Bulletin de la Classe des sciences

Variétés algébriques en relation avec les variétés de Véronèse et de Segre

Lucien Godeaux

Résumé
Construction de variétés algébriques lieux de droites joignant les points de deux variétés de Veronese ou de Segre.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Variétés algébriques en relation avec les variétés de Veronese et de Segre

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie

Résumé. — Construction de variétés algébriques lieux de droites joignant les points de deux variétés de Veronese ou de Segre.

Dans plusieurs travaux antérieurs, nous avons utilisé, pour construire des surfaces algébriques satisfaisant à certaines conditions, la variété lieu des droites s'appuyant sur deux variétés de Veronese ([1]). On peut se demander si les variétés lieux des droites s'appuyant sur deux variétés de Veronese ou de Segre ([2]) ne pourraient pas rendre des services dans des problèmes de même nature. L'objet de cette note est de construire les variétés engendrées par des droites s'appuyant soit sur une variété de Veronese et sur une variété de Segre, soit sur deux variétés de Segre.

Une variété W lieu des droites s'appuyant sur une variété de Veronese et sur une variété de Segre représente les groupes d'une involution du sixième ordre, engendrée par un groupe abélien, appartenant à un certain espace linéaire, mais un point de W correspond à ∞^1 groupes de l'involution.

([1]) Nous appelons variété de Veronese la variété obtenue en rapportant projectivement les hyperquadriques d'un espace linéaire aux hyperplans d'un espace de dimension égale à celle du système complet de ces hyperquadriques.

([2]) Les variétés de Segre que nous considérons ici représentent les couples de points de deux espaces linéaires.

Une variété W lieu des droites s'appuyant sur deux variétés de Segre représente une involution du quatrième ordre, engendrée par un groupe abélien, appartenant à un certain espace linéaire, mais un point de W correspond à ∞^2 groupes de l'involution.

Nous reprenons rapidement au début le cas des droites s'appuyant sur deux variétés de Veronese.

1. Soit dans un espace linéaire Σ à

$$\mathrm{R} = \frac{1}{2} r_1(r_1 + 3) + \frac{1}{2} r_2(r_2 + 3) + 1$$

dimensions deux variétés normales de Veronese Φ_1, Φ_2 représentant la première les hyperquadriques d'un espace S_1 à r_1 dimensions et la seconde, les hyperquadriques d'un espace S_2 à r_2 dimensions. Φ_1 est située dans un espace Σ_1 à $r_1\,(r_1 + 3) : 2$ dimensions et Φ_2 dans un espace Σ_2 à $r_2\,(r_2 + 3) : 2$ dimensions. Nous supposerons que les espaces Σ_1, Σ_2 ne se rencontrent pas.

Les variétés Φ_1, Φ_2 ont respectivement les ordres 2^{r_1} et 2^{r_2}, donc la variété W lieu des droites s'appuyant sur Φ_1 et Φ_2 est d'ordre $2^{r_1+r_2}$ et de dimensions $r_1 + r_2 + 1$. Cette variété W passe 2^{r_2} fois par Φ_1 et 2^{r_1} fois par Φ_2.

On peut supposer que les espaces S_1 et S_2 appartiennent à un espace S à $r_1 + r_2 + 1$ dimensions et ne se rencontrent pas.

Soient x_i $(i = 0, 1, \ldots, r_1)$ les coordonnées projectives d'un point x de S_1 et y_i $(i = 0, 1, \ldots, r_2)$, celles d'un point de S_2. Posons

$$\mathrm{X}_{ik} = x_i x_k, \qquad \mathrm{Y}_{ik} = y_i y_k.$$

Les équations de Φ_1 dans Σ_1 s'obtiennent en écrivant que le déterminant

$$|\mathrm{X}_{ik}|$$

est de caractéristique un et celles de Φ_2 dans Σ_2 en écrivant que le déterminant

$$|\mathrm{Y}_{ik}|$$

est également de caractéristique un. Considérées dans l'espace Σ, ces équations représentent la variété W.

