

**Observations sur les variétés algébriques à trois dimensions
sur lesquelles l'opération d'adjonction est périodique,**

par LUCIEN GODEAUX, Membre de la Société.

Considérons une variété algébrique V_r à r dimensions et, sur cette variété, un système linéaire $|V_{r-1}|$, irréductible, de variétés algébriques à $r-1$ dimensions. Soient $|V'_{r-1}|, |V''_{r-1}|, \dots$ les systèmes adjoints successifs de $|V_{r-1}|$. Si quelques-uns de ces systèmes adjoints coïncident avec $|V_{r-1}|$ et si l'adjoint d'indice p est le premier de ces systèmes coïncidant avec $|V_{r-1}|$, il est naturel de dire que sur la variété V_r , l'opération d'adjonction a la période p . La variété V_r est alors dépourvue de variétés canonique, bicanonique, ..., $(p-1)$ -canonique, mais possède une variété p -canonique d'ordre zéro.

On sait que si la variété V_r est une surface ($r=2$), on a $p=1$ ou $p=2$. Nous montrerons dans cette note que dans le cas $r=3$, on a $p=1$.

La surface algébrique sur laquelle l'opération d'adjonction a la période deux, est la surface d'Enriques ($p_a=p_g=0$, $P_2=1$, $P_3=0$); elle peut être obtenue comme image d'une involution du second ordre, privée de points unis, appartenant à une surface de genres un ($p_a=P_4=1$), sur laquelle tout système est son propre adjoint (Enriques). Nous basant sur ce résultat, nous avons cherché à construire des variétés algébriques à trois dimensions, dépourvues de surface canonique mais possédant une surface pluricanonique d'ordre zéro comme images d'involutions appartenant à des variétés de genres un, sur lesquelles tout système linéaire coïncide avec son adjoint. Nous avons effectivement réussi à construire des variétés algébriques de genres $P_g=0$, $P_2=1$, $P_3=0$, $P_4=1$, ... et de genres $P_g=0$, $P_2=0$, $P_3=1$, $P_4=0$, ... Mais à la différence de ce qui se passe pour les surfaces, les involutions considérées possèdent des points unis et les variétés pluricanoniques d'ordre zéro existantes sont formées de surfaces fondamentales pour le système linéaire $|V_r|$ d'où l'on part. Nous avons ainsi été conduit à étendre la définition précédente en admettant la présence de composantes fixes des systèmes adjoints, fondamentales pour le système $|V_{r-1}|$. Nous précisons cette définition dans la suite.

Dans cette note, nous reprenons rapidement le cas bien connu des surfaces et nous étudions le cas des variétés à trois dimen-

sions, en nous bornant d'ailleurs à des variétés complètement régulières. Nous montrons ensuite comment les exemples dont il a été question plus haut s'encadrent dans la théorie développée.

1. Soient F une surface algébrique régulière, $|C|$ un système linéaire irréductible ∞^1 au moins, $|C'|$ son adjoint, $|C''|$ son biadjoint, ..., $|C^{(p)}|$ son p -ième adjoint. Supposons que, sur la surface F , l'opération d'adjonction ait la période p , c'est-à-dire que le système $|C^{(p)}|$ coïncide avec $|C|$, aucun des systèmes $|C'|$, $|C''|$, ..., $|C^{(p-1)}|$ ne coïncidant avec $|C|$.

On a

$$C'' \equiv 2C' - C, \quad C''' \equiv 3C' - 2C, \dots, \quad C^{(p)} \equiv pC' - (p-1)C$$

et, par conséquent, les systèmes $|pC|$ et $|pC'|$ coïncident. On peut reprendre ce raisonnement en remplaçant $|C|$ par l'un quelconque des systèmes $|C'|$, $|C''|$, ..., $|C^{(p-1)}|$ et par conséquent on a

$$|pC| = |pC'| = \dots = |pC^{(p-1)}|.$$

On en conclut que les systèmes $|C|$, $|C'|$, ..., $|C^{(p-1)}|$ ont le même genre π et le même degré $2\pi - 2$.

F étant une surface régulière, le système $|C''|$ découpe sur une courbe C la série canonique complète et par conséquent, si $p > 1$, le système $|C'|$ a la dimension $\pi - 1$. Le système $|C|$, adjoint à $|C^{(p-1)}|$, a de même la dimension $\pi - 1$.

