Bulletin de la Classe des sciences

Sur une variété algébrique à trois dimensions ayant une surface canonique d'ordre zéro

Lucien Godeaux

Résumé
Construction d'une variété algébrique à trois dimensions dont le système des sections hyperplanes est son propre adjoint mais il existe cinq hyperplans ayant un contact du quatrième ordre avec la variété suivant des surfaces privées de courbe canonique.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur une variété algébrique à trois dimensions ayant une surface canonique d'ordre zéro

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie

Résumé. — Construction d'une variété algébrique à trois dimensions dont le système des sections hyperplanes est son propre adjoint mais il existe cinq hyperplans ayant un contact du quatrième ordre avec la variété suivant des surfaces privées de courbe canonique.

On sait qu'une hypersurface du cinquième ordre de l'espace à quatre dimensions possède une surface canonique d'ordre zéro, c'est-à-dire que le système de ses sections hyperplanes est son propre adjoint. Il est vraisemblable que l'image d'une involution engendrée sur une telle hypersurface par une homographie cyclique la transformant en soi, est également une variété possédant une surface canonique d'ordre zéro. Dans cette note, nous construisons une variété algébrique représentant l'involution engendrée sur une hypersurface V par une homographie H de période cinq ayant cinq points unis n'appartenant pas à la variété V. Le système des sections hyperplanes de la variété obtenue Ω est son propre adjoint, mais il se présente une particularité qu'il nous paraît intéressant de signaler. Il existe cinq hyperplans qui ont avec la variété Ω un contact du quatrième ordre le long de surfaces privées de courbe canonique, alors que les autres sections hyperplanes de la variété ont le genre géométrique $p_g = 24$. Les cinq surfaces en question, comptées chacune cinq fois, appartiennent au système des sections hyperplanes.

1. Considérons, dans un espace linéaire S_4 à quatre dimensions, une homographie H de période cinq, d'équations

$$x'_0 : x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = x_0 : \varepsilon x_1 : \varepsilon^2 x_2 : \varepsilon^3 x_3 : \varepsilon^4 x_4,$$

où ε est une racine primitive cinquième de l'unité. Cette homographie possède cinq points unis O_0, O_1, O_2, O_3, O_4, sommets de la figure de référence.

Dans le système linéaire $| V |$ des hypersurfaces du cinquième ordre de S_4, il y a cinq systèmes linéaires partiels $| V_0 |, | V_1 |, V_2 |, | V_3 |, | V_4 |$ appartenant à l'involution I engendrée par H dans S_4.

A chacun de ces systèmes est attachée une puissance de ε, respectivement $\varepsilon^0 = 1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4$.

L'équation des hypersurfaces V_0 est

$$\begin{gathered}
\lambda_0 x_0^5 + x_0^3(\lambda_{31} x_1 x_4 + \lambda_{32} x_2 x_3) \\
+ x_0^2(\lambda_{21} x_1^2 x_3 + \lambda_{22} x_2^2 x_1 + \lambda_{23} x_3^2 x_4 + \lambda_{24} x_4^2 x_2) \\
+ x_0(\lambda_{11} x_1^3 x_2 + \lambda_{12} x_2^3 x_4 + \lambda_{13} x_3^3 x_1 + \lambda_{14} x_4^3 x_3 + \lambda_{15} x_1^2 x_4^2 \\
+ \lambda_{16} x_2^2 x_3^2 + \lambda_{17} x_1 x_2 x_3 x_4) + \lambda_{01} x_1^5 + \lambda_{02} x_2^5 + \lambda_{03} x_3^5 + \lambda_{04} x_4^5 \\
+ \lambda_{05} x_1^3 x_3 x_4 + \lambda_{06} x_2^3 x_1 x_3 + \lambda_{07} x_3^3 x_2 x_4 + \lambda_{08} x_4^3 x_4 x_2 \\
+ \lambda'_{01} x_1 x_3^2 x_4^2 + \lambda'_{02} x_2 x_1^2 x_3^2 + \lambda'_{03} x_3 x_2^2 x_4^2 + \lambda'_{04} x_4 x_1^2 x_2^2 = 0
\end{gathered}$$

Cette équation contient 26 termes et par conséquent le système $| V_0 |$ a la dimension 25.

Si l'on considère les intersections des variétés V_0, V_1, V_2, V_3, V_4 avec une droite joignant deux des points O_0, O_1, O_2, O_3, O_4, on constate que les hypersurfaces V_0 rencontrent cette droite suivant ∞^1 groupes de points de l'involution I, tandis que les autres hypersurfaces ne rencontrent la droite que suivant un groupe. On en conclut que les systèmes $| V_1 |, | V_2 |, | V_3 |, | V_4 |$ ont la même dimension, inférieure d'une unité à celle de $| V_0 |$.