A une section hyperplane de W correspond dans S une hyperquadrique d'équation

$$\varphi_2(x) + \varphi_2'(y) = 0$$

où φ_2, φ'_2 sont des polynômes quadratiques homogènes de leurs arguments.

Cette hyperquadrique est transformée en soi par l'homographie involutive

$$\frac{x'_i}{x_i} = \frac{y'_j}{-y_j} \quad (i = 0, l, n, r_1; j = 0, l, n, r_2)$$

qui a pour axes ponctuels S_1 et S_2. Cette homographie engendre dans S une involution I du second ordre et les points de W représentent les groupes de cette involution.

I

2. Considérons dans un espace Σ à R dimensions, une variété de Veronese Φ représentant les hyperquadriques d'un espace S_1 à r_1 dimensions et une variété normale Ψ de Segre représentant les couples de points de deux espaces S_2 à r_2 dimensions et S_3 à r_3 dimensions. La variété Φ appartient à un espace Σ_1 à $r_1\,(r_1 + 3) : 2$ dimensions et la variété Ψ à un espace Σ_2 à $r_2 r_3 + r_2 + r_3$ dimensions. Nous supposerons que les espaces Σ_1, Σ_2 ne se rencontrent pas et que par conséquent on a

$$R = \frac{1}{2} r_1(r_1 + 3) + (r_2 + 1)(r_3 + 1).$$

Cela étant, considérons la variété W lieu des droites s'appuyant sur les variétés Φ et Ψ. La dimension de la variété W est $r_1 + r_2 + r_3 + 1 = r + 1$.

La variété Φ est d'ordre $N_1 = 2^{r_1}$ et la variété Ψ d'ordre $N_2 = (r_2 + r_3)! : r_2! r_3!$. Par conséquent l'ordre de la variété W est

$$N = N_1 + N_2 = 2^{r_1} + \frac{(r_1 + r_3)!}{r_2! r_3!}.$$

La variété Φ est multiple d'ordre N_2 et la variété Ψ d'ordre N_1 pour W.

3. Nous pouvons supposer que les espaces S_1, S_2, S_3 appartiennent à un même espace S et ne se recontrent pas, ce qui exige que la dimension de S soit égale à $r + 1$.

Désignons par x_i $(i = 0, 1, \ldots, r_1)$ les coordonnées projectives des points de S_1, par y_i $(i = 0, 1, \ldots, r_2)$ celles des points de S_2 et par z_i $(i = 0, 1, \ldots, r_3)$ celles des points de S_3. Posons

$$X_{ik} = x_i x_k, \qquad U_{jh} = y_j z_h.$$

Les équations de Φ dans Σ_1 et celles de Ψ dans Σ_2 s'obtiennent en écrivant respectivement que les déterminants

$$|X_{ik}|, \ |U_{ik}|$$

sont de caractéristique un, et ces équations, considérées dans Σ, représentent la variété W.

A un point X de Φ correspond un point x de S_1 et au point U de Ψ correspondent un point y de S_2 et un point z de S_3. Par conséquent, à la droite XU de W correspond le plan xyz. A un point de W correspondent donc ∞^1 points de S.

A un hyperplan de l'espace Σ correspond dans l'espace S une hyperquadrique F dont l'équation peut s'écrire

$$\varphi_2(x) + \psi_{11}(y;z) = 0,$$

où $\varphi_2 = 0$ représente une hyperquadrique de l'espace S_1 et où ψ_{11} est une fonction bilinéaire entre les coordonnées des points y de S_2 et z de S_3.

Observons qu'un hyperplan de Σ contient ∞^{r-1} droites de W, où $r = r_1 + r_2 + r_3$, par conséquent, l'hyperquadrique F contient ∞^{r-1} plans xyz.