Si $p > 2$, le système $|C''|$ découpe, sur une courbe C , une série d'ordre $2\pi - 2$ qui ne peut être la série canonique et a donc la dimension $\pi - 2$. La dimension de $|C''|$ est donc au plus égale à $\pi - 2$. D'autre part, $|C''|$ étant l'adjoint de $|C'|$, doit avoir la dimension $\pi - 1$. Si $p > 2$, nous sommes donc conduit à une contradiction et nous retrouvons le résultat bien connu : Si l'opération d'adjonction sur une surface régulière est périodique, la période est au plus égale à deux.

2. Soit V une variété algébrique à trois dimensions complètement régulière. Sur une telle variété, un système linéaire de surfaces $|F|$, irréductible, ∞^2 au moins, a la série caractéristique complète et son adjoint $|F'|$ découpe sur une surface F le

système canonique complet de cette surface ⁽¹⁾. De plus, les surfaces F sont nécessairement régulières ⁽²⁾.

Supposons que sur la variété V , l'opération d'adjonction ait la période p . Soient $|F|$ un système linéaire irréductible, ∞^2 au moins, de surfaces de genre arithmétique $p_a > 3$, $|F'|$, $|F''|$, ..., $|F^{(p)}|$ les adjoints successifs de $|F|$. Le système $|F^{(p)}|$ coïncide avec le système $|F|$ et est le premier adjoint pour lequel ce fait se présente.

Comme dans le cas des surfaces, on établit que l'on a

$$|pF| = |pF'| = \dots = |pF^{(p-1)}|.$$

Les surfaces F , F' , F'' , ..., $F^{(p-1)}$ ont par conséquent le même genre linéaire $p^{(1)}$ et le même genre arithmétique p_a . Elles sont de plus régulières et ont le même genre géométrique p_g .

Supposons $p > 1$. Le système $|F'|$ adjoint à $|F|$ découpe, sur une surface F , le système canonique complet et, d'autre part, il ne peut contenir $|F|$ comme partie; il a donc la dimension $p_a - 1$. Le système $|F|$ découpe sur une surface F un système complet, non spécial, de genre $p^{(1)}$ et de degré $p^{(1)} - 1$, donc de dimension au moins égale à p_a . La dimension de $|F|$ est donc au moins égale à $p_a + 1$. Mais, d'autre part, les surfaces F découpent sur une surface $F^{(p-1)}$, dont elles sont les adjointes, le système canonique de cette surface; le système $|F|$ a donc la dimension $p_a - 1$. Nous sommes donc conduit à une contradiction et, par conséquent si, sur la variété V , l'opération d'adjonction est périodique, la période est égale à l'unité; tout système linéaire de surfaces, tracé sur V , est son propre adjoint.

3. Nous allons maintenant reprendre le problème précédent sous un autre aspect. Soient toujours V une variété algébrique complètement régulière à trois dimensions et $|F|$ un système linéaire irréductible de surfaces de genre arithmétique $p_a > 3$, de dimension au moins égale à quatre.

Supposons que l'on ait

$$|F'| = |F_1 + \Delta_1|, |F'_1| = |F_2 + \Delta_2|, \dots, |F'_{p-2}| = |F_{p-1} + \Delta_{p-1}|, |F'_{p-1}| = |F|,$$

où $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{p-1}$ sont des surfaces fondamentales du système

(1) Voir : SEVERI, Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 1909, t. XXVIII, pp. 33-875).

(2) Voir : CASTELNUOVO et ENRIQUES, Sur les intégrales simples de première espèce d'une surface ou d'une variété algébrique (*Annales de l'Ecole normale supérieure*, 1906, pp. 339-366).

De ces relations fondamentales, on déduit immédiatement les résultats suivants :

1° Les surfaces $F, F_1, F_2, \dots, F_{p-1}$ coupent les surfaces F suivant des courbes de genre $p^{(1)}$ et de degré $p^{(1)}-1$, où $p^{(1)}$ est le genre linéaire des surfaces F ;

2° Le système linéaire $|F_1|$ a la dimension p_a-1 , où p_a est le genre arithmétique des surfaces F ;

3° Si $p > 1$, le système caractéristique du système $|F|$ a le genre $p^{(1)}$, le degré $p^{(1)}-1$ et est non spécial; sa dimension est donc au moins égale à p_a et la dimension de $|F|$ est au moins égale à p_a+1 ;

4° Les systèmes $|F_2|, |F_3|, \dots, |F_{p-1}|$ découpant sur une surface F des systèmes linéaires non spéciaux de genre $p^{(1)}$ et de degré $p^{(1)}-1$, ont des dimensions au moins égales à p_a .

