EXTRAIT DU *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége.*
Séance du 15 mars 1945. — N° 3.

Sur la construction de surfaces algébriques contenant une involution cyclique,

par LUCIEN GODEAUX, Membre de la Société.

Dans une note antérieure *sur le contact des surfaces le long de courbes* [1], nous avions indiqué brièvement que l'on pouvait, parmi les surfaces étudiées, obtenir des surfaces images d'involutions cycliques, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à des surfaces algébriques. Dans cette nouvelle note, nous revenons sur ce point avec plus de détails. Nous reprenons, en terminant, une surface de genres $p_a = p_g = 20$, $p^{(1)} = 73$, à laquelle nous avions déjà fait allusion dans notre précédente note [2].

1. Soient $\varphi_1(x_1, x_2, x_3, x_4)$, $\varphi_2(x_1, x_2, x_3, x_4)$, $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ trois polynômes entiers, rationnels et homogènes de degrés respectifs mp, np, $m+n$. Considérons la surface F d'équation

$$\varphi_1 \varphi_2 - f^p = 0.$$

Cette surface est d'ordre $(m+n)p$ et possède les propriétés suivantes :

1° Chacune des surfaces $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$ a un contact d'ordre $p-1$ avec F en tout point d'intersection;

2° Les $mn(m+n)p^2$ points communs aux trois surfaces $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $f = 0$, supposés simples pour celles-ci, sont doubles pour la surface F.

Nous commencerons par analyser ces points doubles. Dans ce but, passons aux coordonnées non homogènes et supposons que l'origine O des coordonnées soit un des points doubles en question. Nous pouvons poser

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x, y, z, 1) &\equiv x + \alpha_2(x, y, z) + \alpha_3(x, y, z) + \cdots = 0, \\
\varphi_2(x, y, z, 1) &\equiv y + \beta_2(x, y, z) + \beta_3(x, y, z) + \cdots = 0, \\
f(x, y, z, 1) &\equiv \gamma_1(x, y, z) + \gamma_2(x, y, z) + \cdots = 0,
\end{aligned}$$

les α, β, γ étant des polynômes entiers, rationnels et homogènes en x, y, z, dont le degré est indiqué par l'indice.

---

[1] *Bulletin de la Soc. roy. des Sc. de Liége*, 1944, pp. 46-58.

[2] Nous aurons à utiliser différents résultats obtenus antérieurement; on les trouvera dans notre exposé sur *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Paris, Hermann, 1935).

Si $p=2$, le point O est double conique pour F, le cône tangent étant

$$xy - \gamma_1^2 = 0.$$

Supposons $p>2$ et effectuons la transformation quadratique

$$x = x'z', \quad y = y'z', \quad z = z',$$

qui fait correspondre au domaine de O le plan $z'=0$ et, en particulier, au point infiniment voisin de O sur Oz, le point $O'(x'=y'=z'=0)$.

L'équation de la surface F devient (nous écrivons pour plus de simplicité x, y, z au lieu de x', y', z', aucune confusion n'étant à craindre)

$$\left.\begin{aligned} &[x + z\,\alpha_2(x, y, 1) + z^2\alpha_3(x, y, 1) + \cdots] \\ &[y + z\,\beta_2(x, y, 1) + z^2\beta_3(x, y, 1) + \cdots] \\ &- z^{p-2}[\gamma_1(x, y, 1) + z\,\gamma_2(x, y, 1) + \cdots]^p = 0. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Aux points de F infiniment voisins de O correspondent les deux droites $x=z=0$, $y=z=0$. Le point O est biplanaire pour la surface F, le cône tangent étant $xy=0$.

Si $p=3$, le point O' est simple pour la surface (1), le plan tangent étant $z=0$.

