Extrait du *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liège*,
Séance du 20 juin 1946. — N° 6.

Sur une involution rationnelle du septième ordre appartenant à une surface irrégulière,

par Lucien GODEAUX, Membre de la Société.

Dans quelques travaux antérieurs ([1]) nous avons étudié les involutions n'ayant qu'un nombre fini de points unis appartenant à la surface F, représentant les couples de points non ordonnés d'une courbe L de genre trois. L'une de ces involutions, du second ordre, s'obtient en considérant les groupes de deux points de F, représentant deux couples de points de la courbe L formant un groupe canonique de celles-ci. La surface Φ, qui représente cette involution, a été étudiée par G. Humbert ([2]). Nous avons pu établir que les autres involutions proviennent d'involutions cycliques appartenant à la courbe L. Parmi celles-ci se trouve une involution rationnelle d'ordre sept et il peut donc exister, sur F, une involution cyclique I_7 d'ordre sept, présentant six points unis (la courbe L est naturellement particulière). Si nous désignons par I_2 l'involution du second ordre dont Φ est l'image, les involutions I_2 et I_7 sont permutables, de sorte qu'à I_7 correspond sur Φ une involution I_7'. D'autre part, sur la surface F' image de l'involution I_7 de F, il correspond à I_2 une involution I_2'. Les involutions I_7', I_2' ont pour image une même surface Φ'.

([1]) Sur des surfaces liées à une courbe de genre trois (*Bull. de l'Acad. roumaine*, 1915-1916, pp. 271-274, 283-286, 373-378); Mémoire sur les surfaces algébriques liées à une courbe de genre trois (*Arxius de l'Institut de Ciencias de Barcelona*, 1917, pp. 89-107); Sur une involution rationnelle douée de trois points de coïncidence appartenant à une surface de genre trois (*Bull. Acad. roy. de Belgique*, 1921, pp. 653-665, 694-702).

([2]) Sur une surface du sixième ordre liée aux fonctions abéliennes de genre trois (*Journal de Liouville*, 1896, pp. 263-293; *Œuvres*, t. II, pp. 269-296).

Nous avons pu démontrer [3] que la surface Φ' est rationnelle et en déduire la rationalité de la surface F'. Ce résultat était donc obtenu par une voie indirecte. Dans cette note, nous établissons directement la rationalité de F' sans utiliser la surface Φ. Il nous a paru intéressant d'établir directement *l'existence d'une involution rationnelle, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface irrégulière*.

1. Soit, dans un plan τ, L la courbe d'ordre quatre et de genre trois, d'équation

$$a_1 x_1^3 x_2 + a_2 x_2^3 x_3 + a_3 x_3^3 x_1 = 0.$$

Elle est transformée en elle-même par l'homographie de période 7

$$\begin{pmatrix} x_1 & \varepsilon x_2 & \varepsilon^5 x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

ε étant une racine septième primitive de l'unité. Cette homographie engendre sur la courbe L une involution rationnelle d'ordre sept, ayant pour points unis les sommets du triangle de référence.

Désignons par F la surface qui représente les couples de points non ordonnés de la courbe L. On sait qu'elle a les caractères $p_a = 0, p_g = 3, p^{(1)} = 7, P_2 = 6$ ... Elle possède deux transformations birationnelles en soi, à savoir :

a) Une transformation θ, involutive, obtenue de la manière suivante : Deux points de F sont homologues dans θ lorsque les couples de points qui leur correspondent sur la courbe L forment un groupe canonique de cette courbe.

b) Une transformation T, de période sept ; à un point P de F, représentant le couple de points P_1, P_2 de L, T fait correspondre le point P' de F, représentant le couple des points P'_1, P'_2 de L que l'homographie (1) fait correspondre à P_1, P_2.

Nous avons donc, sur F, deux involutions : l'une, I_2, d'ordre deux, est engendrée par θ ; l'autre, I_7, d'ordre sept, est engendrée par T. Nous désignerons par Φ la surface image de I_2, par F' la surface image de I_7. La surface Φ est la surface de Humbert, de caractères $p_a = p_g = 3, p^{(1)} = 4, P_2 = 6, \ldots$.

2. Aux couples de points de L contenant un point fixe correspondent sur F les points d'une courbe K, de genre trois. La

(3) Sur une involution rationnelle... (*Loc. cit.*); Sur l'existence d'involutions rationnelles n'ayant qu'un nombre fini de points unis appartenant à une surface algébrique (*Bull. des Sc. mathém.*, 1933, pp. 7-14).

courbe K engendre un système continu $\{K\}$, ∞^1, de degré un et d'indice deux. Le système $\{K\}$ admet comme enveloppe la courbe K_0, de genre trois, représentant les couples de points confondus de L.