5. Nous allons maintenant montrer comment les exemples de variétés à trois dimensions de genres $P_1=0, P_2=1$, ou $P_1=P_2=0, P_3=1$, que nous avons rencontrés antérieurement viennent se placer dans le cadre précédent. Nous commencerons par la variété de bigenre un.

Dans un travail antérieur ⁽³⁾, nous avons indiqué la construction d'une variété algébrique à trois dimensions dont le genre géométrique et les plurigenres d'indices impairs sont nuls, tandis que le bigenre et les plurigenres d'indices pairs sont égaux à l'unité; cette variété est l'image d'une involution du second ordre, possédant seize points unis, appartenant à une variété algébrique sur laquelle tout système linéaire est son propre adjoint. Nous avons d'ailleurs donné un exemple effectif d'une telle variété.

Soit V une variété complètement régulière de l'espèce dont il vient d'être question. Désignons par $|F|$ le système de ses sections hyperplanes. On peut, comme nous l'avons montré et comme nous le supposerons fait, choisir la variété V de telle sorte que les points de diramation soient isolés; ce sont alors des points quadruples pour la variété V et chacun d'eux est équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à une surface rationnelle. La variété V contient donc seize surfaces rationnelles infiniment petites $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{16}$, fondamentales pour le système $|F|$.

⁽³⁾ Sur une variété algébrique à trois dimensions de bigenre un (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1937, pp. 93-101).

La variété V contient un second système linéaire $|F_1|$ lié à $|F|$ par la relation fonctionnelle

$$|2F| = |2F_1 + \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_{16}|. \quad (1)$$

Les surfaces F_1 découpent sur une surface F le système canonique de celle-ci et les surfaces F coupent une surface F_1 suivant ses courbes canoniques.

Ceci étant rappelé, nous pouvons écrire que l'adjoint de $|F|$ est

$$|F'| = |F_1 + \lambda_1 \delta_1 + \lambda_2 \delta_2 + \dots + \lambda_{16} \delta_{16}|,$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{16}$ sont des entiers. De plus, nous avons

$$|F'_1| = |F|.$$

Nous posons donc

$$\Delta_1 = \lambda_1 \delta_1 + \lambda_2 \delta_2 + \dots + \lambda_{16} \delta_{16}.$$

Nous avons les relations

$$|2F'| = |2F + \Delta_1|,$$

d'où

$$|2F_1 + \Delta_1| = |2F|.$$

Cette relation doit évidemment coïncider avec la relation (1), et on a

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{16} = 1.$$

La variété V est dépourvue de surface canonique, mais possède une surface bicanonique

$$|\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_{16}|$$

formée de seize surfaces rationnelles infiniment petites (sans point commun deux-à-deux).

6. Avant de considérer les variétés de genres $P_g = P_2 = 0, P_3 = 1$, il nous faut résoudre une question concernant les involutions appartenant à une variété algébrique à trois dimensions.

Soit V^* une variété algébrique à trois dimensions contenant une involution cyclique I_3 d'ordre trois n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Nous supposons de plus que ces points unis sont de seconde espèce, c'est-à-dire que dans le voisinage d'un de ces points, la transformation birationnelle T de V^* en

soi, génératrice de l'involution, opère comme une homologie ⁽⁴⁾. Nous avons montré, dans nos travaux antérieurs, que l'on peut prendre pour modèle projectif de la variété V^* une variété sur laquelle l'involution I_3 est engendrée par une homographie cyclique T (de période trois) ayant trois axes ponctuels S_0, S_1, S_2 dont le premier seul rencontre la variété, en des points simples isolés qui sont les points unis de I_3 .

Soit $|F^*|$ le système des sections hyperplanes de V^* ; il contient trois systèmes linéaires partiels composés au moyen de l'involution I_3 : le système $|F^*_0|$, dépourvu de points-base, découpé par les hyperplans passant par les axes S_1, S_2 ; les systèmes $|F^*_1|, |F^*_2|$ découpés par les hyperplans passant respectivement par S_2 et S_0, S_0 et S_1 . En projetant V^* de l'espace contenant S_1, S_2 sur l'espace S_0 , on obtient une variété V image de l'involution I_3 . Les sections hyperplanes F de V correspondent aux surfaces F^*_0 ; nous désignerons par F_1, F_2 les surfaces qui correspondent respectivement sur V aux surfaces F^*_{11}, F^*_{22} .