Si $p=4$, le point O' est double conique pour la surface (1), le cône tangent étant

$$[x + z\,\alpha_2(0, 0, 1)][y + z\,\beta_2(0, 0, 1)] - z^2[\gamma_1(0, 0, 1)]^2 = 0.$$

Supposons $p>4$ et effectuons la transformation de coordonnées

$$x' = x + z\,\alpha_2(0, 0, 1), \quad y' = y + z\,\beta_2(0, 0, 1), \quad z' = z.$$

L'équation (1) prend la forme

$$\left.\begin{aligned} &[x + z\,\alpha_1(x, y, z) + \alpha_3(x, y, z) + \cdots] \\ &[y + z\,\beta_1(x, y, z) + \beta_2(x, y, z) + \cdots] \\ &- z^{p-2}[\gamma_0 + \gamma_1(x, y, z) + \cdots]^p = 0, \end{aligned}\right\} \tag{1'}$$

où les α, β, γ ont une signification analogue aux symboles précédemment introduits, mais sont évidemment différents.

Effectuons de nouveau, sur la surface (1'), la transformation

$$x = x'z', \quad y = y'z', \quad z = z'.$$

La surface transformée a pour équation

$$\left.\begin{array}{l}[x+z\,\alpha_1(x,y,1)+z^2\alpha_3(x,y,1)+\cdots]\\ [y+z\,\beta_1(x,y,1)+z^2\beta_3(x,y,1)+\cdots]\\ \quad -z^{p-4}[\gamma_0+z\,\gamma_1(x,y,1)+\cdot\,\cdot]^p=0.\end{array}\right\} \qquad (2)$$

Si $p=5$, le point $O''(x=y=z=0)$ est simple pour la surface (2), le plan tangent étant $z=0$.

Si $p=6$, O'' est double conique pour la surface (2), le cône tangent étant

$$[x+z\,\alpha_1(0,0,1)][y+z\,\beta_1(0,0,1)]-\gamma_0^p z^2=0.$$

Si $p>6$, O'' est double biplanaire pour la surface (2), les plans tangents étant

$$x+z\,\alpha_1(0,0,1)=0, \quad y+z\,\beta_1(0,0,1)=0.$$

En continuant de la même manière, on voit que l'on arrive aux résultats suivants :

Si p est pair, la singularité de la surface F en O se compose d'une suite de $\frac{1}{2}(p-2)$ points doubles biplanaires infiniment voisins successifs, suivis d'un point double conique.

Si p est impair, cette singularité se compose d'une suite de $\frac{1}{2}(p-1)$ points doubles biplanaires dont le dernier est ordinaire.

2. Désignons par Γ les sections planes de la surface F, par Γ_1 la courbe le long de laquelle la surface $\varphi_1=0$ touche F et par Γ_2 la courbe le long de laquelle la surface $\varphi_2=0$ touche F.

Les surfaces d'ordre mp découpent sur F des courbes appartenant au système linéaire $|pm\Gamma|$. Il en résulte que la surface $\varphi_1=0$ touche F suivant une courbe Γ_1 qui, comptée p fois, puisque le contact est d'ordre $p-1$, appartient à ce système. La courbe Γ_1 passe par les $\tau=(m+n)mnp^2$ points doubles de la surface F; chacun de ces points doubles équivaut à un certain ensemble de courbes rationnelles de degré -2. D'une manière précise, si p est pair, un point double équivaut à $p-1$ courbes rationnelles et si p est impair, à $p-1$ courbes rationnelles également. Si nous désignons par Δ l'ensemble de ces courbes rationnelles provenant des τ points doubles, nous avons

$$p\,\Gamma_1+\Delta\equiv pm\,\Gamma.$$

En considérant de même la courbe Γ_2, on a

$$p\,\Gamma_2+\Delta'\equiv pn\,\Gamma.$$

Cela étant, considérons, dans S_4, la surface d'équations

$$u^p = \varphi_1(x,y,z,1), \quad \varphi_1(x,y,z,1)\,\varphi_2(x,y,z,1) - [f(x,y,z,1)]^p = 0. \quad (2)$$

Cette surface contient une involution cyclique de période p engendrée par l'homographie

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad u' = \varepsilon u,$$

où ε est une racine primitive d'ordre p de l'unité.

