EXTRAIT DU *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége.*
Séance du 21 décembre 1944. — N° 12.

Sur la surface représentant les couples de points d'une courbe de genre trois,

par LUCIEN GODEAUX, Membre de la Société.

Dans une note antérieure (¹), nous avons étudié les involutions régulières du second ordre, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface d'irrégularité $q > 0$. Dans un système continu complet de courbes tracées sur cette surface, il y a 2^{2q} systèmes linéaires invariants pour la transformation de la surface en soi déterminée par l'involution. Il s'agit d'étudier la répartition des points unis vis-à-vis de ces systèmes linéaires invariants.

Lorsque la surface considérée est une surface de Jacobi ($q = 2$), l'involution est représentée par une surface de Kummer et la solution du problème posé est bien connue. Nous considérons ici le cas où la surface représente les couples de points d'une courbe

(¹) Sur les involutions régulières d'ordre deux appartenant à une surface irrégulière (*Proceedings of the Intern. Math. Congress*, Toronto, 1924, t. I, pp. 733-737). Voir aussi trois notes dans les *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1924, pp. 434-446; 1925, pp. 37-47, 157-166.

de genre trois On a alors $q = 3$ et la surface contient une involution du second ordre dont la surface image a été considérée par G. Humbert ([2]).

Dans cet exemple, les systèmes paracanoniques sont de dimension zéro et il existe 63 courbes paracanoniques invariantes, contenant chacune 12 des 28 points unis de l'involution. Nous étudions la répartition, vis-à-vis des points unis, de trois, puis de sept de ces courbes. Dans le premier cas, nous trouvons deux répartitions possibles, dans le second cas, quatre. L'étude pourrait se poursuivre par les mêmes procédés.

1. Soient K une courbe de genre trois à modules généraux et F la surface représentant les couples de points (non ordonnés) de K. On peut, sans restriction, supposer que K est une courbe plane du quatrième ordre, sans point multiple.

La surface F présente les caractères

$$p_a = 0, \quad p_g = 3, \quad p^{(1)} = 7, \quad P_2 = 7.$$

Aux couples de points des groupes d'une série g_4^1 de K correspondent sur F les points d'une courbe C de genre 7 et de degré 6. Aux ∞^3 séries g_4^1 de K correspondent ∞^3 courbes C formant un système continu complet $\{C\}$, du degré 6

En particulier, aux séries g_4^1 tirées de la série canonique g_4^2 de K correspondent des courbes C, que nous désignerons par C_1, qui sont les courbes canoniques de F. Elles forment un réseau $|C_1|$.

Les séries g_4^1 paracanoniques de K sont complètes et par conséquent le système continu $\{C\}$ contient le réseau $|C_1|$ et des courbes isolées (systèmes linéaires de dimension zéro).

Il existe 63 systèmes ∞^1 de coniques tétratangentes à la courbe K. Nous désignerons par $C_2, C_3, \ldots, C_{64}$ les courbes de $\{C\}$ qui correspondent aux séries g_4^1 des points de contact.

2. Considérons un point P_1 de F et soient P_{11}, P_{12} les points de K qui lui correspondent. La droite P_{11}, P_{12} coupe la quartique K en deux autres points P_{21}, P_{22}; à ce couple correspond un point P_2 de F. Les points P_1, P_2 se correspondent dans une transformation birationnelle involutive T de F en elle-même; nous désignerons par I_2 l'involution d'ordre deux engendrée par T sur F.

Le système canonique $|C_1|$ de F appartient à l'involution I_2.

([2]) Sur une surface du sixième ordre liés aux fonctions abéliennes de genre trois (*Journal de Liouville*, 1896; *Œuvres*, t. II).

Soit $\{\gamma\}$ un système de coniques tétratangentes à K. Une conique passant par les points de contact d'une courbe γ avec K coupe encore cette courbe en quatre points qui sont les points de contact d'une autre conique du système $\{\gamma\}$. Cette propriété subsiste lorsque la conique considérée dégénère en deux droites, par conséquent les courbes $C_2, C_3, \ldots, C_{64}$ sont transformées en elles-mêmes par T.