Considérons un point uni A de l'involution I_3 ; l'espace à trois dimensions tangent à V^* en A s'appuie en un point sur l'un des espaces S_1, S_2 et en une droite sur l'autre. Soient a et α la droite et le plan projetant de A ce point et cette droite. Dans l'espace tangent en A à V^* , T détermine une homographie axiale et dans la gerbe de sommet A , une homologie ayant l'axe a et le plan α .

Le point A est quintuple pour la variété V , le cône tangent étant formé d'un cône rationnel du quatrième ordre et d'un espace à trois dimensions rencontrant la surface suivant un plan ⁽⁵⁾. Au point de vue des transformations birationnelles, ce point est équivalent à deux surfaces rationnelles δ_1, δ_2 se rencontrant suivant une droite. La surface δ_1 correspond aux points du plan α infiniment voisins de A et la surface δ_2 , au point infiniment voisin de A sur la droite a .

Le plan tangent en A à une surface F^*_{11} passe par a ou coïncide avec α ; alors le plan tangent en A à une surface F^*_{22} coïncide avec α ou passe par a .

Supposons que l'involution I_3 possède ρ points unis et qu'aux

(4) Voir, par exemple, notre note: Sur les variétés algébriques à trois dimensions de genres un contenant des involutions cycliques (*Conférences de la Réunion Internationale des Mathématiciens*, Paris, 1937).

(5) Sur les points unis de seconde espèce des involutions cycliques appartenant à une variété algébrique (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1938, pp. 385-396).

ρ_1 premiers de ces points, les surfaces F^*_1 touchent le plan α , aux autres la droite a .

Sur la variété V , nous avons les relations fonctionnelles

$$3F \equiv 3F_1 + \sum_1^{\rho_1} \lambda_i \delta_{i1} + \sum_1^{\rho_2} \mu_i \delta_{i2},$$

$$3F \equiv 3F_2 + \sum_1^{\rho_1} \lambda'_i \delta_{i1} + \sum_1^{\rho_2} \mu'_i \delta_{i2},$$

δ_{i1} et δ_{i2} étant les surfaces rationnelles équivalentes au i -ième point de diramation de la variété V .

Considérons une surface \bar{F}^*_1 déterminée et soit \bar{F}_1 , son homologue sur V . Sur \bar{F}^*_1 , I_3 détermine une involution cyclique possédant ρ_1 points unis parfaits et $\rho - \rho_1$ points unis non parfaits. Nous pouvons appliquer aux courbes découpées sur \bar{F}_1 par les surfaces F , F_1 , F_2 les relations fonctionnelles que nous avons établies autrefois (6). Les courbes (\bar{F}^*_1, F^*_1) ont un point double aux ρ_1 premiers points unis de I_3 et un point simple en chacun des autres. Par conséquent, les courbes (\bar{F}_1, F_1) rencontrent en deux points chacune des courbes (\bar{F}_1, δ_{i1}) pour $i=1, 2, \dots, \rho_1$ et en un point chacune des courbes (\bar{F}_1, δ_{i2}) pour $i=\rho_1+1, \dots, \rho$; elles ne rencontrent pas les autres courbes $(\bar{F}_1, \delta_{i1}), (\bar{F}_1, \delta_{i2})$. Nous avons donc, sur la surface \bar{F}_1 , la relation fonctionnelle

$$3(\bar{F}_1, F) \equiv 3(\bar{F}_1, F_1) + 2 \sum_1^{\rho_1} (\bar{F}_1, \delta_{i1}) + \sum_1^{\rho_2} (\bar{F}_1, \delta_{i2}) + \sum_{\rho_1+1}^{\rho} (\bar{F}_1, \delta_{i1}) + 2 \sum_{\rho_1+1}^{\rho} (\bar{F}_1, \delta_{i2}).$$

On aura de même

$$3(\bar{F}_1, F) \equiv 3(\bar{F}_1, F_2) + \sum_1^{\rho_1} (\bar{F}_1, \delta_{i1}) + 2 \sum_1^{\rho_2} (\bar{F}_1, \delta_{i2}) + 2 \sum_{\rho_1+1}^{\rho} (\bar{F}_1, \delta_{i1}) + \sum_{\rho_1+1}^{\rho} (\bar{F}_1, \delta_{i2}).$$

