EXTRAIT DU *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége*,
Séance du 17 octobre 1940. — N^os 5 à 10.

Sur les points de diramation des surfaces multiples,

par LUCIEN GODEAUX, Membre de la Société.

(Troisième note) (¹).

25. Nous avons supposé, dans ce qui précède, que le point $\overline{A}'_1$ était simple ou double conique pour la surface Φ', c'est-à-dire que nous avions $\sigma=1$ ou $\sigma=2$. Dans le cas général, le point $\overline{A}'_1$ peut être l'origine, pour la surface Φ', d'une suite de μ points doubles biplanaires dont le dernier est ordinaire ou dont le dernier est suivi d'un point double conique. Dans le premier cas, on a $\sigma=2\mu$, dans le second, $\sigma=2\mu+1$. Nous étudierons successivement ces deux cas.

Dans le premier cas, les courbes que nous désignerons par $\overline{\Gamma}^*_1$, découpées sur Φ' par les hyperplans passant par les μ points doubles successifs d'origine A'_1 et par le point simple qui leur fait suite, forment un système linéaire de dimension $r-\mu-2$, de genre $\pi-(\nu_1+\nu_2+1)-\eta$ et de degré $n-\nu_1-\nu_2-2\eta-1$.

Soient $\overline{C}^*_1$ les courbes qui correspondent sur F aux courbes $\overline{\Gamma}^*_1$. Les courbes C^*_1 ont en A la multiplicité $\rho=\nu_1+\nu_2+l\nu_{22}$; en $P_1, P_2, \ldots, P_h$, la multiplicité ν_1; en $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{j-1}$, la multiplicité $\rho_1=\nu_2+l\nu_{22}$, en Q_j une multiplicité ρ'_2 supérieure à ρ_2, ρ_2 étant égal soit à ν_2, soit à $\nu_2+(l-1)\nu_{22}$. Ces courbes ont en commun, outre les points $Q_{j+1}, \ldots, Q_k$ et $R_1, R_2, \ldots, R_l$, une suite de points $S_1, S_2, \ldots, S_\lambda$, infiniment voisins successifs, dont le dernier est simple, les autres ayant les multiplicités $\rho''_1, \rho''_2, \ldots, \rho''_{\lambda-1}$. Supposons en premier lieu que le point S_1 appartienne au domaine du point $Q_i (j<i<k)$ et soient ρ_3 la multiplicité des points $Q_{j+1}, \ldots, Q_{i-1}$, pour les courbes $\overline{C}^*_1$, ρ_4 celle de Q_i. Les points $Q_{i+1}, \ldots, Q_k$ sont multiples d'ordre $\nu_{21}-1$ et les points $R_1, R_2, \ldots, R_l$ multiples d'ordre $\nu_{22}-1$ pour ces courbes.

L'étude se poursuivra comme dans le cas $\sigma=2\eta=0$ (n° 9), en considérant les intersections des courbes C_2, C_p, C'_1, $\overline{C}^*_1$ absorbées en A et en appliquant la formule de Zeuthen à la correspondance entre deux courbes $\overline{\Gamma}^*_1$, $\overline{C}^*_1$ homologues. On trouvera

$$\rho''_1+\rho''_2+\cdots+\rho''_{\lambda-1}+1=l+1.$$

(¹) Les deux premières notes ont paru dans le *Bulletin de la Soc. roy. des Sciences de Liége*, 1940, pp. 54-66 et 67-79.

On évaluera alors les multiplicités ρ'_2, ρ_3, ρ_4 comme on l'a fait dans le cas invoqué et on trouvera, dans chaque cas,

$$\rho''_1 = \rho''_2 = \cdots = \rho''_{\lambda-1} = 1,\ \lambda = l + 1.$$

Quatre cas sont possibles :

1° $\rho_2 = \nu_2,\quad \rho'_2 = \nu_2 + l,\quad \rho_3 = \nu_{21} + l + 1,\quad \rho_3 = \nu_{21}.$

2° $\rho_2 = \nu_2,\quad \rho'_2 = \nu'_2 + l,\quad \rho_3 = \nu_{21} + l + 1,\quad \rho_3 = \nu_{21} + l.$

