VARIÉTÉS A TROIS DIMENSIONS SUR LESQUELLES L'OPÉRATION D'ADJONCTION EST PÉRIODIQUE;

PAR M. LUCIEN GODEAUX.

On sait l'intérêt qu'a présenté pour la formation de la Géométrie sur une surface algébrique, la construction, par M. Enriques, de la surface du sixième ordre passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre. Cette surface est dépourvue de courbe canonique, mais possède une courbe bicanonique d'ordre zéro. Sur cette surface, tout système linéaire coïncide avec son biadjoint, c'est-à-dire que l'opération d'adjonction a la période deux ([1]). Il était intéressant de voir s'il existe des variétés algébriques à trois dimensions présentant des propriétés analogues à celles de la surface d'Enriques. Partant du fait que cette surface représente une involution du second ordre privée de points unis appartenant à une surface de genre *un* (à courbes canonique et pluricanoniques d'ordre zéro), nous avons recherché s'il pouvait exister, sur une variété algébrique à trois dimensions à surfaces canonique et pluricanoniques d'ordre zéro, une involution cyclique dont l'image soit une variété sur laquelle l'opération d'adjonction est périodique. La période de cette opération est égale à l'ordre de l'involution. Par ce procédé, nous avons pu construire des variétés sur lesquelles l'opération d'adjonction a la période deux ou trois ([2]). Cependant,

---

([1]) Cette surface a été l'objet de nombreux travaux : *voir* à ce sujet notre exposé sur *Les surfaces algébriques non rationnelles de genre arithmétique et géométrique nuls* (*Actual. Scient. et Ind.*, n° 123, Paris, Hermann, 1934).

([2]) *Observations sur les variétés algébriques à trois dimensions sur les quelles l'opération d'adjonction est périodique* (*Bull. de la Soc. des Sciences de Liége*, 1940); *Sur les variétés algébriques à trois dimensions de genre* 1 *contenant des involutions cycliques* (Conférence de la Réunion internationale contrairement à ce qui a lieu dans le cas de la surface d'Enriques, l'involution considérée possède un nombre fini de points unis et l'on peut prendre pour image de cette involution une variété normale dont les points de diramation sont isolés et multiples pour la variété. Chacun de ces points multiples est équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à un ensemble de surfaces rationnelles. Les variétés que nous avons construites sont l'une dépourvue de surface canonique, mais possède une surface bicanonique formée d'une combinaison de surfaces rationnelles provenant des points de diramation, l'autre dépourvue de surfaces canonique et bicanonique, mais possède une surface tricanonique formée d'une combinaison analogue.

Une question qui se pose est de savoir si le procédé utilisé permettra de construire des variétés sur lesquelles l'opération d'adjonction a une période p donnée ([3]). Dans cette note, nous répondons à cette question en établissant le théorème suivant :

Si une variété algébrique à trois dimensions, dont les surfaces canonique et pluricanoniques sont d'ordre zéro, contient une involution cyclique d'ordre premier p, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, dont l'image soit une variété dépourvue de surface canonique, mais possédant une surface p-canonique, p est au plus égal à 5.

Il resterait à voir si une variété dépourvue de surface canonique, mais possédant une surface pluricanonique réductible à des domaines de points multiples, peut être obtenue comme image d'une involution appartenant à une autre variété. Différents indices nous font croire qu'il en est bien ainsi. Nous espérons pouvoir le démontrer quelque jour.

1. Soit V une variété algébrique à trois dimensions, complètement régulière, possédant des surfaces canonique et pluricano-

---

des Mathématiciens, organisée par la Société Mathématique de France, Paris, 1937); *Recherches sur les involutions cycliques du troisième ordre appartenant à une variété algébrique à trois dimensions* (*Bulletin des Sciences Mathématiques*, 2e série, t. 61, 1937, 1re partie, p. 82); *Un problème sur les variétés algébriques* (*Revue scientifique*, 1942).