4. Considérons dans l'espace S l'homographie H de période trois dont les équations sont

$$\rho x_i' = x_i, \ \rho y_j' = \varepsilon y_j, \ \rho z_h' = \varepsilon^2 z_h,$$
$$(i = 0, 1, \ldots, r_1 \,;\, j = 0, 1, \ldots, r_2 \,;\, h = 0, 1, \ldots, r_3)$$

où ε est une racine cubique primitive de l'unité. Nous écrirons ces équations sous la forme abrégée

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{\varepsilon y} = \frac{z'}{\varepsilon^2 z}.$$

Considérons ensuite l'homographie biaxiale involutive H' d'équations abrégées

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{-y} = \frac{z'}{-z}.$$

Les homographies H, H′ sont permutables, forment un groupe abélien et engendrent dans l'espace S une involution I d'ordre six.

Les hyperquadriques F sont transformées en elles-mêmes par H et H′. Le système complet | F | est composé au moyen de l'involution I. A un groupe de cette involution correspond un point de W mais ce point correspond à ∞^1 groupes de I.

Considérons une droite XU et le plan xyz qui lui correspond. Le plan xyz est transformé en lui-même par H et H′. Dans ce plan H détermine une homographie non homologique dont les points unis sont les points x, y, z et l'homographie H′ détermine une homologie dont le centre est le point x et l'axe la droite yz.

Considérons un groupe $P_1P_2P_3$ du plan engendré par H et soit P le point qui lui correspond sur la droite XU. A ce groupe, l'homographie H′ fait correspondre un groupe $P'_1P'_2P'_3$ et les droites $P_1P'_1$, $P_2P'_2$, $P_3P'_3$ passent par le point x. Au second groupe correspond également le point P, c'est-à-dire que P correspond au groupe $P_1P_2P_3P'_1P'_2P'_3$ de l'involution I.

Lorsque le point P_1 décrit la droite P_1x, donc P_2 la droite P_2x et P_3 la droite P_3x, le point P décrit la droite XU.

Considérons maintenant une conique Γ du plan xyz, passant par le point y en y touchant la droite yx et par le point z en y touchant la droite zx. L'équation de cette conique peut s'écrire symboliquement sous la forme

$$x^2 + \lambda yz = 0.$$

Elle appartient à un faisceau et est transformée en soi par les homographies H et H′. Si elle passe par le point P_1, elle passe également par les autres points du groupe de I contenant ce point.

Lorsque le point P_1 décrit la conique Γ, le groupe de I auquel il appartient varie sur cette conique, mais le point P ne varie pas. Il y a donc une projectivité entre la ponctuelle XU et le faisceau de coniques | Γ |.

Il existe ∞^r génératrices g de W et de même ∞^r plans déterminés par un point x de S_1, un point y de S_2 et un point z de S_3. Entre les droites g de W et les plans $\gamma = xyz$ de S, il existe une correspondance biunivoque.

A un point de W *correspondent les* ∞^1 *groupes de l'involution* I *situés sur une conique* Γ *passant par un point* y *de* S_2 *et par un point* z *de* S_3, *cette conique touchant en* y *une droite* yx *et en* z *une droite* zx, *le point* x *appartenant à l'espace* S_1.

II

5. Soient dans un espace Σ à

$$R = r_1 r_2 + r_3 r_4 + r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + 1$$

dimensions, deux variétés normales de Segre Ψ_1, Ψ_2 représentant la première les couples de points de deux espaces S_1, S_2 respectivement à r_1, r_2 dimensions et la seconde les couples de points de deux espaces S_3, S_4 respectivement à r_3 et r_4 dimensions. La variété Ψ_1 appartient à un espace Σ_1 à $r_1 r_2 + r_1 + r_2$ dimensions et la variété Ψ_2 à un espace Σ_2 à $r_3 r_4 + r_3 + r_4$ dimensions. Nous supposerons que les espaces Σ_1, Σ_2 ne se rencontrent pas. Nous désignerons par W la variété engendrée par les cordes des variétés Ψ_1, Ψ_2.

