EXTRAIT DU *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége*
Séance du 25 mai 1939, n° 5.

Sur les surfaces irrégulières possédant une involution cyclique régulière,

par LUCIEN GODEAUX, Membre de la Société.

Dans plusieurs notes antérieures, nous avons étudié les involutions régulières, cycliques, d'ordre deux ou trois, appartenant à une surface algébrique irrégulière [1]. Comme nous l'avions fait remarquer, les méthodes que nous utilisions pouvaient s'appliquer au cas des involutions cycliques d'ordre quelconque. Dans cette note, nous nous proposons d'indiquer à grands traits cette extension, que nous développerons dans un travail ultérieur.

1. Soit F une surface algébrique d'irrégularité $q > 1$, contenant une involution cyclique I_p, d'ordre premier p, régulière, n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Désignons par T la transformation birationnelle de F en elle-même, génératrice de l'involution I_p.

Construisons sur F un système linéaire complet $|C_1|$, transformé en lui-même par T, contenant p systèmes linéaires partiels $|C_{11}|$, $|C_{12}|$, ..., $|C_{1p}|$, composés au moyen de l'involution I_p, dont l'un, $|C_{11}|$, soit privé de points-base. Si r_{11} est la dimension du système $|C_{11}|$, en rapportant projectivement les courbes de ce système aux hyperplans d'un espace à r_{11} dimensions, il correspond à F une surface normale Φ, image de l'involution I_p et par suite régulière.

Désignons par Γ_{11} les courbes qui correspondent sur Φ aux courbes C_{11}, c'est-à-dire les sections hyperplanes de Φ ; par Γ_{12}, Γ_{13}, ..., Γ_{1p} les courbes qui correspondent sur Φ respectivement aux courbes C_{12}, C_{13}, ..., C_{1p}. Les systèmes $|\Gamma_{11}|$, $|\Gamma_{12}|$, ..., $|\Gamma_{1p}|$ sont complets.

Chacun des points de diramation de Φ est équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à un ensemble de courbes rationnelles. Les courbes Γ_{12}, Γ_{13}, ..., Γ_{1p} passent par les

(1) Sur les surfaces de Picard de diviseur deux (*Bull. Acad. roy. de Belgique*, 1927, pp. 394-414); Sur une propriété des surfaces algébriques irrégulières contenant une involution régulière d'ordre deux (*Idem*, pp. 524-543); Sur les involutions régulières d'ordre trois appartenant à une surface irrégulière (*Idem*, pp. 707-724); Sur les surfaces hyperelliptiques de rang trois et de genres un (*Idem*, en cours d'impression).

points de diramation de la surface Φ, en y rencontrant un certain nombre des courbes rationnelles en question.

Désignons par Γ_1 la courbe qui correspond sur la surface Φ à une courbe C_1 quelconque de F. Lorsque la courbe C_1 varie d'une manière continue dans $|C_1|$ et tend vers une courbe C_{11}, la courbe Γ_1 varie d'une manière continue sur Φ et tend vers une courbe $p\Gamma_{11}$. La courbe Γ_1 appartient donc au système $|p\Gamma_{11}|$.

Lorsque la courbe C_1 varie d'une manière continue dans $|C_1|$ et tend vers une courbe C_{1i}, la courbe Γ_1 varie d'une manière continue dans le système $|p\Gamma_{11}|$ et tend vers une courbe $p\Gamma_{1i}$, augmentée de composantes des points de diramation. Nous écrirons

$$p\,\Gamma_{11} \equiv p\,\Gamma_{1i} + \Delta_{i1} + \Delta_{i2} + \dots + \Delta_{i\alpha}, \tag{1}$$

en désignant par α le nombre des points unis de I_p et par Δ_{ik} une combinaison convenable des composantes du k-ième point de diramation.

Nous obtenons ainsi $p-1$ relations fonctionnelles (pour $i = 2, 3, \dots, p$).

2. Soit $\{C\}$ le système continu complet contenant le système $|C_1|$. On sait que, en remplaçant éventuellement $|C_1|$ par un de ses multiples convenablement choisi, le système $\{C\}$ sera formé de ∞^q systèmes linéaires de mêmes caractères que $|C_1|$.