L'involution I_2 possède 28 points unis qui correspondent aux 28 bitangentes de K.

Le système $|C_1|$ est dépourvu de points-base. Un système de coniques $\{\gamma\}$ contient six coniques dégénérées, par conséquent chacune des courbes $C_2, C_3, \ldots, C_{64}$ passe par 12 points unis de I_2.

Désignons par Φ une surface image de l'involution I_2. Aux courbes C_1 correspondent sur Φ des courbes Γ_1 formant un réseau $|\Gamma_1|$, de genre 4 et de degré 3. Le réseau $|\Gamma_1|$ est le système canonique de Φ et cette surface a les caractères

$$p_a = p_g = 3, \quad p^{(1)} = 4, \quad P_2 = 7.$$

Le système bicanonique

$$|D_1| = |2\,C_1|$$

de F est donc composé au moyen de I_2 et a pour homologue sur Φ le système bicanonique

$$|\Delta_1| = |2\Gamma_1|$$

de cette surface.

On peut prendre pour modèle projectif de Φ la surface d'ordre 12, section d'une hypersurface cubique V_5^3 de S_6 et du cône V_3^4 projetant d'un point O une surface de Veronese. Les sections hyperplanes de Φ sont précisément les courbes bicanoniques Δ_1.

Les ∞^2 cônes projetant de O les coniques de la surface de Veronese découpent sur Φ ses courbes canoniques Γ_1.

L'hypersurface V_5^3 touche le cône V_3^4 en 28 points, doubles coniques pour Φ; ce sont les points de diramation de la correspondance (1, 2) existant entre Φ et F.

Les courbes D_1 ont le genre 19 et le degré 24; les courbes Δ_1 ont le genre 10 et le degré 12.

3. Considérons une courbe C de $\{C\}$ et soit C′ la courbe que T lui fait correspondre. Lorsque la courbe C varie d'une manière continue dans $\{C\}$ et vient coïncider avec une courbe C_1, C′ varie d'une manière continue sur F et vient également coïncider avec cette courbe C_1. Le système $\{C\}$ étant continu complet, contient donc C′ et est transformé en lui-même par T. A la courbe $C + C_1$

correspond sur Φ une coube Γ de genre 7, possédant trois points doubles. Lorsque C varie et tend vers C_1, la courbe Γ et ses points doubles varient; la courbe Γ tend vers la courbe Γ_1 homologue de C_1, comptée deux fois. Comme Φ est régulière, il en résulte que Γ appartient au système bicanonique $|\Delta_1|$ de Φ.

Lorsque C tend d'une manière continue vers C_2 dans $\{C\}$, il en est de même de C' et Γ tend vers la courbe Γ_2, homologue de C_2, comptée deux fois. Il en résulte que si l'on désigne par A_2 la somme des courbes rationnelles de degré -2, équivalentes aux 12 points doubles de Φ situés par Γ_2, on a

$$\Delta_1 \equiv 2\,\Gamma_2 + A_2.$$

La courbe Γ_2 est donc la courbe de contact de Φ et d'un hyperplan touchant cette surface en tout point d'intersection et passant par 12 des 28 points doubles de Φ.

On parvient aux mêmes conclusions pour les courbes $\Gamma_3, \Gamma_4, \ldots, \Gamma_{64}$ homologues sur Φ des courbes $C_3, C_4, \ldots, C_{64}$.

Les courbes $\Gamma_2, \Gamma_3, \ldots, \Gamma_{64}$ sont elliptiques et d'ordre six.