Les hypersurfaces du cinquième ordre de l'espace S_4 linéairement indépendantes sont au nombre de 126. La somme des dimensions des systèmes $| V_0 |, | V_1 |, | V_2 |, | V_3 |, | V_4 |$ augmentée de 4 doit être égale à 126. On en conclut que $| V_0 |$ a la dimension 25 et les autres la dimension 24.

Les hypersurfaces V_0 ne passent pas par les points unis de H, les variétés V_1, V_2, V_3, V_4 passent simplement par ces points. L'équation des hypersurfaces V_i contient en effet les termes

$$x_1^4 x_{i+1}, x_2^4 x_{i+2}, x_3^4 x_{i+3}, x_4^4 x_{i+4},$$

les indices $i + 1$, $i + 2$, $i + 3$, $i + 4$ étant remplacés par les nombres, inférieurs à cinq, qui leur sont congrus par rapport à 5.

2. Rapportons projectivement les hypersurfaces V_0 aux hyperplans d'un espace S_{25} à 25 dimensions. Aux groupes de l'involution I correspondent les points d'une variété Ω', à quatre dimension, d'ordre 5^3 car quatre hypersurfaces V_0 se rencontrent en 5^4 points.

Fixons l'attention sur une hypersurface $\overline{V}_0$ qui soit irréductible et ne passe par aucun des points unis de J. Il lui correspond un hyperplan S_{24} de S_{25} qui coupe la variété Ω' suivant une variété Ω, d'ordre 125, qui représente les groupes de l'involution I appartenant à $\overline{V}_0$.

On sait que le système canonique d'une surface du cinquième ordre de l'espace ordinaire est le système de ses sections planes. Il en résulte que le système des sections hyperplanes d'une variété V est son propre adjoint et que la variété possède une surface canonique d'ordre zéro. D'une manière générale, tout système linéaire de surfaces tracées sur une hypersurface de S_4 est son propre adjoint.

Désignons par $|F|$ le système de surfaces de dimension 124 découpé sur $\overline{V}_0$ par les hypersurfaces V. Le système $|F|$ est son propre adjoint et contient cinq systèmes linéaires partiels $|F_0|$, $|F_1|$, $|F_2|$, $|F_3|$, $|F_4|$ appartenant à l'involution I, découpés par les systèmes $|V_0|$, $|V_1|$, $|V_2|$, $|V_3|$, $|V_4|$. Ces systèmes ont tous la dimension 24.

Désignons par Φ les surfaces qui correspondent sur Ω aux surfaces F_0, c'est-à-dire les sections de Ω par les hyperplans S_{23} de l'espace S_{24} contenant Ω.

Soit $\overline{F}_0$ une surface générique de $|F_0|$ et $\overline{\Phi}$ la surface qui lui correspond sur Ω. Les surfaces F découpent sur $\overline{F}_0$, de genre géométrique $p_g = 124$, le système canonique de cette surface. La surface $\overline{F}_0$ étant l'intersection complète de deux hypersurfaces est régulière, de même que la surface Φ qui lui correspond sur Ω. La surface $\overline{F}_0$ a donc le genre arithmétique $p_a = 124$.

Le système canonique $|C|$ de la surface $\overline{F}_0$ contient cinq systèmes linéaires partiels $|C_0|$, $|C_1|$, $|C_2|$, $|C_3|$, $|C_4|$ appartenant à l'involution I. Ils sont découpés respectivement par les systèmes $|F_0|$, $|F_1|$,

$| F_2 |, | F_3 |, | F_4 |$. Le premier a la dimension 23 et les autres la dimension 24. L'involution I déterminée par H sur F_0 est privée de points unis. Nous avons démontré ([1]) que les courbes canoniques de $\bar{F}_0$ transformée des courbes canoniques de $\bar{\Phi}$ étaient celles qui forment le système de dimension minimum. C'est donc actuellement le système $| C_0 |$ et la surface $\bar{\Phi}$ a donc les genres $p_a = p_g = 24$. On sait d'ailleurs que l'on doit avoir

$$p_a + 1 = 5(p'_a + 1).$$

3. Les surfaces F étant d'ordre 5^4, leur genre linéaire est $p^{(1)} = 5^4 + 1$. L'ordre des surfaces Φ étant 125, le genre linéaire de ces surfaces est $p'^{(1)} = 126$.

Aux surfaces F_0 distinctes de $\bar{F}_0$ correspondent sur Ω les ∞^{23} surfaces Φ découpées par les hyperplans de S_{24} distincts de celui qui contient $\bar{\Phi}$. Il en résulte que ces hyperplans découpant sur $\bar{\Phi}$ le système canonique de cette surface, le système des sections hyperplanes de Ω est son propre adjoint et la surface canonique de Ω est d'ordre zéro.