3° $\rho_2 = \nu_2 + (l-1)\nu_{22},\quad \rho'_2 = \nu_2 + 1 + (l-1)\nu_{22},$
$\rho_3 = \nu_{21} + l + 1,\quad \rho_4 = \nu_{21}.$

4° $\rho_2 = \nu_2 + (l-1)\nu_{22},\quad \rho'_2 = \nu_2 + 1 + (l-1)\nu_{22},$
$\rho_3 = \nu_{21} + l + 1,\quad \rho_4 = \nu_{21} + l.$

Nous avons établi (n° 11) les relations

$$pl = [(k-j)(l+1) + l]\nu_{21} \quad \text{pour} \quad \rho_2 = \nu_2, \tag{1}$$
$$pl = [(k-j)(l+1) + 1]\nu_{21} \quad \text{pour} \quad \rho_2 = \nu_2 + (l-1)\nu_{22}. \tag{1'}$$

D'autre part, nous avons

$$\rho'_2 - \rho_2 + (i-j-1)(l+1) + \rho_4 - \nu_{21} = k - i,$$
$$\rho'_2(\rho'_2 - \rho_2) + (i-j-1)(l+1)\rho_3 + \rho_4(\rho_4 - \nu_{21}) + l + 1 = p(\sigma+1)$$
$$+ (k-i)(\nu_{21} - 1) + l(\nu_{22} - 1).$$

Considérons le premier cas. On déduit de ces relations

$$(l+1)(l+2)(i-j-1) = p(\sigma+1) + 1.$$

En utilisant la relation (1), on a

$$l(l+1)(l+2)(i-j-1) = (\sigma+1)(k-j)(l+1)\nu_{21} + l[(\sigma+1)\nu_{21} + 1].$$

De (1), on déduit que ν_{21} divise l et de la relation précédente, que $l+1$ divise $(\sigma+1)\nu_{21}+1$. On a donc $l=(\sigma+1)\nu_{21}$ et ensuite

$$(l+2)(i-j-1) = k - j.$$

On arrive aisément, dans les trois autres cas, à la conclusion

$$l = (\sigma+1)\nu_{21}.$$

26. Supposons maintenant que le point S_1 soit infiniment voisin du point $R_i (o<i<l)$; les courbes $\overline{C}^*_1$ ont la même multiplicité ρ'_1 en R_1, R_2, ..., R_{i-1}; la multiplicité ρ'_i en R_i et la multiplicité ν_{22}—1 en R_{i+1}, ..., R_l. Ces courbes ont de plus les multiplicités ρ en A, ν_1 en P_1, P_2, ..., P_h, ρ_1 en Q_1, Q_2, ..., Q_{j-1}, ρ'_2 en Q_j, ν_{21}—1 en Q_{j+1}, ..., Q_k. On aura donc

$$\rho'_2 = \rho_2 + k - j.$$

Si $\rho = \nu_2$, on a

$$\rho_1 = \nu_2 + l\nu_{22} = \rho'_2 + (i-1)\rho'_1 + \rho'_i + (l-i)(\nu_{22}-1),$$
$$\rho'_2 = \nu_{21} - 1 + \rho_1;$$

d'où

$$\rho'_1 = \nu_{22} + k - j + 1, \quad \rho'_i = l + \nu_{22} - i(k-j+2) + 1.$$

La formule de Zeuthen, appliquée à la correspondance entre deux courbes $\overline{\Gamma}^*{}_1$, $\overline{C}^*{}_1$ homologues, donne

$$\rho''_1 + \rho''_2 + \cdots + \rho''_\lambda = k - j + 1. \tag{2}$$

Si

$$\rho'_1 = \rho'_i + \mu\rho''_1, \qquad (\mu > 1),$$

on a

$$\rho'_i = \rho''_1 + \nu_{22} - 1.$$

Il est facile de voir que cela entraîne

$$\rho''_1 = \rho''_2 = \cdots = \rho''_\lambda = 1, \quad \lambda = k - j + 1 = \mu, \quad \rho'_i = \nu_{22},$$
$$l + 1 = i(k - j + 2).$$

En considérant l'intersection de deux courbes $\overline{C}^*{}_1$ et en utilisant la relation (1), on trouve

$$l(l+1)(k-j+1) = (\sigma+1)[(k-j)(l+1)]\nu_{21} + l(\nu_{21}-1).$$

Comme ν_{21} divise l, on en déduit $\nu_{21}=1$. Mais alors, la relation précédente montre que $k-j$ divise l et, d'autre part, d'après la relation (1), l divise $k-j$. On a donc $l=k-j$. Cela conduit à la conclusion absurde $l+1=i(l+2)$. Le cas envisagé ne peut donc se présenter.