4. Considérons le système continu complet

$$\{D\} = \{2\,C\}.$$

Il contient le système bicanonique $|D_1|$. La variété de Picard attachée à F est la variété de Jacobi représentant les ternes de points de la courbe K, par conséquent $\{D\}$ contient 64 systèmes linéaires transformés chacun en lui-même par T. Ces systèmes sont

$$|D_1|,\ |D_2| = |C_1 + C_2|,\ |D_3| = |C_1 + C_3|, \cdots, |D_{64}| = |C_1 + C_{64}|.$$

Fixons l'attention sur le système $|D_2|$. Il a le genre 19, le degré 24 et la dimension six. S'il appartenait à l'involution I_2, il aurait pour homologue, sur Φ, le système $|\Gamma_1 + \Gamma_2|$, de genre 7, de degré 6, dont la dimension serait donc égale à 6, ce qui est absurde.

Le système $|D_2|$ n'appartenant pas à I_2, contient deux systèmes linéaires partiels appartenant à cette involution. L'un, $|D_{21}|$, comprend les courbes décomposées $C_1 + C_2$ et a 12 points unis de I_2 comme points-base (les points unis appartenant à C_2) ; l'autre, $|D_{22}|$, a comme points-base les 16 points unis restant de I_2.

Au système $|D_{21}|$ correspond sur Φ un système linéaire complet $|\Delta_{21}|$, de genre 7, de degré 6, de dimension $r_1 \geq 3$.

Au système $|D_{22}|$ correspond sur Φ un système linéaire complet $|\Delta_{22}|$, de genre 6, degré 4, de dimension $r_2 \geq 2$.

T agissant sur les éléments de $|D_2|$ comme une homographie, on a

$$r_1 + r_2 = 5,$$

d'où $r_1 = 3$, $r_2 = 2$

Considérons sur F une courbe D de $\{D\}$ et soit D′ la courbe que T lui fait correspondre. La courbe D′ appartient à $\{D\}$ et à la courbe $D + D'$ correspond sur Φ une courbe Δ qui, lorsque D décrit le système continu $\{D\}$, décrit sur Φ un système continu, donc linéaire, $|\Delta|$, puisque Φ est régulière. En faisant varier D d'une manière continue dans $\{D\}$ de manière à la faire coïncider successivement avec une courbe D_1, D_{21}, D_{22}, on obtient sur Φ les relations fonctionnelles

$$|\Delta| = |2\,\Delta_1| = |2\,\Delta_{21} + A_2| = |2\,\Delta_{22} + A'_2|,$$

où A'_2 est la somme des courbes rationnelles de degré — 2 équivalentes aux 16 points doubles appartenant aux courbes Δ_{22}.

On démontre de même que tout système $|D_i|$ ($i = 3, 4, \ldots, 64$) contient deux systèmes linéaires appartenant à l'involution I_2. L'un, qui contient les courbes dégénérées en C_1 et C_i, à la dimension trois et 12 points-base, unis pour I_2. L'autre est un réseau et a 16 points-base unis pour I_2. Nous désignerons respectivement ces systèmes par $|D_{i1}|$, $|D_{i2}|$ et par $|\Delta_{i1}|$, $|\Delta_{i2}|$ les systèmes qui leur correspondent sur Φ.

On a, avec des notations analogues aux précédentes,

$$|2\,\Delta_1| = |2\,\Delta_{i1} + A_i| = |2\,\Delta_{i2} + A'_1|.$$

5. Considérons la courbe $2C_2$; elle est transformée en elle-même par T et appartient donc à l'un des systèmes $|D_1|, |D_2|, \ldots, |D_{64}|$.

Nous avons vu qu'à C_2 correspond sur Φ une courbe Γ_2 le long de laquelle un hyperplan touche la surface. Par conséquent, la courbe $2\,\Gamma_2$ est une courbe bicanonique de Φ et $2\,C_2$ appartient au système $|D_1|$. Il en est de même des courbes $2\,C_3, 2\,C_4, \ldots, 2\,C_{64}$.

Considérons maintenant la courbe $C_i + C_k$ ($i \neq k$). Elle appartient à l'un des systémes $|D_2|, |D_3|, \ldots, |D_{64}|$. Supposons, pour fixer les idées, que la courbe $C_3 + C_4$ appartienne à $|D_2|$.