Soient P un point de L, p une droite passant par P et coupant encore L en P_1, P_2, P_3. Les points de F qui représentent les couples $P_2 P_3$, $P_3 P_1$, $P_1 P_2$ engendrent, lorsque p tourne autour de P, une courbe H; ils forment, sur cette courbe, les groupes d'une série linéaire g_3^1. Chaque fois que la droite p est tangente à L en un point distinct de P, le groupe correspondant de la série g_3^1 admet un point double. Il en résulte que si x est le genre de la courbe H, on a

$$2(3+x-1)=10;$$

d'où $x = 3$.

La courbe H, de genre trois, engendre un système continu, ∞^1, $\{H\}$, de degré un et d'indice deux. Le système $\{H\}$ est d'ailleurs le transformé par θ du système $\{K\}$. Une courbe H et une courbe K se coupent en deux points.

Une droite p de σ coupe L en quatre points formant six couples auxquels correspondent six points de F. Lorsque p tourne autour d'un point, ces six points engendrent une courbe C, sur laquelle ils forment les groupes d'une série g_6^1. Lorsque la droite p est tangente à L, le groupe correspondant de la série g_6^1 contient deux points doubles. Si x est le genre de C, on a donc

$$2(6+x-)=24;$$

d'où $x = 7$. La courbe C engendre un réseau $|C|$, de genre sept et de degré six, qui est le système canonique de la surface (Severi, De Franchis).

On a

$$|C| = |K+H|.$$

Sur une courbe K, les courbes C découpent une série g_3^1 et il y a donc une seule courbe C contenant une courbe K déterminée. Elle est complétée par la courbe H, que θ fait correspondre à la courbe K considérée.

De même, les courbes C découpent sur une courbe H une série g_3^1 (celle qui a été considérée plus haut) et l'on obtient un résultat analogue au précédent.

3. Soient O_1, O_2, O_3 les sommets du triangle de référence du plan σ; ce sont les points unis de l'homographie (1). Désignons par A_{11}, A_{22}, A_{33} les points de F (appartenant à K_0) qui représentent les couples $O_1 O_1$, $O_2 O_2$, $O_3 O_3$ et par A_{23}, A_{31}, A_{12} les points de F qui représentent les couples $O_2 O_3$, $O_3 O_1$, $O_1 O_2$. Ces six points A sont les points unis de l'involution I_7.

Désignons par K_i la courbe K qui représente les couples de points de L dont O_i fait partie et par H_i la courbe H que θ fait correspondre à K_i ($i = 1, 2, 3$). Les courbes K_1, K_2, K_3 touchent respectivement K_0 en A_{11}, A_{22}, A_{33}. Les courbes K_2, K_3 se coupent en A_{23}, les courbes K_3, K_1 en A_{31}; enfin, les courbes K_1, K_2 en A_{12}. De plus, chacune des courbes K_1, K_2, K_3, H_1, H_2, H_3 est transformée en soi par T.

Examinons la position de la courbe H_1 par rapport aux courbes K_1, K_2, K_3.

Si nous considérons dans le plan σ le faisceau de droites de sommet O_1, nous constatons qu'il contient deux tangentes d'inflexion à la courbe L : la droite $x_2 = 0$, tangente d'inflexion en O_1, et la droite $x_3 = 0$, tangente d'inflexion en O_2. On en conclut que la courbe H_1 passe par les points A_{11}, A_{13} et A_{22}.

Considérons une droite p passant par O_1 et rencontrant encore L en P_1, P_2, P_3. Lorsque p tend vers la droite $x_2 = 0$, P_1 et P_2 tendent vers O_1 et P_3 vers O_3. Le point de F qui représente $P_1 P_2$ tend vers A_{11} et les points qui représentent les couples $P_1 P_3$, $P_2 P_3$ tendent vers A_{31}. Observons, d'autre part, que les points qui représentent les couples $P_1 P_3$, $P_2 P_3$ tendent vers des points de K_3; par conséquent la courbe H_1 passe par A_{11} sans y toucher K_1 et touche K_3 au point A_{31}.

Lorsque p tend vers la droite $x_3 = 0$, P_1, P_2, P_3 tendent vers O_2. Les points de F qui représentent les couples $P_1 P_3$, $P_2 P_3$, $P_1 P_2$ tendent, deux vers des points de la courbe K_2, le dernier vers un point de la courbe H_2. On en conclut que H_1 touche la courbe K_2 au point A_{22} et y rencontre la courbe H_2.