Si

$$\rho'_1 = \rho'_i + \rho''_1,$$

on a

$$\rho'_i = \nu_{22} - 1 + \mu\rho''_1.$$

On arrive à la conclusion

$$\rho''_1 = \rho''_2 = \cdots = \rho''_\lambda = 1, \quad \lambda = k - j + 1 = \mu, \quad \rho'_1 = \nu_{22} + k - j,$$
$$l + 1 = (i+1)(k-j) + 2i,$$

la relation (2) étant toujours valable.

En utilisant encore l'intersection de deux courbes $\overline{C}^*{}_1$, on trouve

$$(k-j)(l+1) + l - (k-j)\nu_{21} = p(\sigma+1).$$

Comparant à la relation (1), on en déduit que $k-j$ est divisible par p. Comme j est inférieur à p, on voit que ρ'_1 est supérieur à p, ce qui est absurde.

Supposons maintenant $\rho_2 = \nu_2 + (l-1)\nu_{22}$. Nous avons

$$\rho_1 = \rho'_2 + \rho'_1, \quad \rho'_2 = \nu_2 + (l-1)\nu_{22} + k - j;$$

d'où

$$\rho'_1 = \nu_{22} - (k-j).$$

Mais on a $\rho'_1 > \nu_{22} - 1$, d'où $k-j<1$, ce qui est absurde ($j<k$).

On voit donc que dans le cas étudié (σ pair), la suite $S_1, S_2, \ldots, S_\lambda$ doit se détacher d'un des points $Q_{j+1}, \ldots, Q_{k-1}$.

27. Nous allons maintenant nous occuper du cas où le nombre σ est impair, c'est-à-dire du cas où le point S_λ est multiple d'ordre $\rho'_\lambda = 2$ pour les courbes $\overline{C}^*_1$. Nous commencerons encore par l'hypothèse où le point S_1 est infiniment voisin d'un point Q_i ($j<i<k$).

La méthode est la même que dans le cas précédent (σ pair) et nous nous contenterons d'en donner le résultat. On trouve que les λ points $S_1, S_2, \ldots, S_\lambda$ sont doubles pour les courbes $\overline{C}^*_1$ et que l'on a $l = 2\lambda$ et

$$l = (\sigma + 1)\nu_{21}.$$

Il reste alors à examiner le cas où le point S_1 est infiniment voisin d'un point de la suite $R_1, R_2, \ldots, R_{l-1}$. Comme dans le cas précédent, on trouve que cette hypothèse doit être écartée.

28. Nous allons maintenant examiner le cas le plus simple, celui où le point A' est triple pour la surface Φ, le cône tangent étant formé de trois plans. En d'autres termes, nous allons supposer $\nu_1 = \nu_{21} = \nu_{22} = 1$.

Les courbes C'_1 ont en A la multiplicité $l+3$ et ont en commun une suite de h points simples $P_1, P_2, \ldots, P_h$, infiniment voisins successifs de A et une seconde suite de k points $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ dont les $j-1$ premiers sont multiples d'ordre $l+2$. Au point Q_j fait suite une série de l points simples $R_1, R_2, \ldots, R_l$. Le point Q_j est multiple d'ordre 2 ou d'ordre $1+l$ et les points $Q_{j+1}, \ldots, Q_k$ sont simples pour les courbes C'_1.

Les courbes $\overline{C}'_1$ ne passent plus par les points $R_1, R_2, \ldots, R_l$; par conséquent elles ont en Q_j la même multiplicité $l+2$ qu'aux points $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{j-1}$. Elles ont également la même multiplicité qu'aux points $Q_{j+1}, \ldots, Q_{i-1}$ et ne passent pas par les points $Q_{i+1}, \ldots, Q_k$. On a $\sigma = 0$ ou $\sigma = 1$.