Cette involution possède τ points unis, donnés par

$$u = \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad f = 0;$$

elle est représentée par la surface F, les points de diramation étant les τ points doubles de cette surface.

On obtient la surface (2) en considérant dans S_4 les équations

$$v^p = \varphi_2(x,y,z,1), \quad \varphi_1(x,y,z,1)\,\varphi_2(x,y,z,1) - [f(x,y,z,1)] = 0,$$

ou encore, dans S_5, les équations

$$u^p = \varphi_1(x,y,z,1), \quad v^p = \varphi_2(x,y,z,1), \quad uv = f(x,y,z,1),$$

l'involution étant engendrée sur cette surface par l'homographie

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad u' = \varepsilon u, \quad v' = \varepsilon^{p-1} v.$$

3. Considérons en particulier le cas $p=3$, $m=n=1$. La surface F est représentée par l'équation

$$\varphi_1(x_0, x_1, x_2, x_3)\,\varphi_2(x_0, x_1, x_2, x_3) - [f(x_0, x_1, x_2, x_3,)]^3 = 0$$

et possède 18 points doubles biplanaires ordinaires. Elle est l'image d'une involution I_3, d'ordre trois, engendrée dans S_5 sur la surface Φ d'équations

$$x_4^3 = \varphi_1, \quad x_5^3 = \varphi_2, \quad x_4 x_5 = f,$$

par l'homographie

$$x'_0 : x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 : x'_5 = x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : \varepsilon x_4 : \varepsilon^2 x_5,$$

où $\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

En conservant les notations précédentes, nous avons cette fois

$$3\Gamma_1 + \Delta \equiv 3\Gamma, \quad 3\Gamma_2 + \Delta' \equiv 3\Gamma.$$

La surface F est du sixième ordre et a par conséquent les genres $p_a = p_g = 10$, $p^{(1)} = 25$.

En utilisant les relations que nous avons établies entre les genres arithmétiques et linéaires de deux surfaces en correspondance $(1, p)$, on trouve que la surface Φ a le genre arithmétique $p_a=20$ et le genre linéaire $p^{(1)}=73$.

Les courbes canoniques de F sont découpées sur cette surface par les quadriques, par conséquent les hyperquadriques de S_5 découpent sur Φ des courbes canoniques de cette surface. Les hyperquadriques de S_5 sont en nombre ∞^{20} et la surface Φ appartient à l'hyperquadrique

$$x_4 x_5 = f(x_0, x_1, x_2, x_3);$$

par conséquent il y a 20 courbes canoniques linéairement indépendantes découpées sur Φ par des hyperquadriques.

Désignons par C les sections hyperplanes de Φ; elles correspondent à la fois aux courbes Γ, Γ_1, Γ_2. Les courbes C sont de genre 28 et de degré 18.

Si $A_1, A_2, \ldots, A_{18}$ sont les 18 points unis de l'involution I_3 sur Φ, on sait qu'en chacun de ces points, il y a deux tangentes unies pour I_3. Soient t_{i_1}, t_{i_2} les tangentes unies au point A_i. La courbe C qui correspond à Γ_1 touche t_{i_1} en A_i et celle qui correspond à Γ_2 touche t_{i_2} en ce même point. Au point infiniment voisin de A_i sur t_{i_1} correspond une courbe rationnelle γ_{i_1}, du degré -2, du domaine du point double A'_i de F qui correspond à A_i. De même, au point infiniment voisin de A_i sur t_{i_2} correspond sur F une courbe rationnelle γ_{i_2}, de degré -2, du domaine de A'_i. Les courbes γ_{i_1}, γ_{i_2} se coupent en un point qui correspond aux groupes de I_3 infiniment voisins de A_i.