Deux cas penvent se présenter suivant que la courbe $C_3 + C_4$ appartient au système $|D_{21}|$ ou au système $|D_{22}|$.

Plaçons-nous dans la première hypothèse. Si la courbe C_3 passe par x des 12 points unis de I_2 appartenant à C_2, la courbe C_4 passe par les $12 - x$ autres. Une courbe D_{21} passant par un point uni de I_2 n'appartenant pas à C_2, a un point double en ce point. Donc un point uni de I_2 appartenant à C_3 mais non à C_2, doit appartenir à

C et inversement. Comme C_3 et C_4 passent chacune par 12 points unis de I_2, on doit avoir

$$12 - x = x,$$

d'où $x = 6$.

Ainsi donc, C_3 et C_4 rencontrent chacune C_2 en six points unis distincts et se rencontrent en six points unis. On en conclut que le système $|D_{31}|$ contient la courbe $C_2 + C_4$ et le système $|D_{41}|$, la courbe $C_2 + C_3$.

Passons maintenant à la seconde hypothèse : $C_3 + C_4$ appartient à $|D_{22}|$. Toute courbe de ce système passant par un point uni de I_2 appartenant à C_2 a un point double en ce point, donc C_2 et C_4 coupent C_2 aux mêmes points unis de I_2. Soit x le nombre de ces points. Chacune des courbes C_3, C_4 contient $12 - x$ points unis de I_2 n'appartenant pas à C_2 et ces points sont de plus distincts. Leur ensemble doit former le groupe des 16 points-base de $|D_{22}|$. On a donc

$$2(12 - x) = 16,$$

d'où $x = 4$.

Les courbes C_2, C_3, C_4 ont en commun 4 points unis de I_2. Il en résulte que la courbe $C_2 + C_4$ appartient au système $|D_{32}|$ et la courbe $C_2 + C_3$ au système $|D_{42}|$.

Si l'on tient compte du fait que les 12 points unis de I_2 appartenant à C_2 proviennent des bitangentes de la courbe K formant un groupe de Steiner, on retrouve les propriétés connues de ces groupes.

6. Supposons que l'on ait

$$|D_2| = |C_1 + C_2| = |C_3 + C_4| = |C_5 + C_6|.$$

On en déduit

$$|D_3| = |C_1 + C_3| = |C_2 + C_4|, \quad |D_4| = |C_1 + C_4| = |C_2 + C_3|,$$
$$|D_5| = |C_1 + C_5| = |C_2 + C_6|, \quad |D_6| = |C_1 + C_6| = |C_2 + C_5|.$$

Par conséquent, on a

$$|C_3 + C_5| = |C_4 + C_6|, \quad |C_3 + C_6| = |C_4 + C_5|.$$

Faisons en premier lieu l'hypothèse que C_3, C_4 rencontrent C_2 en un groupe de quatre points unis de I_2 et les courbes C_5, C_6 en un second groupe de quatre points analogues. Supposons que ces deux groupes aient x points communs.

Les points unis de I_2 n'appartenant pas à C_2 appartiennent à la courbe $C_3 + C_4$ d'une part, à la courbe $C_5 + C_6$ d'autre part. Par conséquent, ces seize points unis se répartissent en y_{35} points appartenant à C_3, C_5, en y_{36} points unis appartenant à C_3, C_6, en y_{45} et y_{46} points unis appartenant à C_4, C_5 et en C_4, C_6. Comme chacune des courbes C_3, C_4, C_5, C_6 contient 12 points unis dont quatre sont sur C_2, on a

$$y_{35} + y_{36} = 8, \quad y_{45} + y_{46} = 8, \quad y_{35} + y_{45} = 8, \quad y_{36} + y_{46} = 8.$$

On en déduit

$$y_{35} = y_{46}, \quad y_{36} = y_{45}.$$

Soit α_{ik} le nombre de points unis de I_2 appartenant *simplement* à la courbe réductible $C_i + C_k$. On a

$$\alpha_{35} = \alpha_{46} = 8 - 2x + 2y_{36},$$
$$\alpha_{36} = \alpha_{45} = 8 - 2x + 2y_{35}.$$

Soit d'autre part β_{ik} le nombre de points unis communs à C_i, C_k On a

$$\beta_{35} = \beta_{46} = x + y_{35}, \quad \beta_{35} = \beta_{45} = x + y_{36}.$$

Les nombres α doivent être égaux à 12 ou à 16; les nombres β à 4 ou à 6.

