EXTRAIT DU *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liège.*
Séance du 19 octobre 1939, n^os 8-9-10.

Construction de surfaces projectivement canoniques,

par LUCIEN GODEAUX, Membre de la Société.

(Seconde note.)

Dans une note parue sous le même titre dans le dernier fascicule du *Bulletin* [1], nous avons indiqué la construction de quelques surfaces projectivement canoniques; nous nous proposons de revenir sur ce sujet pour préciser certains résultats.

1. La première surface construite est obtenue de la manière suivante : Soit dans un espace linéaire S_6 à six dimensions, un cône Φ_1 de sommet O dont les sections hyperplanes irréductibles sont des surfaces de Veronese. Ce cône contient ∞^2 cônes du second ordre D, formant un réseau $|D|$; soit D_1 un cône déterminé de ce réseau. Une hypersurface V^4_5 du quatrième ordre contenant le cône D_1 coupe encore Φ_1 suivant une surface F d'ordre quatorze, projectivement canonique. Les sections hyperplanes C (courbes canoniques) sont de genre $p^{(1)}=15$ et les genres géométrique et arithmétique de la surface sont $p_g = p_a = 7$.

Les cônes D coupent l'hypersurface V^4_5 suivant des courbes du huitième ordre formées d'une droite appartenant au cône D_1 et d'une courbe C_0 d'ordre sept, appartenant à la surface F. Les courbes C_0 passent simplement par le point O; elles sont de genre six et forment un réseau $|C_0|$ de degré trois.

La section de Φ_1 par V^4_5 possède un point quadruple en O, la variété V^4_5 passant simplement par ce point. Le cône D_1 ayant un point double en O, ce point est également double pour la surface F. Au point de vue des transformations birationnelles, il équivaut sur cette surface à une courbe rationnelle γ de degré -2.

Observons que les espaces linéaires à trois dimensions contenant deux courbes C_0 ont en commun une droite et par conséquent appartiennent à un même hyperplan (passant par le point O). On en conclut que l'on a

$$|C| = |2C_0 + \gamma|.$$

On en déduit que l'adjoint de $|C_0|$ est

$$|C_0'| = |3C_0 + \gamma|.$$

[1] 1939, pp. 348-350.

2. Les équations du cône Φ_1 peuvent s'écrire

$$\left.\begin{array}{lll} X_{22}X_{33}-X_{23}^2=0, & X_{33}X_{11}-X_{31}^2=0, & X_{11}X_{22}-X_{12}^2=0, \\ X_{11}X_{23}-X_{31}X_{12}=0, & X_{22}X_{31}-X_{12}X_{23}=0, & X_{33}X_{12}-X_{23}X_{31}=0. \end{array}\right\} \quad (1)$$

Supposons que le cône D_1 ait pour équations

$$X_{11}=X_{12}=X_{31}=0, \qquad X_{22}X_{33}-X_{23}^2=0.$$

Les équations de la surface F peuvent s'écrire en adjoignant aux équations (1),

$$X_0^3\alpha_1+X_0^2\alpha_2+X_0\alpha_3+\alpha_4=0,$$

où α_1, α_2, α_3, α_4 sont des formes en X_{11}, ..., X_{12}, dont le degré est indiqué par l'indice, chaque terme contenant l'un des facteurs X_{11}, X_{12}, X_{13}.

On peut obtenir une transformée birationnelle de la surface F dans un espace ordinaire S_3 en rapportant projectivement les hyperplans de S_6 aux quadriques de cet espace S_3 touchant un plan fixe ($x_3=0$) en un point fixe ($x_1=x_2=x_3=0$).