([3]) Dans un Mémoire encore inédit, M. B. d'Orgeval a étudié le cas $p = 5$.

niques d'ordre zéro. Tout système linéaire de surfaces tracé sur V possède les propriétés suivantes :

a. Il est son propre adjoint;
b. La série caractéristique est complète (4);
c. La surface générale du système est régulière (5).

Supposons que la variété contienne une involution cyclique I_p, d'ordre premier impair p, possédant un nombre fini de points unis, telle que la variété image de l'involution soit dépourvue de surface canonique, mais possède au moins une surface pluricanonique.

Dans nos travaux cités plus haut, nous avons montré que l'on pouvait prendre pour modèle projectif de la variété V une variété normale sur laquelle l'involution I_p est engendrée par une homographie H de période p, possédant p axes ponctuels $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p$, dont un seul, σ_1, coupe V (aux points unis de I_p). Le système $|F|$ des sections hyperplanes de V contient p systèmes linéaires partiels $|F_1|, |F_2|, \ldots, |F_p|$ appartenant à l'involution I_p, le système $|F_i|$ étant découpé par les hyperplans passant par les axes de H, σ_i excepté.

Le système $|F_1|$ est dépourvu de points-base, les systèmes $|F_2|$, $|F_3|, \ldots, |F_p|$ ont pour points-base les points unis de I_p.

Désignons par Ω la variété image de l'involution I_p, par Φ_1, $\Phi_2, \ldots, \Phi_p$ les surfaces qui correspondent sur Ω respectivement aux surfaces $F_1, F_2, \ldots, F_p$. Les systèmes $|\Phi_1|, |\Phi_2|, \ldots, |\Phi_p|$ sont complets et nous pouvons supposer la dimension de $|F_1|$, c'est-à-dire de $|\Phi_1|$, suffisamment grande pour pouvoir prendre, comme modèle projectif de la variété Ω, une variété dont les sections hyperplanes sont les surfaces Φ_1.

Sur ce modèle projectif de Ω, il correspond, aux points unis de l'involution I_p, des points de diramation isolés, multiples pour la variété.

---

(4) *Voir* F. Severi, *Fondamenti per la Geometria sulle varietà algebriche* (*Rendiconti del Circolo Matem. di Palermo*, t. 28, 1909).

(5) *Voir* Castelnuovo-Enriques, *Sur les intégrales de première espèce d'une surface et d'une variété algébrique* (*Annales de l'École Normale Supérieure*, 3e série, t. 23, 1906).

2. Comme nous l'avons établi antérieurement, l'hypothèse faite sur Ω revient à supposer que, sur cette variété, l'opération d'adjonction a la période p. On peut donc supposer les systèmes linéaires $|\Phi_1|, |\Phi_2|, \ldots, |\Phi_p|$ rangés dans un ordre tel que leurs adjoints soient respectivement $|\Phi_2|, |\Phi_3|, \ldots, |\Phi_1|$.

Sur une surface $F_1^\star$ de $|F_1|$, le système canonique complet est découpé par les surfaces F; ce système comprend p systèmes linéaires partiels

$$(1) \qquad |(F_1^\star, F_1)|, \quad |(F_1^\star, F_2)|, \quad \ldots, \quad |(F_1^\star, F_p)|$$

appartenant à l'involution I_p. L'un de ces systèmes est le transformé du système canonique de la surface $\Phi_1^\star$ homologue de $F_1^\star$. Nous avons démontré que c'était celui des systèmes (1) qui avait la plus petite dimension et que, de plus, les autres systèmes avaient la même dimension égale à la précédente augmentée d'une unité ([6]). Il en résulte que, si p_a est le genre arithmétique de $\Phi_1^\star$, le système $|(F_1^\star, F_2)|$, transformé du système canonique de $\Phi_1^\star$, a la dimension $p_a - 1$; les autres systèmes (1) ont la dimension p_a. Par conséquent, le système $|F_1|$ a la dimension $p_a + 1$, le système $|F_2|$ la dimension $p_a - 1$ et les systèmes $|F_3|, |F_4|, \ldots, |F_p|$ la dimension p_a.