Si

$$\alpha_{35} = \alpha_{46} = \alpha_{3c} = \alpha_{45} = 12,$$

on a

$$x = 2, \quad y_{35} = y_{46} = y_{36} = y_{45} = 4, \quad \beta_{35} = \beta_{46} = \beta_{36} = \beta_{45} = 6.$$

Les courbes C_3, C_5 se rencontrent en 6 points, donc il existe une courbe C_i passant par les 6 points unis de C_3 n'appartenant pas à C_5 et par les 6 points unis de C_5 n'appartenant pas à C_3. La courbe C_i passe donc par les 4 points de C_2 appartenant à une seule des courbes C_3, C_5, par les 4 points communs à C_3, C_6 en dehors de C_2 et par les 4 points communs à C_5, C_4 n'appartenant pas à C_2. On a

$$D_i \equiv C_1 + C_i \equiv C_3 + C_5 \equiv C_4 + C_6.$$

On vérifie d'ailleurs, en considérant les courbes C_4, C_6, que la courbe C_i passe bien par les points unis appartenant à une seule de ces courbes, points qni coïncident avec ceux qui viennent d'être rencontrés.

La considération des courbes C_3 et C_6 d'une part, C_4 et C_5 d'autre part, montre qu'il existe une courbe C_k passant par les points unis appartenant à une seule des courbes C_3, C_6; ces points coïncident avec ceux qui appartiennent à une seule des courbes C_4, C_5.

On a

$$D_k \equiv C_1 + C_k \equiv C_3 + C_6 \equiv C_4 + C_5.$$

Les courbes C_i, C_k coupent C_2 en un même quaterne de points et on a

$$D_2 \equiv C_1 + C_2 \equiv C_i + C_k.$$

Supposons maintenant que l'on ait

$$\alpha_{35} = \alpha_{46} = 12, \quad \alpha_{36} = \alpha_{45} = 16.$$

On en déduit

$$x = 1, \quad y_{35} = y_{46} = 5, \quad y_{36} = y_{45} = 3, \quad \beta_{35} = \beta_{46} = 6, \quad \beta_{36} = \beta_{45} = 4.$$

Les courbes C_3, C_5 se rencontrent en six points unis, par conséquent, il existe une courbe C_i passant par les points unis de C_3, C_5 non communs à ces deux courbes. De même, les courbes C_4, C_6 se rencontrent en six points unis et on reconnait sans peine que la courbe C_i passent par les points unis de C_4, C_6 n'appartenant pas à la fois à ces deux courbes. On a

$$D_i \equiv C_1 + C_i \equiv C_3 + C_5 \equiv C_4 + C_6.$$

Les courbes C_3 et C_6 se rencontrent en 4 points unis, par conséquent, il existe une courbe C_k passant par ces mêmes points unis. Cette courbe C_k passe en outre par les points unis de I_2 qui n'appartiennent ni à C_3, ni à C_6, c'est-à-dire par les points communs aux courbes C_4, C_5 non situés sur C_2. Les courbes C_4, C_5 se rencontrent en quatre points et il existe donc une courbe C'_k passant par ces quatre points et par les points unis de I_2 non situés sur C_4, C_5, c'est-à-dire par les trois points appartenant à la fois à C_3, C_6, en dehors de C_2. Il en résulte que les courbes C_k, C'_k ont en commun sept points unis : les 3 points communs à C_3, C_6 et les 3 points communs à C_4, C_5 en dehors de C_2, enfin le point commun aux courbes C_2, C_3, C_4, C_5, C_6. Il en résulte que C'_k coïncide avec C_k. On a

