Sur quelques involutions appartenant à la surface de Humbert généralisée,

par LUCIEN GODEAUX, Correspondant de l'Académie.

(*Seconde communication*) (1).

Dans cette note, nous poursuivons l'examen des involutions cycliques n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à la surface de Humbert généralisée; nous étudions précisément deux involutions du cinquième ordre. La première de ces involutions possède cinq points unis non parfaits, la seconde trois points unis non parfaits et deux points unis parfaits. Dans les deux cas, la surface image de l'involution possède une courbe canonique d'ordre zéro ($p_a = P_4 = 1$). Il existe dans chaque cas, sur la surface, une courbe canonique contenant ∞^1 groupes de l'involution et à laquelle correspond, sur la surface image de l'involution, une courbe exceptionnelle.

1. L'homographie cyclique de période cinq du plan ϖ,

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^2 x_3 ,$$

où ε est une racine primitive cinquième de l'unité, donne une homographie H de S_6 transformant la surface F en elle-même, d'équations

$$X_0' : X_{11}' : X_{22}' : X_{33}' : X_{23}' : X_{31}' : X_{12}' = \varepsilon^\alpha X_0 : X_{11} : \varepsilon^2 X_{22} : \varepsilon^4 X_{33} : \varepsilon^3 X_{23} : \varepsilon^2 X_{31} : \varepsilon X_{12} ,$$

où l'on peut supposer $\alpha = 0, 1, 2, 3, 4$. Pour $\alpha = 1, 3$, la surface F possède des points doubles aux points unis de l'involution I_5 d'ordre cinq engendrée par H; nous ne considérerons pas ces cas ici. Pour $\alpha = 4$, on retrouve, sauf un changement de notations, le cas $\alpha = 0$. Nous étudierons donc les cas $\alpha = 0$, $\alpha = 2$.

(1) La première communication a paru dans le *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, mars 1936, pp. 240-251.

2. Envisageons le cas $\alpha = 0$. L'équation de la variété V_5^3 s'écrit, en tenant compte des équations du cône V_3^4,

$$X_0^3 + a X_0^2 X_{11} + X_0 (a_1 X_{11}^2 + a_2 X_{22} X_{23} + a_3 X_{33} X_{12})$$
$$+ b X_{11}^3 + X_{11} (b_1 X_{22} X_{23} + b_2 X_{33} X_{12}) + b_3 X_{22}^2 X_{12} + b_4 X_{33}^2 X_{31} + b_5 X_{23}^2 X_{33} = 0.$$

Les axes de l'homographie H sont les droites $O_0\, O_{11}$, $O_{22}\, O_{31}$ et les points O_{33}, O_{23} et O_{12}. L'involution I_5 possède donc les points unis suivants :

1° Trois points situés sur la droite $O_0\, O_{11}$ et donnés par les équations

$$X_{22} = X_{33} = X_{23} = X_{31} = X_{12} = 0, \quad X_0^3 + a X_0^2 X_{11} + a_1 X_0 X_{11}^2 + b X_{11}^3 = 0;$$

2° Le point O_{22};

3° Le point O_{33}.

3. Nous pouvons supposer sans restriction $b = 0$. Alors, un des trois points unis situés sur la droite $O_0\, O_{11}$ est précisément le point O_{11}. Le plan tangent en ce point à la surface F a pour équations

$$X_{22} = X_{33} = X_{23} = 0, \quad X_0 = 0;$$

c'est donc le plan $O_{11}\, O_{12}\, O_{31}$. Dans ce plan, H détermine l'homographie

$$X'_{11} : X'_{12} : X'_{31} = X_{11} : \varepsilon X_{12} : \varepsilon^2 X_{31}.$$

Dans le domaine du point O_{11}, l'involution I_5 possède deux points unis situés respectivement sur les droites $X_{12} = 0$, $X_{31} = 0$. Le point situé sur la droite $X_{31} = 0$ est d'ailleurs uni parfait pour l'involution [1]. Le point O_{11} est ce que nous appellerons pour abréger un point uni non parfait de seconde espèce.

