_1$, C_0+2C_2 et $2C_1+C_2$, ces dernières se comportant comme les courbes C^{**}_1 au point P. Enfin le système $|(3C)_2|$ contient les courbes $2C_0+C_2$, C_0+2C_1 et C_1+2C_2, ces dernières ayant en A le même comportement que les courbes C^{**}_2.

7. Nous allons supposer, pour plus de simplicité, que l'involution I_3 est dépourvue de points unis parfaits; seuls les points unis non parfaits nous intéressent dans cette étude. On supposera donc $\alpha=0$.

Rapportons projectivement les courbes Γ_1 aux hyperplans d'un espace linéaire à r_1 dimensions. A la surface Φ correspond birationnellement une surface Φ_1 sur laquelle les courbes rationnelles infiniment petites de la surface Φ, b_{11}, b_{21}, ..., $b_{\beta 1}$ sont des droites ne se rencontrant pas deux à deux. Nous continuerons à désigner ces droites par les mêmes symboles.

Appelons C^{*}_{1} les courbes C_1 assujetties à toucher en chacun des points unis de I_3 une droite distincte des tangentes unies à la surface. Si nous désignons par P_1, P_2, ..., P_β les points unis, par p_{11}, p_{21}, ..., $p_{\beta 1}$ les tangentes unies pour I_3 issues de ces points et tangentes aux courbes C_1, par p_{12}, p_{22}, ..., $p_{\beta 2}$ les autres tangentes unies en ces points, les courbes C^{*}_{1} ont en P_1, P_2, ..., P_β des tacnodes, les tangentes tacnodales étant respectivement p_{21}, p_{22}, ..., $p_{\beta 2}$. Aux courbes C^{*}_{1} correspondent sur Φ_1 des sections hyperplanes, en nombre $\infty^{r_1-\beta}$ en général, rencontrant les droites b_{11}, b_{21}, ..., $b_{\beta 1}$ en des points fixes représentant les domaines des points infiniment voisins de P_1, P_2, ..., P_β situés sur les droites p_{12}, p_{22}, ..., p_β. Ces points sont donc doubles coniques pour la surface Φ_1.

L'ordre de la surface Φ_1 est égal à $n - \frac{2}{3}\beta$ et le genre de ses sections hyperplanes Γ_1 est égal à $\pi - \frac{1}{3}\beta$. Posons $\beta = 3\beta'$, de sorte que $|\Gamma_1|$ a le degré $n - 2\beta'$ et le genre $\pi - \beta'$. Les courbes Γ^{*}_{1} ont le degré $n - 8\beta'$ et le genre $\pi - 4\beta'$.

Appelons C^{**}_{1} les courbes C_1 ayant en chaque point P_i un point triple, un point double infiniment voisin sur p_{i1} et un point simple infiniment voisin sur p_{i2}. Aux courbes C^{**}_{1} correspondent sur Φ_1 les sections de cette surface par les hyperplans contenant les β droites b_{11}, b_{21}, ..., $b_{\beta 1}$; ces courbes rencontrent ces droites chacune en deux points variables et passent simplement par les β points doubles coniques de Φ_1. Le système $|\Gamma^{**}_{1}|$ a le degré $n - 14\beta'$ et le genre $\pi - 14\beta'$.

Désignons par Φ_2 la surface qui a pour sections hyperplanes les courbes Γ^{*}_{1} et qui est d'ordre $n - 8\beta'$. Sur cette surface, les courbes b_{12}, b_{22}, ..., $b_{\beta 2}$ sont des coniques ne se rencontrant pas deux à deux et aux courbes b_{11}, b_{21}, ..., $b_{\beta 1}$ correspondent des points doubles coniques de Φ_2 situés respectivement sur les coniques précédentes. Les courbes Γ^{**}_{1} sont découpées sur Φ_2 par les hyperplans passant par ces β points doubles.