Envisageons l'hypothèse $\sigma=0$. Les courbes $\overline{C}'_1$ ont en commun une suite de $l+1$ points simples $S_1, S_2, \dots, S_{l+1}$. On a, soit

$$\rho_{i-1} = l + 2 = \rho_i + l + 1, \quad \rho_i = 1,$$

soit

$$\rho_{i-1} = l + 2 = \rho_i + 1, \quad \rho_i = l + 1.$$

En considérant les points d'intersection absorbés en A de deux courbes $\overline{C}'_1$, d'une courbe $\overline{C}'_1$ et d'une courbe C_p ou C_2, on a

$$(l+3)^2 + h + (i-1)(l+2)^2 + \rho_i^2 + (l+1) = 4p,$$
$$l+3+h = p, \quad l+3+(i-1)(l+2)+\rho_i = p.$$

On en déduit

$$\rho_i^2 - (l+2)\rho_i + (l+1) = p(1-l).$$

Par suite, on a $l=1$ et soit $\rho_i = 1$, soit $\rho_i = 2$.

Supposons maintenant $\sigma=1$. Les courbes C'_1 ont en commun une suite de $\frac{1}{2}l$ points doubles $S_1, S_2, \dots$ On a, soit

$$\rho_{i-1} = l + 2 = \rho_i + l, \quad \rho_i = 2,$$

soit

$$\rho_{i-1} = l + 2 = \rho_i + 2, \quad \rho_i = l.$$

En considérant les intersections des courbes $\overline{C}'_1$, C_p, C_2, on a cette fois

$$(l+3)^2 + h + (i-1)(l+2)^2 + \rho_i^2 + 2l = 5p,$$
$$l+3+h = p, \quad l+3+(i-1)(l+2)+\rho_i = p.$$

On a donc

$$\rho_i^2 - (l+2)\rho_i + 2l = p(2-l).$$

On en déduit $l=2$ et $\rho_i=2$. Le point S_1, infiniment voisin de Q_i, est uni parfait pour l'involution I_p.

Nous trouvons donc quatre cas possibles :

1° $l=1, \quad \rho=4, \quad \rho_1=3, \quad \rho_2=2, \quad \rho_i=1, \quad \sigma=0;$
2° $l=1, \quad \rho=4, \quad \rho_1=3, \quad \rho_2=2, \quad \rho_i=2, \quad \sigma=0;$
3° $l=2, \quad \rho=5, \quad \rho_1=4, \quad \rho_2=2, \quad \rho_i=2, \quad \sigma=1;$
4° $l=2, \quad \rho=5, \quad \rho_1=4, \quad \rho_2=3, \quad \rho_i=2, \quad \sigma=1.$

29. Examinons le premier cas. D'après les résultats de notre seconde note (n° 15), nous avons

$$p = 3(\tau+1)+5,$$
$$h = 3(\tau+1)+1, \quad k = 2(\tau+1)+2, \quad 2j = \tau+1, \quad i = \tau+2.$$

Il en résulte que τ doit être impair et que, par conséquent, le point A'_1 est l'origine d'une suite de $\frac{1}{2}(\tau+1)$ points doubles biplanaires, sauf le dernier, qui est conique.

Considérons les courbes C^*_1. Ces courbes passent simplement par les points $Q_1, Q_2, \dots, Q_k$ et ne passent pas par le point R_1; elles ont la multiplicité α en A, la multiplicité $\alpha-1$ en $P_1, \dots, P_{t-1}$, la multiplicité α_t en P_t; elles ne passent pas par les points $P_{t+1}, \dots, P_h$ et ont enfin en commun une suite de m points doubles $T_1, T_2, \dots, T_m$ infiniment voisins successifs de P_t.

En coupant une courbe C^*_1 par une courbe C_p, on trouve $\alpha=\tau+4$ (n° 19). Deux cas peuvent se présenter (n° 20) : on a $\alpha_t=2$ ou $\alpha_t=\tau+1$ et, dans les deux cas, $2m=\tau+1$.

L'intersection d'une courbe C^*_1 et d'une courbe C_p donne

$$\alpha+(t-1)(\alpha-1)+\alpha_t=p.$$

Dans le premier cas, cela conduit à

$$t(\tau+3)=3\tau+5,$$

ce qui est impossible. Dans le second, on trouve $t=2$.