$$D_k \equiv C_1 + C_k \equiv C_3 + C_6 \equiv C_4 + C_5.$$

Les courbes C_2, C_i ont en commun six points, par conséquent, il existe une courbe C''_k passant par les points unis de ces courbes qui ne leur sont pas communs. Il en résute que C''_k coïncide avec C_k. On a donc

$$D_2 \equiv C_1 + C_2 \equiv C_i + C_k.$$

Supposons enfin que l'on ait

$$\alpha_{35} = \alpha_{46} = \alpha_{36} = \alpha_{45} = 16.$$

Il s'en suit

$$x = 0. \quad y_{35} = y_{46} = y_{36} = y_{45} = 4, \quad \beta_{35} = \beta_{46} = \beta_{36} = \beta_{45} = 4.$$

Les courbes C_3, C_5 ont en commun 4 points unis, donc il existe une courbe C_i passant par ces points et par les points unis de I_2 n'appartenant pas à C_3, C_5, c'est-à-dire par les points communs à C_4, C_6. De même, les courbes C_4, C_6 ont en commun quatre points, qui appartiennent à la courbe C_i.

Le même raisonnement prouve qu'il existe une courbe C_k passant par les points communs à C_3, C_6 et à C_4, C_5.

De plus, les courbes C_i, C_k rencontrent C_2 aux quatre points qui n'appartiennent ni à C_3, C_4, ni à C_5. C_6.

Comme dans les autres cas, on a

$$D_i = C_1 + C_i \equiv C_3 + C_5 \equiv C_4 + C_6,$$
$$D_k \equiv C_1 + C_k \equiv C_3 + C_6 \equiv C_4 + C_5,$$
$$D_2 \equiv C_1 + C_2 \equiv C_i + C_k.$$

7. Nous ferons maintenant l'hypothèse que les courbes C_3, C_4, C_5, C_6 coupent C_2 chacune en six points unis de I_2 et nous représenterons par a_{ik} le groupe de points unis de I_2 sur C_2 communs aux courbes C_i, C_k (i, k = 3, 4, 5, 6). Si x est le nombre de points du groupe a_{35}, les groupes a_{36}, a_{45}, a_{46} seront respectivement formés de $6 - x$, $6 - x$ et x points.

Les courbes C_3, C_4 se coupent en six points unis, de même que les courbes C_5, C_6. Nous supposerons que ces quatre courbes ont en commun un groupe a de y points unis. C_3 et C_4 se coupent encore en un groupe b_{34} de $6-y$ points unis ; C_5 et C_6 en un groupe b_{56} de $6-y$ points unis.

Les courbes réductibles $C_3 + C_5$, $C_3 + C_6$, $C_4 + C_5$, $C_4 + C_6$ doivent passer simplement par 12 ou 16 points unis de I_2. Représentons le nombre de ces points respectivement par α_{35}, α_{36}, α_{45}, α_{46}. On a

$$\alpha_{35} = \alpha_{46} = 24 - 2x - 2y, \quad \alpha_{36} = \alpha_{45} = 12 + 2x - 2y.$$

Supposons en premier lieu que les nombres α soient tous égaux à 12. On a $x = y = 3$.

Les courbes C_3, C_5 se coupent en 6 points, formant les groupes a_{35} et a, donc il existe une courbe C_i passant par les groupes a_{45}, a_{36}, b_{34}, b_{56}. De même, les courbes C_4, C_6 se coupent en 6 points formant les groupes a_{46} et a; il existe une courbe C'_i passant par les mêmes groupes que C_i et par suite coïncidant avec C_i. On a

$$D_i \equiv C_1 + C_i \equiv C_3 + C_5 \equiv C_4 + C_6.$$

Un raisonnement analogue montre qu'il existe une courbe C_k telle que

$$D_k \equiv C_1 + C_k \equiv C_3 + C_6 \equiv C_4 + C_5.$$

Les courbes C_i, C_k coupent respectivement C_2 en des groupes de 6 points $a_{36} + a_{45}$, $a_{35} + a_{46}$, donc on a

$$D_2 \equiv C_1 + C_2 \equiv C_i + C_k.$$

Supposons maintenant

$$\alpha_{35} = \alpha_{46} = 12, \qquad \alpha_{36} = \alpha_{45} = 16.$$

Ceci donne $x = 4$, $y = 2$.