A une courbe quelconque C de $\{C\}$, T fait correspondre une certaine courbe $\overline{C}$. Lorsque la courbe C varie d'une manière continue dans $\{C\}$ et tend vers une courbe C_1, la courbe $\overline{C}$ varie d'une manière continue sur F et tend vers une courbe C_1; elle appartient donc également au système continu $\{C\}$ et celui-ci est transformé en lui-même par T.

A la transformation T correspond donc une transformation birationnelle T′ de la variété de Picard V_q attachée à la surface F. Cette transformation T′ a la période p et possède un point uni : le point image du système $|C_1|$. La transformation T′ ne peut, d'autre part, posséder qu'un nombre fini de points unis, car s'il existait une infinité de systèmes linéaires de $\{C\}$ transformés en eux-mêmes par T, la surface Φ contiendrait des systèmes continus de courbes non linéaires et serait irrégulière, contrairement à l'hypothèse.

La transformation T′ possède au moins un second point uni et par conséquent, dans le système $\{C\}$, il existe au moins un second système linéaire $|C_2|$, distinct de $|C_1|$, transformé en lui-même par T. On peut supposer sans restriction, en remplaçant éventuellement $|C_1|$ par un de ses multiples d'ordre suffisamment élevé, que $|C_2|$ contient p systèmes linéaires partiels, $|C_{21}|$, $|C_{22}|$, ..., $|C_{2p}|$, composés au moyen de l'involution I_p. Nous désignerons par $|\Gamma_{21}|$, $|\Gamma_{22}|$, ..., $|\Gamma_{2p}|$ les systèmes linéaires (complets) qui leur correspondent sur Φ.

3. Considérons une courbe quelconque C de $\{C\}$ et soit Γ la courbe qui lui correspond sur Φ. Lorsque la courbe C décrit le système $\{C\}$, la courbe Γ décrit un système continu qui, la surface Φ étant régulière, appartient à un système linéaire $|\Gamma|$. Parmi les courbes Γ se trouvent les courbes Γ_1 et par suite le système $|\Gamma|$ coïncide avec le système complet $|p\Gamma_{11}|$.

Faisons tendre la courbe C vers une courbe C_{2i}; la courbe Γ varie dans le système $|p\Gamma_{11}|$ et tend vers une courbe Γ_{2i} comptée p fois, augmentée de composantes des points de diramation de Φ par lesquels passent les courbes Γ_{2i}. Nous pouvons donc écrire

$$p\,\Gamma_{11} \equiv p\,\Gamma_{2i} + \Delta'_{i1} + \Delta'_{i2} + \ldots + \Delta'_{i\alpha}, \tag{2}$$

Δ'_{ik} étant une combinaison convenable des composantes du k-ième point de diramation (et pouvant d'ailleurs manquer pour certaines valeurs de k).

Supposons que la surface Φ ait le diviseur σ égal à l'unité. Dans cette hypothèse, chacun des systèmes $|C_{21}|$, $|C_{22}|$, ..., $|C_{2p}|$ a comme points-base des points unis de l'involution I_p, car s'il en était autrement pour $|C_{21}|$, par exemple, on aurait

$$|\,p\,\Gamma_{11}\,| = |\,p\,\Gamma_{21}\,|,$$

ce qui est impossible.

Rapportons projectivement les courbes C_2 aux hyperplans d'un espace linéaire S_r, r étant la dimension de $|C_2|$. A la surface F correspond birationnellement une surface F_2, normale, sur laquelle l'involution I_p est engendrée par une homographie cyclique possédant p axes ponctuels $S^{(1)}$, $S^{(2)}$, ..., $S^{(p)}$. Les points unis de l'involution sont les points de rencontre de F avec ces axes. Les hyperplans passant par $p-1$ de ces axes découpent sur F_2 l'un des systèmes $|C_{21}|$, $|C_{22}|$, ..., $|C_{2p}|$ composés au moyen de I_p. Pour fixer les idées, nous supposerons que les hyperplans passant par les axes $S^{(1)}, \ldots, S^{(i-1)}, S^{(i+1)}, \ldots, S^{(p)}$ découpent sur F_2 les courbes C_{2i}.