Posons

$$\frac{X_{11}}{x_1^2}=\frac{X_{22}}{x_2^2}=\frac{X_{33}}{x_3^2}=\frac{X_{23}}{x_2x_3}=\frac{X_{31}}{x_3x_1}=\frac{X_{12}}{x_1x_2}=\frac{X_0}{x_0x_3}.$$

A la surface F correspond la surface d'équation

$$x_0^3x_3^3\alpha_1+x_0^2x_3^2\alpha_2+x_0x_3\alpha_3+\alpha_4=0,$$

où α_1, α_2, α_3, α_4 sont des formes en x_1, x_2, x_3 respectivement de degrés un, trois, cinq et sept. Cette surface, du septième ordre, possède un point quadruple en (1, 0, 0, 0), le cône tangent se composant de deux plans dont l'un, le plan $x_3=0$, est compté trois fois.

Les courbes canoniques de cette surface sont découpées par les adjointes d'ordre trois, formées du plan $x_3=0$ et des quadriques touchant ce plan au point (1, 0, 0, 0).

3. La seconde surface obtenue dans notre première note est l'intersection du cône Φ_1 d'ordre n^2, appartenant à un espace linéaire à $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ dimensions, dont les sections hyperplanes irréductibles sont des surfaces représentant les courbes d'ordre n d'un plan, avec une hypersurface cubique passant par un cône de même sommet O de Φ_1, d'ordre $n(n-3)$. Ce cône appartient à un espace linéaire à $\frac{1}{2}(n^2+3n-20)$ dimensions et par conséquent, on doit avoir $n(n-3)\leqslant 3$, d'où $n=3$.

On obtient donc finalement une surface F appartenant à un espace linéaire S_{10} à dix dimensions, dont les équations s'obtiennent de la manière suivante :

Les équations du cône Φ_1 sont les déterminants à quatre éléments tirés de la matrice

$$\left\| \begin{matrix} X_{111} & X_{221} & X_{331} & X_{123} & X_{113} & X_{112} \\ X_{112} & X_{222} & X_{332} & X_{223} & X_{123} & X_{221} \\ X_{113} & X_{223} & X_{333} & X_{332} & X_{331} & X_{123} \end{matrix} \right\|,$$

égalés à zéro. Ce cône est d'ordre neuf. La surface F est l'intersection de ce cône et de l'hypersurface cubique générale

$$F(X_0, X_{111}, \cdots, X_{123}) = 0.$$

La surface F est d'ordre 27 et ses sections hyperplanes C (courbes canoniques) sont de genre 28.

Le cône Φ_1 contient ∞^2 cônes du troisième ordre, formant un réseau, découpant sur F des courbes C_0 d'ordre neuf et de genre sept. Le réseau $|C_0|$ est de degré trois et l'on a

$$|C| = |3C_0|.$$

On en déduit que l'adjoint de $|C_0|$ est

$$|C_0'| = |4C_0|.$$

4. On peut obtenir une transformée birationnelle de la surface F dans un espace S_3 en rapportant projectivement les hyperplans de S_{10} aux surfaces cubiques de S_3 ayant en un point double fixe un cône tangent fixe.

Posons

$$\frac{X_{ijk}}{x_i x_j x_k} = \frac{X_0}{x_0 \varphi(x_1, x_2, x_3)} \qquad (i, j, k = 1, 2, 3),$$

φ étant une forme du second degré.

A la surface F correspond la surface d'équation

$$x_0^3 \varphi^3 + x_0^2 \varphi^2 \alpha_3(x_1, x_2, x_3) + x_0 \varphi \alpha_6(x_1, x_2, x_3) + \alpha_9(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

où les α sont des formes dont le degré est indiqué par l'indice.

Cette surface est d'ordre neuf et possède un point sextuple (1, 0, 0, 0) en lequel le cône tangent est un cône du second ordre $\varphi = 0$ compté trois fois. Les adjointes du cinquième ordre de cette surface sont formées du cône $\varphi = 0$ et des surfaces cubiques ayant un point double au point (1, 0, 0, 0), le cône tangent étant $\varphi = 0$.

Liége, le 29 juillet 1939.

M. HAYEZ, Impr. de l'Académie royale, 112, rue de Louvain, Bruxelles
(Domicile légal : rue de la Chancellerie, 4)