Les bigenres de $\bar{F}_0$ et de $\bar{\Phi}$ sont respectivement

$$P_2 = p_a + p^{(1)} = 25.30, \qquad P'_2 = p'_a + p'^{(1)} = 25.6.$$

Dans le système bicanonique $| (2C) |$ de la surface $\bar{F}_0$, il y a cinq systèmes linéaires appartenant à l'involution I, soit $| (2C)_0 |, | (2C)_1 |, | (2C)_2 |, | (2C)_3 |, | (2C)_4 |$. Le premier a la dimension 149 et contient les courbes $2C_0$, $C_1 + C_4$, $C_2 + C_3$, les autres ont la dimension 149 également.

Dans l'espace S_{23} auquel appartient la surface $\bar{\Phi}$, le système canonique de $\bar{\Phi}$ étant découpé par les hyperplans, les courbes bicanoniques sont découpées par des hyperquadriques et il y a 150 de celles-ci linéairement indépendantes. Or, dans un espace S_{23}, il y a 300 hyperquadriques linéairement indépendantes. Il doit donc exister 150 hyperquadriques qui contiennent la surface $\bar{\Phi}$. Par conséquent, il y a 150 hyperquadriques linéairement indépendantes de S_{24} qui contiennent Ω.

Les sections hyperplanes Φ de la variété Ω forment un système linéaire qui est son propre adjoint et la variété possède donc une surface cano-

([1]) *Sur une propriété des correspondances rationnelles entre deux variétés algébriques*, (Bulletin des Sciences Mathématiques, 1938, pp. 291-297).

nique d'ordre zéro. Les sections hyperplanes Φ ont les genres $p_a = p_g = 24$, $p^{(1)} = 126$ et $P_2 = 150$.

4. L'hypersurface $\overline{V}_0$ rencontre chacune des droites O_1, O_2, O_1, O_1, ..., O_3O_4 suivant un groupe de points de l'involution I. A chacun de ces groupes correspond un point de Ω. Nous désignerons par O_{ik} le point qui correspond au groupe situé sur O_iO_k.

Un plan déterminé par trois points O_i, O_j, O_k coupe $\overline{V}_0$ suivant une courbe g d'ordre cinq et de genre 6, ne passant par aucun des points unis de H. Il lui correspond sur Ω une courbe γ d'ordre cinq et de genre deux, appartenant à un espace à 3 dimensions. Nous désignerons cette courbe par γ_{lm}, les nombres i, j, k, l, m étant dans un certain ordre, les nombres 0, 1, 2, 3, 4. Nous avons donc 10 de ces courbes sur Ω.

Un espace à trois dimensions déterminé par les points O_i, O_j, O_k, O_h, coupe $\overline{V}_0$ suivant une surface G_m, m étant celui des nombres inférieurs à 5 distinct des nombres i, j, k, h. A l'involution déterminées par H sur G_m correspond sur Ω une surface Ψ_m. Nous avons démontré ([1]) que cette surface avait les genres $p_a = p_g = 0$, $p^{(1)} = P_2 = 2$, $P_3 = 4$. Elle est donc dépourvue de courbe canonique.

Considérons un hyperplan ξ_0 de S_4 et désignons par ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 les hyperplans que H et ses puissances lui font correspondre.

Aux points de ξ_0 correspondent sur Ω les points d'une surface et ces points correspondent également à ceux des hyperplans ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4. Remarquons que la surface $\xi_0 + \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4$ est une hypersurface V_0 évidemment distincte de $\overline{V}_0$. La surface qui correspond à l'hyperplan ξ_0 est donc une surface Φ particulière.

Faisons varier ξ_0 d'une manière continue en le faisant tendre vers l'hyperplan $O_1O_2O_3O_4$, La surface Φ homologue tend vers la surface Ψ_0 comptée cinq fois. On a donc $5\Psi_0 \equiv \Phi$. Observons d'ailleurs que x_0^5 est une surface appartenant à $|\, V_0 \,|$.

Le même raisonnement nous conduit à la relation fonctionnelle

$$5\Psi_0 \equiv 5\Psi_1 \equiv 5\Psi_2 \equiv 5\Psi_3 \equiv 5\Psi_4 \equiv \Phi.$$

([1]) *Sur une surface algébrique de genre zéro et de bigenre deux* (Rendiconti della accademia dei Lincei, 2e sem, 1931, pp 479-481), *Sur les surfaces algébriques de genres arithmétique et géométrique zéro dont le genre linéaire est égal à deux* (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1932, pp. 26-37).

Les surfaces $\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4$ appartiennent donc à des hyperplans de S_{24} et le long de chacune de ces surfaces, l'hyperplan correspondant a un contact d'ordre quatre avec la variété Ω.