[1] Sur les homographies planes cycliques (*Mémoires de la Soc. roy. des Sc. de Liége*, 1929); Sur les surfaces représentant les involutions planes engendrées par des homographies cycliques (*Idem*, 1930); Sur les courbes tracées sur la surface représentant l'involution engendrée par une homographie plane cyclique (*Idem*, 1931); Recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1930, pp. 450-467; 1935, pp. 338-344).

Les trois points unis de I_5 situés sur la droite $O_0\,O_{11}$ sont évidemment de même nature.

Passons à l'étude du point O_{22}. Le plan tangent à F en ce point a pour équations

$$X_{11} = X_{33} = X_{31} = 0, \quad X_{12} = 0;$$

c'est donc le plan $O_{22}\,O_0\,O_{23}$. Dans ce plan, H détermine l'homographie

$$X'_{22} : X'_0 : X'_{23} = X_{22} : \varepsilon^3 X_0 : \varepsilon X_{23}.$$

C'est également un point uni non parfait de seconde espèce. Les points unis infiniment voisins de O_{22} sont situés sur les droites $X_0 = 0$, $X_{23} = 0$ et le second est uni parfait pour I_5.

Le plan tangent en O_{33} a pour équations

$$X_{11} = X_{22} = X_{12} = 0, \quad X_{31} = 0;$$

c'est le plan $O_{33}\,O_0\,O_{23}$ dans lequel H détermine l'homographie

$$X'_{33} : X'_0 : X'_{23} = X_{33} : \varepsilon X_0 : \varepsilon^4 X_{23}.$$

Le point O_{33} est uni non parfait pour I_5; il possède deux suites de trois points unis infiniment voisins successifs, dont le dernier est uni parfait ([1]). Les premiers points de ces suites sont respectivement situés sur les droites $X_0 = 0$, $X_{23} = 0$. C'est ce que nous appellerons un point uni non parfait de première espèce ou point uni non parfait symétrique.

L'involution I_5 possède donc cinq points unis non parfaits : l'un de première espèce, quatre de seconde espèce.

Nous avons montré qu'entre les genres arithmétiques p_a d'une surface F et π_a d'une surface Φ image d'une involution cyclique d'ordre p appartenant à F et possédant α_1

([1]) Recherches sur les involutions appartenant à une surface algébrique. (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1931, pp. 1131-1150; 1935, pp. 338-344.) — Voir aussi : Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique. (*Actualités scient. et industrielles.* Paris, Hermann, 1935.)

points unis de première espèce et α_2 points unis de seconde espèce, on a la relation (1)

$$12(p_a+1)=12p(\pi_a+1)-(p^2-1)\alpha_1+\frac{1}{2}(p-1)(p-11)\alpha_2.$$

Actuellement, on a $p=5$, $p_a=3$, $\alpha_1=1$, $\alpha_2=4$. Le genre arithmétique π_a de la surface Φ image de l'involution I_5 est donc $\pi_a=1$.

4. Il existe trois courbes canoniques invariantes pour l'homographie H; ce sont : la courbe C_1, d'équations

$$X_{11}=X_{12}=X_{31}=0,\qquad X_{22}X_{33}-X_{23}^2=0,$$
$$X_0^3+a_2X_0X_{22}X_{23}+b_5X_{23}^2X_{33}=0.$$

La courbe C_2, d'équations

$$X_{22}=X_{12}=X_{23}=0,\qquad X_{11}X_{33}-X_{31}^2=0,$$
$$X_0^3+aX_0^2X_{11}+a_1X_0X_{11}^2+bX_{11}^3+b_4X_{33}^2X_{31}=0.$$

La courbe C_3, d'équations

$$X_{33}=X_{31}=X_{23}=0,\qquad X_{11}X_{22}-X_{12}^2=0,$$
$$X_0^3+aX_0^2X_{11}+a_1X_0X_{11}^2+bX_{11}^3+b_3X_{22}^2X_{12}=0.$$

Dans l'espace à trois dimensions déterminé par C_1, c'est-à-dire dans l'espace $O_0\,O_{22}\,O_{33}\,O_{23}$, projetons successivement la courbe C_1 de O_{22} sur $X_{22}=0$ et de O_{33} sur $X_{33}=0$. On voit immédiatement que la courbe C_1 possède un point double ordinaire en O_{22} et un point de rebroussement ordinaire en O_{33}. Sur la courbe C_1, de genre deux, l'homographie H détermine donc une involution d'ordre cinq possédant trois points unis. La courbe Γ_1, qui représente cette involution sur la surface Φ, est donc rationnelle.