D'après la théorie des homographies périodiques, la dimension de $|F|$ est donnée par

$$p_a + 1 + p_a - 1 + (p-2)p_a + p - 1 = p(p_a + 1) - 1.$$

La surface F a par conséquent le genre arithmétique

$$p(p_a + 1) - 1.$$

Les groupes de I_p situés sur la surface $F_1^\star$ forment une involution privée de points unis et, entre les genres arithmétiques p'_a de $F_1^\star$ et p_a de $\Phi_1^\star$, on a la relation ([7])

$$p'_a + 1 = p(p_a + 1).$$

([6]) *Sur les involutions cycliques, dépourvues de points unis, appartenant à une surface algébrique régulière* (*Bulletin de l'Académie de Belgique*, 1932).

([7]) *Recherches sur les involutions douées d'un nombre fini de points de coïncidence, appartenant à une surface algébrique* (*Bulletin de la Société Mathématique de France*, 1919); *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (*Actual. Scient. et Ind.*, n° 270, Paris, Hermann, 1935).

On retrouve ainsi la valeur du genre arithmétique des surfaces F_1 et par conséquent des surfaces F.

3. Envisageons maintenant une surface $F_p^\star$ de $|F_p|$ et la surface $\Phi_p^\star$ qui lui correspond sur Ω. La surface $F_p^\star$ passe par les points unis de I_p, et par conséquent sur cette surface nous avons une involution cyclique d'ordre p ayant un nombre fini de points unis. La surface $\Phi_p^\star$, image de cette involution, possède, aux points de diramation de Ω, des points d'une certaine multiplicité, au moins égale à deux.

D'autre part, le système canonique de $\Phi_p^\star$ est par hypothèse découpé par les surfaces Φ_1, c'est-à-dire est formé par les sections hyperplanes de la surface. Ce système canonique étant dépourvu de points-base, les points multiples que possède $\Phi_p^\star$ aux points de diramation de Ω doivent être sans influence sur les courbes canoniques; ce sont donc des points doubles.

Nous avons établi que, lorsque les points de diramation d'une surface image d'une involution cyclique d'ordre premier impair étaient doubles pour cette surface, chacun d'eux était un point double biplanaire auquel étaient infiniment voisins successifs $\frac{1}{2}(p-3)$ points doubles biplanaires, dont le dernier est ordinaire [8]. Les points unis de l'involution sur la surface $F_p^\star$ sont ce que nous avons appelé des *points unis symétriques*. Les courbes $(F_p^\star, F_1)$ passant par un de ces points y acquièrent un point double à tangentes fixes. Il en résulte que les points unis de I_p sont simples pour les surfaces F_p, car les surfaces F_1 passant par un de ces points y acquièrent un point de multiplicité au moins égale à 2 (et actuellement égale à 2). Par conséquent, le genre arithmétique des surfaces F_p est égal à celui de la surface F générale.

L'adjoint de $|\Phi_p|$ étant $|\Phi_1|$ et ce système ayant la dimension p_a+1, le genre arithmétique de $\Phi_p^\star$ est égal à p_a+2. Entre le genre arithmétique p'_a de $F_p^\star$ et celui p''_a de $\Phi_p^\star$, nous avons la

---

(8) *Recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (2e note) (*Bulletin de l'Académie de Belgique*, 1931); *Les involutions cycliques* (*loc. cit.*).

relation ([9])

$$12(p'_a+1)=12p(p''_a+1)-(p^2-1)k,$$

k étant le nombre des points unis de I_p. En remplaçant p_a et p''_a par leurs valeurs, nous en tirons

$$(p^2-1)k=24p.$$

p étant premier impair, p^2-1 doit diviser 24 et l'on a donc $p=3$ ou $p=5$. Si $p=3$, $k=9$ et si $p=5$, $k=5$.

Remarquons que si $p=2$, les points unis de I_2 sont parfaits; nous avons montré que l'on a alors $k=16$.

Le théorème énoncé au début est complètement démontré.

([9]) *Recherches sur les involutions douées, etc.* (*loc. cit.*); *Les involutions cycliques* (*loc. cit.*).

(Extrait du *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2ᵉ série, t. LXVIII, sept-oct. 1944.)