La courbe Γ_1 rencontre γ_{i_1} en un point, mais ne rencontre pas γ_{i_2}. La courbe Γ_2 présente la propriété inverse. Il en résulte que les relations fonctionnelles établies plus haut s'écrivent, d'une manière précise, sous la forme

$$3\Gamma_1 + 2\Sigma\gamma_{i1} + \Sigma\gamma_{i2} \equiv 3\Gamma,$$
$$3\Gamma_2 + \Sigma\gamma_{i1} + 2\Sigma\gamma_{i2} \equiv 3\Gamma.$$

On en conclut que les courbes Γ_1, Γ_2 ont le degré -6. Elles ont, d'autre part, le genre 4.

Observons, en passant, que la courbe

$$\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Sigma\gamma_{i1} + \Sigma\gamma_{i2}$$

est une courbe canonique de la surface F.

4. Le système canonique de Φ est le système $|2C|$. Il contient trois systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution I_3. L'un de ces systèmes est dépourvu de points-base et est l'homologue du système canonique de F. Un second de ces systèmes est formé de courbes touchant t_{i_1} en A_i; il correspond à ces courbes sur F des courbes que nous désignerons par $(2\Gamma)_1$, ne rencontrant pas γ_{i2}. On a donc

$$3(2\Gamma)_1 + 2\Sigma\gamma_{i1} + \Sigma\gamma_{i2} \equiv 6\Gamma.$$

On en déduit

$$3(2\Gamma)_1 \equiv 2\Gamma + 3\Gamma_1$$

et, la division étant univoque sur la surface F,

$$(2\Gamma)_1 \equiv \Gamma + \Gamma_1.$$

Les courbes $(2\Gamma)_1$ sont de degré 12 et de genre 19. Les courbes $(2\Gamma)_1$ ne rencontrent pas les courbes Γ_1, par conséquent les courbes $(2\Gamma)_1$ passant par un point de Γ_1 contiennent ces courbes comme partie et sont complétées par les courbes de $|\Gamma|$. On en conclut que le système $|(2\Gamma)_1|$ a la dimension quatre.

Le troisième système compris dans $|2C|$ et appartenant à I_3 donne de même naissance sur F à un système $|(2\Gamma)_2|$ tel que

$$3(2\Gamma)_2 + \Sigma\gamma_{i1} + 2\Sigma\gamma_{i2} \equiv 6\Gamma.$$

Ce système a le degré 12, le genre 19 et la dimension quatre.

L'homographie génératrice de I_3 opère dans $|2C|$ comme une homographie cyclique de période trois, ayant trois axes ponctuels de dimensions 9, 4 et 4, par suite, $|2C|$ a la dimension 19. On en conclut que Φ a le genre géométrique $p_g = 20$ et est par conséquent régulière.

5. Les courbes de $|2C|$ donnant sur F les courbes $(2\Gamma)_1$ sont découpées sur Φ par les hyperquadriques

$$\lambda x_5^2 + x_4(\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3) \equiv \lambda x_5^2 + x_4 L(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Les courbes $(2\Gamma)_1$ sont par conséquent découpées sur F par les surfaces du sixième ordre

$$\lambda^3 \varphi_2^2 + 3\lambda^2 \varphi_2 f L + 3\lambda f^2 L^2 + \varphi_1 L^3 = 0.$$

Chacune de ces surfaces oscule F le long de la courbe d'intersection.

De même, les surfaces du sixième ordre

$$\lambda^3 \varphi_1^2 + 3\lambda^2 \varphi_1 f L + 3\lambda f^2 L^2 + \varphi_2 L^3 = 0$$

osculent la surface F le long d'une courbe $(2\Gamma)_2$.

On peut voir aisément, en reprenant la méthode que nous avons suivie dans notre note citée au début, que chacune de ces surfaces possède 18 points doubles biplanaires sur la courbe de contact avec F.

M. HAYEZ, Imprimeur de l'Académie royale de Belgique, rue de Louvain, 112, Bruxelles.
(Domicile légal: rue de la Chancellerie, 4)