Si tous les points unis de I_p appartenaient à l'un des axes $S^{(1)}, \ldots, S^{(p)}$, par exemple à $S^{(1)}$, le système $|C_{21}|$ n'aurait pour points-base aucun des points unis de I_p, ce qui est impossible. Les points unis de l'involution se distribuent donc sur deux au moins des espaces $S^{(1)}, \ldots, S^{(p)}$. Supposons, pour fixer les idées, qu'il y ait β points unis de I_p sur $S^{(1)}$ (par exemple les β premiers). La relation (2), pour les courbes Γ_{21}, devient

$$p\,\Gamma_{11} \equiv p\,\Gamma_{21} + \Delta'_{1\,\beta+1} + \Delta'_{1\,\beta+2} + \ldots + \Delta'_{1\alpha}. \tag{3}$$

4. Interprétée projectivement, la relation (3) signifie que parmi les hypersurfaces découpant sur Φ le système $|p\Gamma_{11}|$, il en est qui passent par les α-β derniers points de diramation et qui ont un contact d'ordre $p - 1$ avec la surface le long d'une courbe Γ_{21}, c'est-à-dire en tout point d'intersection. L'existence d'une telle hypersurface implique celle d'une surface Ψ possédant une involution cyclique I'_p, d'ordre p, possédant α-β points unis et représentée par la surface Φ, les points de diramation étant les α-β derniers points de diramation pour la correspondance entre Φ et F.

Sur la surface Ψ existe un système linéaire $|G|$ comprenant au moins deux systèmes linéaires partiels composés au moyen de l'involution I'_p. L'un de ces systèmes, $|G_1|$, correspond au système $|\Gamma_{11}|$; l'autre, $|G_2|$, correspond au système $|\Gamma_{21}|$.

Prenons comme modèle projectif de la surface Ψ une surface dont les sections hyperplanes sont les courbes G. A chacun des β premiers points de diramation de la surface Φ correspondent p points de la surface Ψ où celle-ci présente la même singularité que la surface Φ au point correspondant. Aux α-β derniers points de diramation de la surface Φ (qui sont les points de diramation pour la correspondance entre les surfaces Φ et Ψ) correspondent des points simples de la surface Ψ.

Aux courbes Γ_{1i} correspondent sur Ψ des courbes G_{1i} passant par les $p\beta$ points singuliers de cette surface rencontrés plus haut. Si nous désignons par $\overline{\Delta}_{ik}$ la courbe qui correspond sur Ψ à la courbe Δ_{ik} ($k=1, 2, \ldots, \beta$), la relation (1) donne

$$p\,G \equiv p\,G_{1i} + \overline{\Delta}_{i1} + \overline{\Delta}_{i2} + \ldots + \overline{\Delta}_{i\beta},$$
$$(i = 2, 3, \ldots, p).$$

5. L'existence de l'un des systèmes $|G_{12}|$, $|G_{13}|$, ..., $|G_{1p}|$ satisfaisant à la relation précédente implique celle d'une surface F_0 contenant une involution cyclique J_p d'ordre p, ayant βp points unis, représentée par la surface Ψ. Les points de diramation de cette surface sont les $p\beta$ points singuliers de celle-ci dont il a été question plus haut.

A un point de la surface Φ correspondent p^2 points de la surface F_0, formant p groupes de l'involution J_p.

Entre les surfaces F et Ψ existe une correspondance (p, p), deux points homologues dans cette correspondance correspondant à un point de Φ. D'après sa construction, les points de la surface F_0 représentent les couples de points homologues dans cette correspondance. Il en résulte que la surface F représente une involution d'ordre p, appartenant à la surface F_0. Les p^2 points de F_0 qui correspondent à un point de Φ forment p groupes de cette involution. D'autre part, celle-ci est dépourvue de points unis.

Nous parvenons donc à l'énoncé suivant :

Si une surface algébrique irrégulière contient une involution cyclique d'ordre premier p, *n'ayant qu'un nombre fini de points unis, représentée par une surface régulière de diviseur un, elle est à son tour l'image d'une involution d'ordre* p, *privée de points unis, appartenant à une surface algébrique.*

La surface F_0 est évidemment irrégulière et d'irrégularité supérieure ou égale à q.

Liége, le 11 mai 1939.

M. HAYEZ, Impr. de l'Académie royale, 112, rue de Louvain, Bruxelles
(Domicile légal : rue de la Chancellerie, 4)