La courbe C_2 est de genre quatre et passe par les trois points unis de I_5 situés sur la droite $O_0\,O_{11}$ ainsi que par le point uni O_{33}. Il en résulte qu'il correspond à cette courbe, sur la surface Φ, une courbe rationnelle Γ_2.

---

(1) Recherches... (*Loc. cit.*, *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1935, pp. 338-344.)

La courbe C_3 est de genre quatre et passe par le point O_{22}, par les trois points unis situés sur $O_0\, O_{11}$, c'est-à-dire par les quatre points unis non parfaits de seconde espèce de l'involution I_5. A la courbe C_3 correspond donc sur Φ une courbe rationnelle Γ_3.

A chacun des quatre points unis non parfaits de seconde espèce de I_5 est infiniment voisin un point uni parfait; on voit immédiatement que la courbe C_3 passe par ces cinq points. Il en résulte que la courbe C_3 est celle des courbes canoniques de F qui est la transformée de la courbe canonique de Φ. Mais la courbe Γ_3 est rationnelle; elle est donc exceptionnelle. D'autre part, F étant régulière, il en est de même de Φ et le genre géométrique de cette surface est $\pi_g = 1$. Il en résulte que la surface Φ a une courbe canonique d'ordre zéro.

5. Nous allons d'ailleurs retrouver ce résultat en montrant que l'on peut prendre pour modèle projectif de la surface Φ une surface du quatrième ordre.

Parmi les hyperquadriques transformées en elles-mêmes par l'homographie H se trouvent les hyperquadriques

$$\lambda_0 X_{33}^2 + \lambda_1 X_0 X_{23} + \lambda_2 X_{11} X_{23} + \lambda_3 X_{22} X_{12} = 0; \tag{1}$$

ce sont les seules qui se reproduisent multipliées par ε^3. En rapportant projectivement ces quadriques aux plans d'un espace S_3, nous obtiendrons donc un modèle projectif normal de Φ. En posant

$$Y_0 : Y_1 : Y_2 : Y_3 = X_{33}^2 : X_0 X_{23} : X_{11} X_{23} : X_{22} X_{12},$$

on obtient la surface du quatrième ordre

$$\begin{aligned} Y_2(Y_3^4 + a\, Y_1^2 Y_2 + a_1 Y_1 Y_2^2 + b\, Y_2^3) + Y_0 Y_2 Y_3 (b_4 Y_0 + a_3 Y_1 + b_2 Y_2) \\ + Y_0 Y_3^2 (b_5 Y_0 + a_2 Y_1 + b_1 Y_2 + b_3 Y_3) = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Cette surface du quatrième ordre possède un seul point multiple qui est le point double biplanaire $Y_1 = Y_2 = Y_3 = 0$. Il est aisé de voir que ce point possède dans son domaine du premier ordre un point double biplanaire auquel est infiniment voisin un point double conique. Par conséquent, la surface (2) est bien de genres un ($p_a = P_4 = 1$).

Observons d'ailleurs que les hyperquadriques (1) découpent sur F des courbes 4—canoniques. D'autre part, ces hyperquadriques touchent F aux quatre points unis de seconde espèce de l'involution I_5. Les courbes en question ont donc quatre points doubles et sont donc de genre **27**. Sur une de ces courbes, H détermine une involution d'ordre cinq ayant huit points unis et par suite, par la formule de Zeuthen, cette involution a pour image une courbe de genre trois.