L'intersection de deux courbes C^*_1 comprend $(\tau+4)\,p$ points confondus en A. Cela conduit à une relation identique.

30. Le second cas correspond au deuxième et au quatrième cas du n° 15. On a

$$3i=3(\tau+1)+2,$$

ce qui est absurde. Ce second cas ne peut donc se présenter.

Le troisième cas, qui correspond au premier du n° 16, conduit à

$$p=4(\tau+1)+7,$$

$$h=4(\tau+1)+2, \quad k=3(\tau+1)+4, \quad 3j=\tau+1, \quad i=\tau+2.$$

Étudions les courbes C^*_1 et observons que τ doit être pair, car si τ était impair, p serait pair, contrairement à l'hypothèse p premier.

Supposons en premier lieu que les points $T_1, T_2, \dots, T_m$ fassent suite au point P_t. Les courbes C^*_1 passent simplement par les points $Q_1, Q_2, \dots, Q_k$ et ne passent pas par les points R_1, R_2. La multiplicité de A pour ces courbes est donc $\alpha=\tau+4$. Les courbes C^*_1 ont donc la multiplicité $\tau+3$ en $P_1, P_2, \dots, P_{t-1}$; elles ne passent, d'autre part, pas par les points $P_{t+1}, \dots, P_h$. Soit α_t leur multiplicité en P_t.

On a

$$(\tau+3)\,t+\alpha_t=4\tau+10,$$
$$(\tau+3)^2t+\alpha_t^2+\Sigma\alpha_i'^2=2(\tau+3)\,(2\tau+5),$$

par la considération de l'intersection d'une courbe C^*_1 et d'une courbe C_p, et de deux courbes C^*_1. Nous avons indiqué par α'_1, α'_2, ..., α'_m les multiplicités des points T_1, T_2, ..., T_m pour ces courbes (on a d'ailleurs $\alpha'_m=1$).

La formule de Zeuthen, appliquée à la correspondance entre deux courbes Γ^*_1, C^*_1 homologues, donne

$$\alpha_1'+\alpha_2'+\cdots+\alpha_m'=\tau+2.$$

Deux cas peuvent se présenter :

1° $\qquad \alpha_{t-1}=\tau+3=\alpha_t+\lambda\alpha_1', \quad (\lambda>1), \quad \alpha_t=\alpha_1';$

2° $\qquad \alpha_{t-1}=\tau+3=\alpha_t+\alpha_1', \quad \alpha_t=\lambda\alpha_1'.$

Dans les deux cas, on trouve facilement que

$$\alpha_1'=\alpha_2'=\cdots=\alpha_m'=1, \quad m=\lambda=\tau+2.$$

La première des relations qui viennent d'être écrites n'admet pas une solution entière pour t, lorsque $\alpha_t=1$ ou $\tau+2$.

Supposons maintenant que le point T_1 ne soit pas infiniment voisin d'un des points de la suite P_1, P_2, ..., P_h, mais d'un point de la suite Q_1, ..., Q_k ou R_1, R_2. Alors, les courbes C^*_1 ne passent pas par les points P_1, P_2, ..., P_h et comme les courbes C_p doivent rencontrer les courbes C^*_1 en p points confondus en A, ces courbes C^*_1 ont la multiplicité p en A; elles appartiennent donc au système des courbes C ayant un point p-uple à tangentes variables en A. Mais cela est impossible, car le degré de $|C^*_1|$ est, d'une part, égal à $pn-p\,(\tau+4)$ et, d'autre part, égal à $p\,(n-p)$; cela donnerait $3\tau+7=0$, ce qui est absurde.

Le troisième cas ne peut donc se présenter.

31. Passons au quatrième cas, qui correspond au troisième du n° 16. Nous avons

$$p=4(\tau+1)+7,$$
$$h=4(\tau+1)+2, \quad k=3(\tau+1)+4, \quad 3j=\tau, \quad i=\tau+2.$$

Ici encore, comme dans le cas précédent, τ doit être pair et, d'autre part, le point T_1 doit être infiniment voisin d'un point P_t de la suite P_1, P_2, ..., P_h.