Les courbes C_3, C_5 se coupent en 6 points formant les groupes a_{35} et a, donc il existe une courbe C_i passant par les points des groupes a_{36}, a_{45}, b_{34}, b_{56}. De même les courbes C_4, C_6 se coupent en 6 points formant les groupes a_{46} et a, donc il existe une courbe C_i' passant par les mêmes points que C_i et par suite confondue avec celle-ci.

Les courbes C_3 et C_6 se coupent en 4 points unis formant les groupes a_{36} et a; il existe donc une courbe C_k passant par ces groupes et par les points unis de I_2 n'appartenant pas soit à C_3 seule, soit à C_6 seule; la courbe C_k passe donc par le groupe a_{45} et par les 6 points unis de I_2 n'appartenant à aucune des courbes C_3, C_4, C_5, C_6. On arrive, en partant des courbes C_4, C_6, à la même courbe C_k.

Les courbes C_i, C_k se coupent en quatre points $a_{36} + a_{45}$ de C_2. On a donc les mêmes relations fonctionnelles que dans le premier cas.

Supposons enfin que les α soient tous égaux à 16. On a $x = 3$, $y = 1$. Le raisonnement est toujours le même. Les courbes C_3, C_5 se rencontrent en 4 points $a_{35} + a$ et les courbes C_5, C_6 en 4 points $a_{46} + a$. Il existe une courbe C_i passant par les points unis a_{35}, a_{46}, a et par les cinq points unis de I_2 n'appartenant à aucune des courbes $C_2, C_3, \ldots, C_6$.

De même, il existe une courbe C_k passant par les points a_{36}, a_{45}, a et par les cinq points unis de I_2 dont il vient d'être question.

On a encore les mêmes relations fonctionnelles que précédemment.

8. Il nous reste à considérer le cas où les courbes C_3, C_4 passent chacune par six des points unis de I_2 situés sur C_2, tandis que C_3, C_6 coupent cette courbe en 4 points. Nous donnerons simplement les résultats, les raisonnements qui y conduisent étant toujours les mêmes et les configurations obtenues ayant déjà été rencontrées, sauf un changement de notation.

Deux cas peuvent se présenter :

Dans le premier, les courbes C_5, C_6 ont en commun un groupe de deux points unis de C_2 avec C_3 et un groupe de deux points unis de C_2 avec C_4. Des six points unis communs à C_3, C_4 en dehors de C_2, deux appartiennent à C_5 et quatre à C_6. La courbe C_i passe par les deux points unis de C_2 appartenant à C_3, C_5, C_6 ; par les quatre points unis de C_2 appartenant à C_4 mais non à C_5, C_6; par les deux points unis appartenant à C_3, C_4, C_5 et par quatre points unis appartenant à C_6 mais non à C_5. La courbe C_k coupe C_2 en 6 points unis, deux appartenant à C_4, C_5, C_6 ; quatre appartenant à C_3 mais non à C_5, C_6 ; elle passe en outre par les deux points unis communs à C_3, C_4, C_5 et par les quatre points unis de C_6 n'appartenant pas à C_5.

Dans le second cas, des quatre points unis appartenant à C_2, C_5, C_6, un appartient à C_4 et trois à C_3. Des six points unis communs à C_3, C_4, trois appartiennent à C_5 et trois à C . Les courbes C_i, C_k coupent C_2 en 4 points unis: le point commun à C_4, C_5, C_6 et les 3 points appartenant à C_3 mais non à C_5, C_6. La courbe C_i passe par les 3 points unis communs à C_3, C_4, C_6 et par les 5 points unis de C_5 n'appartenant pas à C_6. La courbe C_k passe par les 3 points unis communs à C_3, C_4, C_5 et par les 5 points unis de C_6 n'appartenant pas à C_5.