6. Considérons maintenant la surface F, transformée en elle-même par l'homographie H d'équations

$$X'_0 : X'_{11} : X'_{22} : X'_{33} : X'_{23} : X'_{31} : X'_{12} = \varepsilon^2 X_0 : X_{11} : \varepsilon^2 X_{22} : \varepsilon^4 X_{33} : \varepsilon^3 X_{23} : \varepsilon^2 X_{31} : \varepsilon X_{12}.$$

La variété V_5^3 a maintenant pour équation

$$X_0^3 + X_0^2(a_1 X_{22} + a_2 X_{31}) + X_0(b_1 X_{11} X_{33} + b_2 X_{22}^2 + b_3 X_{22} X_{31})$$
$$+ c_1 X_{11}^2 X_{12} + c_2 X_{22}^3 + c_3 X_{22}^2 X_{31} + c_4 X_{33}^2 X_{23} + c_5 X_{23}^2 X_{11} + c_6 X_{31}^3 = 0.$$

Les axes de l'homographie H sont le plan $O_0\, O_{22}\, O_{31}$ et les points O_{11}, O_{12}, O_{23}, O_{33}. Les points unis de l'involution I_5 d'ordre cinq engendrée sur F par H sont:

1° Les trois points de rencontre de la droite $O_0\, O_{22}$ avec V_5^3;

2° Les points O_{11} et O_{33}.

7. Etudions la nature des points unis.

Le plan tangent à F au point O_{11} a pour équations

$$X_{22} = X_{33} = X_{23} = X_{12} = 0;$$

c'est donc le plan $O_{11}\, O_0\, O_{31}$, dans lequel H détermine l'homographie

$$X'_{11} : X'_0 : X'_{31} = X_{11} : \varepsilon^2 X_0 : \varepsilon^2 X_{31}.$$

Le point O_{11} est donc uni parfait pour l'involution I_5.

Le plan tangent à F au point O_{33} a pour équations

$$X_{11} = X_{22} = X_{12} = X_{23} = 0;$$

c'est donc le plan $O_{33}\,O_0\,O_{31}$, dans lequel H détermine une homologie de centre O_{33} et d'axe $O_0\,O_{31}$. Le point O_{33} est donc uni parfait pour I_5.

Pour étudier les points unis de I_5 situés sur la droite $O_{22}\,O_0$, supposons, ce qui n'est pas une restriction, $c_2=0$; alors le point O_{22} est un de ces points unis.

Le plan tangent en O_{22} à F a pour équations

$$X_{11}=X_{33}=X_{31}=X_0=0;$$

c'est donc le plan $O_{22}\,O_{12}\,O_{23}$. Dans ce plan, H détermine l'homographie

$$X'_{22}:X'_{12}:X'_{23}=X_{22}:\varepsilon^4 X_{12}:\varepsilon X_{23}.$$

Le point O_{22} est donc un point uni non parfait de première espèce (symétrique) pour I_5.

L'involution I_5 possède donc deux points unis parfaits et trois points unis non parfaits symétriques.

8. Entre les genres arithmétiques p_a, π_a de F et de la surface Φ image de I_5, nous avons la relation

$$12\,(p_a^1+1)=12\,p\,(\pi_a+1)+(p-1)\,(p-5)\,\alpha_0-(p^2-1)\,\alpha_1,$$

où nous devons faire $p=5$, $\alpha_0=2$, $\alpha_1=3$. On en déduit $\pi_a=1$.

D'autre part, la surface Φ étant régulière comme la surface F, son genre géométrique est $\pi_g=1$.

9. Les courbes canoniques de F transformées en ellesmêmes par H sont :

La courbe C_1, d'équations

$$X_{11}=X_{12}=X_{31}=0,\qquad X_{22}X_{33}-X_{23}^2=0,$$
$$X_0^3+a_1X_0^2X_{22}+b_2X_0X_{22}^2+c_2X_{22}^3+c_4X_{33}^2X_{23}=0;$$

La courbe C_2, d'équations

$$X_{22}=X_{12}=X_{23}=0,\qquad X_{11}X_{33}-X_{31}^2=0,$$
$$X_0^3+a_2X_0^2X_{31}+b_1X_0X_{11}X_{33}+c_6X_{31}^3=0;$$