On en conclut, sur la variété V , les relations fonctionnelles

$$3F \equiv 3F_1 + \sum_1^{\rho_1} (2\delta_{i1} + \delta_{i2}) + \sum_{\rho_1+1}^{\rho} (\delta_{i1} + 2\delta_{i2}),$$

$$3F \equiv 3F_2 + \sum_1^{\rho_1} (\delta_{i1} + 2\delta_{i2}) + \sum_{\rho_1+1}^{\rho} (2\delta_{i1} + \delta_{i2}).$$

7. Supposons maintenant que sur la variété V^* , tout système linéaire soit son propre adjoint et que la variété V soit de genres $P_0=P_2=0, P_3=1$. Nous avons montré que l'involution I_3 pos-

(6) Recherches sur les involutions cubiques appartenant à une surface algébrique (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1921, pp. 105-125).

sède neuf points unis de seconde espèce ⁽⁷⁾. De plus, nous avons établi que des systèmes de surfaces $|F^*_1|$, $|F^*_2|$, l'un est formé de surfaces touchant en chaque point le plan tangent uni, les surfaces de l'autre système touchant en chaque point uni la tangente unie. Nous supposons que le premier de ces systèmes est $|F^*_1|$. Dans ces conditions, nous avons démontré que sur la variété V , les surfaces F_1 découpent sur une surface F le système canonique de celle-ci; que les surfaces F_2 découpent, sur une surface F_1 , le système canonique de cette surface; enfin que les surfaces F découpent, sur une surface F_2 , le système canonique de cette surface.

Nous poserons

$$|F'| = |F_1 + \Delta_1|, \quad |F'_1| = |F_2 + \Delta_2|, \quad |F'_2| = |F|,$$

les surfaces Δ_1, Δ_2 fondamentales pour $|F|$, étant formées de surfaces $\delta_{i_1}, \delta_{i_2}$ ($i=1, 2, \dots, 9$) équivalentes aux points de diramation de la variété V .

Nous avons

$$|F''| = |F_2 + \Delta_1 + \Delta_2|, \quad |F'''| = |F + \Delta_1 + \Delta_2|$$

et

$$|3F_1 + 2\Delta_1| = |3F + \Delta_2|,$$

$$|3F_2 + \Delta_1 + \Delta_2| = |3F|.$$

D'autre part, nous avons les relations fonctionnelles

$$3F \equiv 3F_1 + 2(\delta_{41} + \delta_{21} + \dots + \delta_{91}) + \delta_{12} + \delta_{22} + \dots + \delta_{92},$$

$$3F \equiv 3F_2 + \delta_{11} + \delta_{21} + \dots + \delta_{91} + 2(\delta_{12} + \delta_{22} + \dots + \delta_{92}),$$

conséquence des relations établies au paragraphe précédent.

Nous devons donc avoir

$$2\Delta_1 - \Delta_2 = 2(\delta_{41} + \delta_{21} + \dots + \delta_{91}) + \delta_{12} + \delta_{22} + \dots + \delta_{92},$$

$$\Delta_1 + \Delta_2 = \delta_{11} + \delta_{21} + \dots + \delta_{91} + 2(\delta_{12} + \delta_{22} + \dots + \delta_{92}),$$

On en déduit

$$\Delta_1 \equiv \delta_{11} + \delta_{21} + \dots + \delta_{91} + \delta_{12} + \delta_{22} + \dots + \delta_{92},$$

$$\Delta_2 \equiv \delta_{12} + \delta_{22} + \dots + \delta_{92}.$$

(7) Recherches sur les involutions cycliques du troisième ordre appartenant à une variété algébrique à trois dimensions (*Annales de l'École normale supérieure*, 1937, pp. 55-79).

Par conséquent, la variété V, dépourvue de surfaces canonique et bicanonique, possède une surface tricanonique

$$\delta_{11} + \delta_{21} + \dots + \delta_{91} + 2(\delta_{12} + \delta_{22} + \dots + \delta_{92}).$$

Rappelons que nous avons construit un exemple effectif d'une variété V satisfaisant aux conditions indiquées ⁽⁸⁾.

Liège, le 30 décembre 1939.

⁽⁸⁾ Sur deux involutions cycliques du troisième ordre appartenant à une variété algébrique à trois dimensions (*Bull. des Sciences mathématiques*, 1937, pp. 82-96).