On établit de même que H_2 passe par A_{22} sans y toucher K_2, touche K_1 en A_{12} et K_3 en A_{33}. La courbe H_3 passe par A_{33} sans y toucher K_3, touche K_2 en A_{23} et K_1 en A_{11}.

4. Appelons C_1 les courbes C qui correspondent aux faisceaux de droites du plan σ dont les sommets sont sur la droite $x_1 = 0$ ou $O_2 O_3$. Considérons un point R de $O_2 O_3$ et soient p une droite passant par R; P_1, P_2, P_3, P_4 ses points de rencontre avec L. Aux couples de points $P_1 P_2$, $P_1 P_3$, ... , $P_3 P_4$ correspondent six points d'une courbe C_1. Lorsque p tend vers la droite $x_1 = 0$, le point P_1 tend vers O_2 et les points P_2, P_3, P_4 tendent vers O_3. Des six points correspondants sur la courbe C_1 considérée, trois tendent vers A_{23} et les trois autres vers A_{33}. Les trois premiers tendent vers un même point de la courbe K_2, les trois derniers vers un même point de la courbe H_2. On en conclut que la base du faisceau $|C|$ est constituée par les points A_{23} et A_{33}; en A_{23}, les courbes C_1 osculent la courbe K_2, et en A_{33} elles osculent la courbe H_2.

Le faisceau $|C_1|$ est transformé en soi par T et contient deux courbes invariantes : $K_2 + H_2$ et $K_3 + H_3$.

De même, les courbes C_2, qui correspondent aux faisceaux de rayons de σ dont les centres sont sur la droite $x_2 = 0$, forment un faisceau; elles osculent la courbe K_3 en A_{31} et la courbe H_3 en A_{11}. Les courbes C_3, qui correspondent aux faisceaux de rayons de σ dont les centres sont sur la droite $x_3 = 0$, forment un faisceau; elles osculent la courbe K_1 en A_{31} et la courbe H_1 en A_{22}.

5. Envisageons le point A_{11}, uni pour I_7. Par ce point passent les courbes K_1, H_1, H_3 et K_0, transformées en elles-mêmes par T. Les courbes K_1, H_3 et K_0 se touchent en A_{11}; par conséquent le point infiniment voisin de A_{11} situé sur ces courbes est uni parfait pour l'involution I_7. Deux cas peuvent se présenter, suivant que tous les points infiniment voisins de A_{11} sont unis pour I_7 (A_{11} est alors uni parfait pour I_7) ou non.

Si A_{11} était uni parfait pour I_7, les courbes C passant par A_{11} se toucheraient (sans s'osculer) en A_{11}. Or, ces courbes sont les courbes C_2; elles osculent la courbe H_2 en A_{11} et par conséquent s'osculent en ce point.

Il en résulte que seul le point infiniment voisin de A_{11} sur K_1, H_3, K_0 est uni parfait pour l'involution I_7.

De même, le point infiniment voisin de A_{22} sur K_2, H_1, K_0 et le point infiniment voisin de A_{33} sur K_3, H_2, K_0 sont unis parfaits pour l'involution I_7.

Le même raisonnement peut être repris pour les points A_{23}, A_{31}, A_{12}. Le point infiniment voisin de A_{23} sur la courbe K_2, le point infiniment voisin de A_{31} sur la courbe K_3 et le point infiniment voisin de A_{12} sur la courbe K_1 sont unis parfaits pour l'involution I_7.

Il résulte de tout ceci que les six points unis de l'involution I_7 sont du type que nous avons examiné dans une note antérieure [4]. En un tel point, il y a deux directions unies pour I_7; l'une est déterminée par le point uni parfait infiniment voisin; l'autre est déterminée par une suite de trois points unis infiniment voisins successifs dont le dernier est uni parfait.

On peut prendre comme surface image de l'involution I_7 une

---

[4] Recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (*Bull. Acad. roy. de Belgique*, 1930, pp. 450-467).

surface sur laquelle chacun des points de diramation est quadruple, le cône tangent étant formé d'un cône cubique et d'un plan coupant le cône suivant une seule génératrice. Cette singularité est équivalente à l'ensemble de deux courbes rationnelles : une cubique γ_3 et une droite γ_1 se coupant en un point. La cubique est de degré virtuel — 4 et la droite de degré virtuel — 2 ; les courbes canoniques éventuelles de la surface doivent rencontrer la cubique en deux points variables.