Dans les deux cas, on a les mêmes relations fonctionnelles que précédemment.

9. Nous avons vu que trois des 63 courbes C_2, C_3, ..., C_{64} peuvent occuper deux positions : ou bien ces courbes ont deux à deux six points unis de I_2 en commun, sans qu'il existe un point uni appartenant à la fois aux trois courbes, ou bien ces trois courbes ont en commun quatre points unis de I_2, sans que deux des courbes passent ultérieurement par un même point uni.

En partant de ce fait, nous avons établi la disposition possible de sept courbes C_i, en supposant que l'on ait

$$D_2 \equiv C_1 + C_2 \equiv C_3 + C_4 \equiv C_5 + C_6.$$

On obtient alors deux courbes C_i, C_k, distinctes des précédentes, donnant lieu aux relations fonctionnelles

$$\begin{aligned}
D_2 &\equiv C_1 + C_2 \equiv C_3 + C_4 \equiv C_5 + C_6 \equiv C_i + C_k,\\
D_3 &\equiv C_1 + C_3 \equiv C_2 + C_4 \equiv C_5 + C_i \equiv C_6 + C_k,\\
D_4 &\equiv C_1 + C_4 \equiv C_2 + C_3 \equiv C_5 + C_k \equiv C_6 + C_i,\\
D_5 &\equiv C_1 + C_5 \equiv C_2 + C_6 \equiv C_3 + C_i \equiv C_4 + C_k,\\
D_6 &\equiv C_1 + C_6 \equiv C_2 + C_5 \equiv C_3 + C_k \equiv C_4 + C_i,\\
D_i &\equiv C_1 + C_i \equiv C_2 + C_k \equiv C_3 + C_5 \equiv C_4 + C_6,\\
D_k &\equiv C_1 + C_k \equiv C_2 + C_i \equiv C_3 + C_6 \equiv C_4 + C_5.
\end{aligned}$$

Les sept courbes peuvent occuper quatre dispositions (aux notations près), que nous indiquerons par les tableaux suivants, indiquant le nombre de points unis de I_2 communs à deux courbes quelconques.

Disposition I.

	C_3	C_4	C_5	C_6	C_i	C_k
C_2	4	4	4	4	4	4
C_3		4	4	4	4	4
C_4			4	4	4	4
C_5				4	4	4
C_6					4	4
C_i						4

Chacun des points unis de I_2 appartient à trois des courbes.

Disposition II.

	C_3	C_4	C_5	C_6	C_i	C_k
C_2	6	6	6	6	6	6
C_3		6	6	6	6	6
C_4			6	6	6	6
C_5				6	6	6
C_6					6	6
C_i						6

Chacun des points unis de I_2 appartient à trois des courbes.

Disposition III.

	C_3	C_4	C_5	C_6	C_i	C_k
C_2	4	4	4	4	4	4
C_3		4	6	6	6	6
C_4			6	6	6	6
C_5				4	6	6
C_6					6	6
C_i						4

Chacun des points unis de I_2 appartient à un nombre impair des courbes. Il existe trois groupes de deux points apparteuant à cinq des courbes, quatre groupes de 4 points appartenant à 3 courbes, un groupe de 6 points appartenant à une seule courbe.

DISPOSITION IV.

	C_3	C_4	C_5	C_5	C_i	C_k
C_2	4	4	4	4	6	6
C_3		4	6	4	6	4
C_4			4	6	6	4
C_5				4	6	4
C_6					6	4
C_i						6

Chacun des points unis de I_2 appartient à un nombre pair des courbes. Il existe un point appartenant à six des courbes, quatre groupes de 3 points appartenant à quatre des courbes, trois groupes de cinq points appartenant à deux des courbes.

Liége, le 20 novembre 1944.

M. HAYEZ, Imprimeur de l'Académie royale de Belgique, rue de Louvain, 112, Bruxelles.
(Domicile légal: rue de la Chancellerie, 4)