La variété Ψ_1 est d'ordre $N_1 = (r_1 + r_2)! : r_1! r_2!$ et a $r_1 + r_2$ dimensions. La variété Ψ_2 est d'ordre $N_2 = (r_3 + r_4)! : r_3! r_4!$ et a la dimension $r_3 + r_4$. La variété W est d'ordre $N_1 + N_2$ et a la dimension $r + 1$, où

$$r = r_1 + r_2 + r_3 + r_4.$$

La variété Ψ_1 est multiple d'ordre N_2 et la variété Ψ_2 d'ordre N_1 pour W.

6. Nous pouvons supposer que les espaces S_1, S_2 appartiennent à à un même espace S_{12} de dimensions $r_1 + r_2 + 1$ et que les espaces S_3, S_4 appartiennt à un espace S_{34} de dimension $r_3 + r_4 + 1$, enfin que les espaces S_{12}, S_{34} appartiennent à un même espace S de dimension $r + 3$, les espaces S_1, S_2, S_3, S_4 ne se rencontrent pas deux à deux.

Désignons par x_i $(i = 0, 1, \ldots, r_1)$ les coordonnées projectives des points de S_1, par y_i $(i = 0, 1, \ldots, r_2)$ celles des points de S_2, par z_i $(i = 0, 1, \ldots, r_3)$ celles des points de S_3 et enfin par u_i $(i = 0, 1, \ldots, r_4)$ celles des points de S_4. Posons

$$V_{ik} = x_i y_k, \quad V'_{ik} = z_i u_k.$$

Les quantités V_{ik} peuvent être considérées comme les coordonnées des points de Σ_1 et les équations de Ψ_1 s'obtiennent en écrivant que le déterminant

$$| V_{ik} |$$

est de caractéristique un. De même les équations de Ψ_2 dans Σ_2 s'obtiennent en écrivant que le déterminant

$$| V'_{ik} |$$

est de caractéristique un.

Les équations précédentes, considérées comme simultanées dans Σ, représentent la variété W.

A une section hyperplane de W correspond dans S une hyperquadrique d'équation

$$\psi_{11}(x;y) + \psi'_{11}(z;u) = 0 \tag{1}$$

où $\psi_{11}(x_i y)$, $\psi'_{11}(z_i u)$ sont des formes bilinéaires de leurs arguments.

Observons que les sections hyperplanes de W contiennent ∞^{r-2} droites de cette hyperquadrique.

7. A une droite g de W joignant le point V de Ψ_1 au point V′ de Ψ_2 correspond dans S un tétraèdre γ dont les sommets x, y correspondent au point V de Ψ_1 et les sommets z, u au point V′ de Ψ_2. Il en résulte qu'à un point de g correspondent ∞^2 points de l'espace S.

L'hyperquadrique (1) est transformée en soi par une homographie H que nous représenterons par les équations

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{-z} = \frac{u'}{-u}$$

et par une homographie H′ d'équations

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{-y} = \frac{z'}{z} = \frac{u'}{-u}.$$

Ces homographies sont permutables et leur produit HH′ a pour équations

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{-y} = \frac{z'}{-z} = \frac{u'}{u}.$$

Elles forment donc un groupe abélien et engendrent dans l'espace S une involution I d'ordre quatre.

Considérons un groupe $P_1P_2P_3P_4$ de l'involution I. Il lui correspond un point P de la droite VV'.

Si nous désignons par x, y, z, u les coordonnées homogènes des points de S rapportés au tétraèdre γ, l'hyperquadrique (1) coupe l'espace de γ suivant la quadrique Q

$$xy + \lambda zu = 0.$$

Cette quadrique, de même que l'hyperquadrique (1), est transformée cn soi par lcs homographies H et H'. Ellc contient donc lcs ∞^2 groupes de I qui correspondent au point P de W. Il y a une projectivité entre la ponctuelle VV' et le faisceau de quadriques | Q |.

A un point de W *correspondent les* ∞^2 *groupes de l'involution* I *situés sur une quadrique* Q *passant par les arêtes* xz, xu, yz, yu *au tétraèdre* γ.

Liège, le 10 mars 1972.