6. L'involution I_7 détermine sur chacune des courbes $K_1, K_2, K_3, H_1, H_2, H_3$ une involution d'ordre sept possédant trois points unis et par conséquent rationnelle. Par conséquent, à ces courbes correspondent sur la surface F' des courbes rationnelles que nous désignerons respectivement par $K'_1, K'_2, K'_3, H'_1, H'_2, H'_3$.

Prenons, pour modèle projectif de la surface F', une surface sur laquelle les points de diramation sont transformés en des couples de courbes rationnelles γ_3, γ_1. Nous désignerons par $\gamma_3^{ik}, \gamma_1^{ik}$ les courbes qui correspondent à un point uni A_{ik}.

Nous pouvons dresser le tableau suivant :

La courbe K'_1 coupe en un point chacune des courbes $\gamma_3^{11}, \gamma_3^{12}, \gamma_1^{31}$;
La courbe K'_2 coupe en un point chacune des courbes $\gamma_3^{22}, \gamma_1^{12}, \gamma_3^{23}$;
La courbe K'_3 coupe en un point chacune des courbes $\gamma_3^{33}, \gamma_3^{31}, \gamma_1^{23}$;
La courbe H'_1 coupe en un point chacune des courbes $\gamma_1^{11}, \gamma_3^{22}, \gamma_3^{31}$;
La courbe H'_2 coupe en un point chacune des courbes $\gamma_1^{22}, \gamma_3^{33}, \gamma_3^{12}$;
La courbe H'_3 coupe en un point chacune des courbes $\gamma_1^{33}, \gamma_3^{11}, \gamma_3^{23}$.

Si la surface F' possédait une courbe canonique, celle-ci devrait rencontrer chacune des courbes $\gamma_3^{11}, \gamma_3^{22}, \ldots, \gamma_3^{12}$ en deux points et avoir pour transformée, sur la surface F, une courbe canonique, c'est-à-dire une courbe de $|C|$. Cette courbe C devrait avoir des tacnodes en $A_{11}, A_{22}, \ldots, A_{12}$, ce qui est impossible puisque les seules courbes de $|C|$ appartenant à I_7 sont les courbes $K_1 + H_1$, $K_2 + H_2$, $K_3 + H_3$.

La surface F' est donc dépourvue de courbe canonique et son genre géométrique est $p_g = 0$.

Entre le genre arithmétique p_a de F et celui p'_a de F', on a la relation [5]

$$12\,(p_a + 1) = 7 \cdot 12\,(p'_a + 1) - 6 \cdot 12.$$

Actuellement, on a $p_a = 0$ et par conséquent $p'_a = 0$. La surface F' est donc régulière.

---

[5] Recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (*Bull. Acad. roy. de Belgique*, 1935, pp. 338-345).

7. Si la surface F′ possède une courbe bicanonique, celle-ci doit rencontrer en quatre points chacune des courbes $\gamma_3^{11}, \gamma_3^{22}, \dots,$ γ_3^{12}. Il lui correspond sur la surface F une courbe du système bicanonique $|2\,C|$ ayant des points quadruples en chacun des points A_{ik} et un point quadruple infiniment voisin de chacun de ces points.

La courbe en question devrait précisément avoir un point quadruple en A_{11} et un point quadruple infiniment voisin de A_{11} sur K_1; un point quadruple en A_{12} et un point quadruple infiniment voisin de A_{12} sur K_1; un point quadruple en A_{31}. Or, les courbes 2 C rencontrent K_1 en six points; donc si la courbe existait, elle comprendrait la courbe K_1 comme partie; elle comprendrait de même les courbes K_2 et K_3.

Après avoir défalqué les courbes K_1, K_2, K_3, il reste une courbe ayant un point triple en A_{11}, un point triple en A_{22} et un point double en A_{31}; cette courbe rencontre donc H_1 en huit points au moins. Or, les courbes 2 C rencontrent H_1 en six points; donc la courbe en question contient H_1 comme partie. Elle contient de même H_2 et H_3.

En résumé, si F′ possédait une courbe bicanonique, sa transformée sur F serait une courbe bicanonique de cette surface comprenant comme parties les courbes K_1, K_2, K_3, H_1, H_2, H_3, Cela est absurde, car la somme de ces courbes est une courbe tricanonique de F.

La surface F′ est donc dépourvue de courbe bicanonique et son bigenre est donc $P_2 = 0$. D'après le théorème de Castelnuovo, F′ est donc rationnelle ($p_a = P_2 = 0$).

Liége, le 11 juin 1946.

M. HAYEZ, Impr. de l'Académie royale, 112, rue de Louvain, Bruxelles
(Domicile légal : rue de la Chancellerie, 4)