Les courbes C^*_1 passent simplement par les points Q_1, Q_2, ..., Q_k, $\tau+4$ fois par le point A, $\tau+3$ fois par les points P_1, P_2, ...,

P_{t-1}, α_t fois par le point P_t, α'_t fois par T_1, α'_2 fois par T_2, ..., $\alpha'_m=1$ fois par T_m.

Les calculs sont exactement les mêmes que dans le cas précédent et ce quatrième cas ne peut donc se présenter.

Si une surface multiple d'ordre premier p, *normale*, *n'ayant qu'un nombre fini de points de diramation*, *possède un point de diramation triple dont le cône tangent est formé de trois plans distincts*, p *est de la forme* $3\tau+8$, *où* τ *est impair.*

32. Il importe de montrer que les involutions envisagées peuvent effectivement exister; nous le montrerons dans le cas le plus simple, $\tau=1$, en prenant comme involution celle qui est engendrée dans le plan F par une homographie de période $p=11$.

Supposons donc que F soit un plan et que nous ayons $\tau=1$, donc $p=11$, $h=7$, $k=6$, $j=1$, $i=3$, $t=2$. La transformation génératrice de l'involution I_{11} est une homographie d'équations

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^\alpha x_3, \tag{1}$$

où ε est une racine primitive d'ordre onze de l'unité. Nous supposerons que le point A a pour coordonnées 1, 0, 0 et nous prendrons comme système $|C|$ le système des courbes d'ordre onze. L'équation des courbes C_1 comprendra alors les monômes de degré onze que la transformation (1) reproduit. L'équation des courbes C'_1 devra commencer par le terme $x^7_1 x_2 x^3_3$ et celle des courbes C^*_1 par le terme $x^6_1 x^4_2 x_3$.

Les nombres $1+3\alpha$ et $4+\alpha$ doivent être multiples de 11, ce qui donne $\alpha=7$.

Cela étant, les courbes C_1 ont pour équation

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_0 x_1^{11} + \lambda_1 x_1^7 x_2 x_2^3 + \lambda_2 x_1^6 x_2^4 x_3 + \lambda_3 x_1^3 x_2^2 x_3^6 + \lambda_4 x_1^2 x_2^5 x_3^4 \\ \qquad + \lambda_5 x_1 x_2^8 x_3^2 + \lambda_6 x_2^{11} + \lambda_7 x_3^{11} = 0.\end{array}\right\} \tag{2}$$

Les courbes C'_1 sont données par $\lambda_0=0$ et les courbes C^*_1 par $\lambda_0=\lambda_1=0$.

Pour étudier les singularités des courbes C'_1, C^*_1 au point $A(1, 0, 0)$, nous utiliserons les transformations quadratiques

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = x_1^2 : x_1 x_2 : x_2 x_3, \tag{3}$$

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = x_1^2 : x_2 x_3 : x_1 x_3, \tag{4}$$

comme nous l'avons indiqué dans nos recherches sur les homographies planes citées au début de la première note. Rappelons que la première de ces transformations fait correspondre au point infiniment voisin de A sur la droite $x_2=0$, le point (1, 0, 0). La transformation (4) fait correspondre au point infiniment voisin de A sur la droite $x_3=0$, le point (1, 0, 0).

Puisque $h=7$, la transformation (4), exécutée sept fois, doit transformer les courbes C'_1 en des courbes ayant un point simple à tangente variable au point (1, 0, 0). Effectivement, on trouve

$$x_1^{77}(\lambda_1 x_2 + \lambda_7 x_3) + \lambda_2 x_1^{55} x_2^4 x_3^{19} + \cdots = 0.$$

On a $j=1$, donc la transformation (3) doit faire correspondre aux courbes C'_1 des courbes ayant un point double à tangentes distinctes et fixes au point (1, 0, 0). On trouve

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 x_1^{15} x_3^3 + \lambda_2 x_1^{16} x_2 x_3 + \lambda_3 x_1^8 x_2^4 x_3^6 + \lambda_4 x_1^9 x_2^5 x_3^4 + \lambda_5 x_1^{10} x_2^6 x_3^2 \\ + \lambda_6 x_1^{11} x_2^7 + \lambda_7 x_2^7 x_3^{11} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