Remarquons que l'hypersurface $x_0x_1x_2x_3x_4 = 0$ appartient également à $| V_0 |$, donc les cinq surfaces $\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4$ appartienent à un même hyperplan de S_{24}.

5. Il convient d'étudier de plus près les surfaces Ψ et nous étudierons Ψ_0.

L'équation de la surface découpée sur V_0 par $x_0 = 0$ contient 11 termes, donc la surface Ψ_0 appartient à un espace S_{10} à dix dimensions que nous désignerons par η_0. Elle appartient aussi à un hyperplan de S_{24} que nous désignerons par η'_0.

La surface Ψ_0 contient les points $O_{12}, O_{13}, O_{14}, O_{23}, O_{24}$ et O_{34}. Elle contient également les quatre courbes $\gamma_{01}, \gamma_{02}, \gamma_{03}, \gamma_{04}$. En tenant compte des points communs à ces courbes (par exemple, O_{34} appartient aux courbes γ_{01}, γ_{02}) on voit que les espaces à trois dimensions contenant ces quatre courbes appartiennent précisément à un espace à neuf dimensions contenu dans η_0.

Si nous reprenons la variété V_0 composée des hyperplans $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$, on voit qu'à l'intersection de cette variété et de G_0 correspond la section de Ψ_0 par un hyperplan de η'_0. Faisons varier ξ_0 d'une manière continue en le faisant tendre successivement vers $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0$, on arrive à l'équation fonctionnelle, où γ_0 désigne les sections hyperplanes de Ψ_0,

$$\gamma_0 \equiv 5\gamma_{01} \equiv 5\gamma_{02} \equiv 5\gamma_{03} \equiv 5\gamma_{04}.$$

On en conclut que l'hyperplan de η'_0 contenant une des courbes $\gamma_{01}, \gamma_{02}, \gamma_{03}, \gamma_{04}$ a un contact d'ordre quatre avec la surface Ψ_0, c'est-à-dire un contact d'ordre 9 avec la variété Ω.

Il existe sur la variété Ω cinq sections hyperplanes qui se réduisent à des surfaces d'ordre 25 le long desquelles les hyperplans ont un contact d'ordre quatre avec la variété. Ces surfaces appartiennent à des espaces linéaires à dix dimensions et sont dépourvues de courbe canonique, alors que les sections hyperplanes de Ψ_0 ont en général le genre géométrique $p_g = 24$. Ces cinq surfaces appartiennent à un même hyperplan. Il existe dix courbes d'ordre cinq et de genre deux, appartenant à des espaces à trois dimensions, le long de chacune desquelles un espace linéaire à 9 dimensions a un contact d'ordre neuf avec la variété Ω.

Sur la surface Ψ_0, le faisceau des courbes bicanoniques est déterminé par les courbes $\gamma_{01} + \gamma_{04}, \gamma_{02} + \gamma_{03}$. Le système tricanonique est déterminé par les courbes $2\gamma_{01} + \gamma_{03}, 2\gamma_{02} + \gamma_{01}, 2\gamma_{03} + \gamma_{04}, 2\gamma_{04} + \gamma_{02}$.

On remarquera que ces courbes ont en commun les points O_{14}, O_{23} de sorte que le système tricanonique à deux points-base, comme nous l'avions du reste établi dans notre note citée plus haut.

On parvient naturellement à des propriétés analogues pour les surfaces Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 et Ψ_4.

6. La question peut être étendue aux variétés algébriques à plus de trois dimensions.

Considérons dans un espace S_{p-1} à $p-1$ dimensions une hypersurface V d'ordre premier p, transformée en soi par une homographie H de période p, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, dont aucune n'appartient à V. Soit Ω une variété image de l'involution I engendrée par H sur V. Nous pouvons choisir Ω de telle sorte qu'à ses sections hyperplanes correspondent les sections de V par les hypersurfaces d'ordre p distinctes de V, de S_{p-1}. La variété Ω possède une variété canonique d'ordre zéro et le système de ses sections hyperplanes est son propre adjoint.

Il existe p hyperplans ayant un contact d'ordre $p-1$ avec Ω le long d'une variété à $p-2$ dimensions dépourvue de variété canonique et qui, comptée p fois, appartient au système des sections hyperplanes.

Il existe $p(p-1):2$ variétés à $p-3$ dimensions appartenant à des espaces linéaires qui ont, le long de ces variétés, un contact d'ordre $2p-1$ avec la variété Ω. Il existe $p(p-1)(p-2):6$ variétés à $p-4$ dimensions appartenant à des espaces linéaires qui ont, le long de ces variétés, un contact d'ordre $3p-1$ avec Ω.

Et ainsi de suite.

Liège, le 21 avril 1972.