Désignons par Φ_3 la surface dont les sections hyperplanes sont les courbes Γ^{**}_{1}; elle est d'ordre $n - 14\beta'$. Sur cette surface, les courbes b_{11}, b_{21}, ..., $b_{\beta 1}$ sont des coniques ne se rencontrant pas deux à deux et les courbes b_{12}, b_{22}, ..., $b_{\beta 2}$ sont des droites ne se rencontrant pas deux à deux, mais la droite b_{i2} coupe en un point la conique b_{i1}.

8. Nous avons, sur Φ et par suite sur Φ_1, Φ_2, Φ_3,

$$3\,\Gamma \equiv 3\,\Gamma_1 + 2\,\Sigma\, b_{i1} + \Sigma\, b_{i2} \equiv 3\,\Gamma_2 + \Sigma\, b_{i1} + 2\,\Sigma\, b_{i2}.$$

On a, d'autre part,

$$\Gamma_1^* \equiv \Gamma_1 - \Sigma\, b_{i2}, \qquad \Gamma_1^{**} \equiv \Gamma_1 - \Sigma\,(b_{i1} + b_{i2})\,;$$

donc

$$3\,\Gamma \equiv 3\,\Gamma_1^* + 2\,\Sigma\, b_{i1} + 4\,\Sigma\, b_{i2} \equiv 3\,\Gamma_1^{**} + 5\,\Sigma\, b_{i1} + 4\,\Sigma\, b_{i2}.$$

Définissons les courbes Γ^*_2, Γ^{**}_2 comme nous avons défini les courbes Γ^*_1, Γ^{**}_1, en intervertissant les rôles des courbes b_{i1}, b_{i2}. Nous avons

$$\Gamma_2^* \equiv \Gamma_2 - \Sigma\, b_{i1}, \qquad \Gamma_2^{**} \equiv \Gamma_2 - \Sigma\,(b_{i1} + b_{i2})\,;$$

donc

$$3\,\Gamma_1 \equiv 3\,\Gamma_2^* + 2\,\Sigma\, b_{i1} + \Sigma\, b_{i2}.$$

Sur la surface Φ_1, les courbes Γ^*_2 sont d'ordre $n - 4\beta'$. L'interprétation projective de la relation précédente est la suivante : Parmi les hypersurfaces cubiques, il en est qui touchent Φ_1 le long des droites b_{11}, b_{21}, ..., $b_{\beta 1}$ et qui osculent la surface le long d'une courbe Γ^*_2. Ces dernières coupent en deux points chacune des droites b_{11}, b_{21}, ..., $b_{\beta 1}$, mais ne passent pas par les points doubles de Φ_1.

On a de même la relation, sur Φ_1,

$$3\,\Gamma_1 \equiv 3\,\Gamma_2^{**} + 2\,\Sigma\, b_{i1} + 4\,\Sigma\, b_{i2}.$$

Projectivement, cela signifie que parmi les hypersurfaces cubiques envisagées, celles qui osculent Φ_1 le long d'une courbe Γ^{**}_2 ont des points doubles aux points doubles de la surface.

Sur la surface Φ_2, on a la relation fonctionnelle

$$3\,\Gamma_1^* \equiv 3\,\Gamma_2^{**} + 2\,\Sigma\, b_{i1} + \Sigma\, b_{i2}.$$

Projectivement, cela signifie que parmi les hypersurfaces cubiques passant par les coniques b_{12}, b_{22}, ..., $b_{\beta 2}$ de la surface Φ^*_1, il en est qui osculent la surface le long de chaque courbe Γ^{**}_2. Celles-ci sont des courbes d'ordre $n - 10\beta'$.

L'existence d'une des hypersurfaces cubiques osculant soit Φ_1, soit Φ_2, dont il vient d'être question, suffit d'ailleurs pour pouvoir affirmer que Φ est l'image d'une involution cyclique d'ordre trois appartenant à une surface F.

Liége, le 2 janvier 1946.

M. HAYEZ, Imprimeur de l'Académie royale de Belgique, rue de Louvain, 112, Bruxelles.
(Domicile légal : rue de la Chancellerie, 4)