La transformation (3), effectuée cinq fois sur ces courbes, doit donner des courbes ayant un point simple à tangente variable en (1, 0, 0), car on a $k=6$. On trouve

$$\lambda_1 x_1^{90} x_2^9 x_3^3 + x_1^{101}(\lambda_2 x_3 + \lambda_6 x_2) + \cdots = 0.$$

Enfin, la transformation (4), effectuée sur les courbes (5), doit donner des courbes ayant un point simple à tangente variable en (1, 0, 0), puisque $l=1$. On trouve bien

$$x_1^{22}(\lambda_1 x_3 + \lambda_2 x_2) + x_1^{11} x_2^4 x_3^5(\lambda_3 x_3^3 + \lambda_4 x_2 x_3^2 + \lambda_5 x_2^2 x_3 + \lambda_6 x_2^3) + \lambda_7 x_2^7 x_3^{46} = 0.$$

Les courbes $\overline{C}'_1$ sont données par $\lambda_0=\lambda_2=0$. Il est bien évident, d'après ce qui précède, que la transformation (4), effectuée sept fois sur ces courbes, donnera des courbes ayant un point simple à tangente variable en (1, 0, 0).

Puisque $i=3$, en effectuant trois fois de suite la transformation (3) sur les courbes $\overline{C}'_1$, on doit obtenir des courbes ayant un point simple en (1, 0, 0), la tangente étant $x_2=0$. On trouve en effet

$$\lambda_1 x_1^{34} x_3^3 + \lambda_3 x_1^{18} x_2^{10} x_3^6 + \lambda_4 x_1^{23} x_2^7 x_3^4 + \lambda_5 x_1^{28} x_2^4 x_3^2 + \lambda_6 x_1^{33} x_2 + \lambda_7 x_2^{23} x_3^{11} = 0.$$

Effectuons maintenant sur ces courbes deux fois la transformation (2); il vient

$$x_1^{77}(\lambda_1 x_3 + \lambda_6 x_2) + \lambda_3 x_1^{44} x_2^{10} x_3^{24} + \cdots = 0,$$

ce qui est conforme à la théorie établie.

Les courbes C^*_1 sont données par $\lambda_0=\lambda_1=0$. On voit sans peine, d'après les équations précédentes, qu'en effectuant six fois de suite la transformation (3), on obtient des courbes ayant un point simple à tangente variable en (1, 0, 0).

Puisque $t=2$, effectuons deux fois la transformation (4) sur les courbes C^*_1; nous devons trouver des courbes ayant un point double en (1, 0, 0), les tangentes étant $x^2_3=0$. Nous obtenons effectivement

$$\lambda_2 x_1^{20} x_2^4 + \lambda_3 x_1^{21} x_2^2 x_3 + \lambda_4 x_1^{14} x_2^5 x_3^5 + \lambda_5 x_1^7 x_2^8 x_3^9 + \lambda_6 x_2^{11} x_3^{13} + \lambda_7 x_1^{22} x_3^2 = 0.$$

En effectuant une fois la transformation (3), nous devons obtenir des courbes ayant un point double à tangentes variables en (1, 0, 0). Nous trouvons en effet

$$x_1^{33}(\lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_2 x_3 + \lambda_7 x_3^2) + \lambda_4 x_1^{22} x_2^8 x_3^5 + \lambda_5 x_1^{11} x_2^{15} x_3^9 + \lambda_6 x_2^{22} x_3^{13} = 0.$$

Nous retrouvons donc ce qui était prévu par la théorie.

On pourrait d'ailleurs construire un exemple du cas général où $\tau=2\eta+1$ est quelconque; cela serait aisé mais un peu long. Il suffirait de considérer dans le plan l'involution engendrée par l'homographie

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^\alpha x_3,$$

où ε est une racine primitive d'ordre $6\eta+11$, avec

$$\alpha = 4\eta + 7,$$

η étant choisi de telle sorte que p soit premier [1].

Liége, le 23 mars 1940.

---

[1] Erratum : page 68, ligne 16, *lire*

$$\mu'_\sigma = (\sigma\nu_{21} + 1)\lambda_{21}.$$

Imprimerie M. HAYEZ, rue de Louvain, 112, Bruxelles
(Domicile légal : rue de la Chancellerie, 4)