COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE

Sur une configuration géométrique dans l'espace à quatre dimensions

par Lucien Godeaux, membre de l'Académie.

Dans une note récente, nous avons étudié un groupe d'homographies planes [1] contenant entre autres quatre homographies de période trois, ayant chacune trois points unis et trois droites unies. Les quatre triangles formés par ces droites appartiennent à un faisceau sizigétique de cubiques planes et les douze sommets de ces triangles se répartissent donc quatre par quatre sur neuf droites. Cette étude peut être étendue aux hyperespaces; nous le faisons dans cette note en nous limitant, pour plus de simplicité, à l'espace à quatre dimensions.

Nous partons d'un groupe formé de six homographies de période cinq, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, engendrant une involution d'ordre vingt-cinq dans un espace linéaire à quatre dimensions. Nous considérons les cinq points unis et les cinq hyperplans unis de chacune de

(1) *Sur un groupe d'homographies planes* (*Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége*, 1941, pp. 23-32).

ces homographies et nous obtenons ainsi six pentaèdres formant la configuration suivante :

Les six pentaèdres sont tels qu'il existe vingt-cinq droites par chacune desquelles passe une face de chacun des six pentaèdres. Chaque face de l'un de ceux-ci contient cinq des vingt-cinq droites.

Les sommets des six pentaèdres se distribuent six par six dans vingt-cinq plans, chacun de ces plans contenant un sommet de chacun des pentaèdres; chaque sommet d'un pentaèdre appartient à cinq des vingt-cinq plans.

1. Considérons, dans un espace linéaire S_4 à quatre dimensions, les homographies

$$\Omega = \begin{pmatrix} x_1 & \varepsilon x_2 & \varepsilon^2 x_3 & \varepsilon^3 x_4 & \varepsilon^4 x_5 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix},$$

où ε est une racine primitive cinquième de l'unité, et

$$\Omega_0 = \begin{pmatrix} x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix}.$$

Ces homographies sont permutables et engendrent, dans S_4, une involution I_{25} d'ordre vingt-cinq. L'homographie Ω possède cinq points unis qui sont les sommets A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 de la figure de référence. L'homographie Ω_0 possède également cinq points unis : le point unitaire A_{01} et ses transformés A_{02}, A_{03}, A_{04}, A_{05} par Ω, Ω^2, Ω^3, Ω^4.

Considérons en outre les homographies

$$\Omega_1 = \Omega\Omega_0, \quad \Omega_2 = \Omega^2\Omega_0, \quad \Omega_3 = \Omega^3\Omega_0, \quad \Omega_4 = \Omega^4\Omega_0.$$

Ce sont également des homographies de période cinq, ayant chacune cinq points unis et transformant en soi chacun des groupes de I_{25}. On voit d'autre part que ces homographies sont deux à deux permutables et permutables avec Ω et Ω_0.

On a

$$\Omega_1 = \begin{pmatrix} x_2 & \varepsilon x_3 & \varepsilon^2 x_4 & \varepsilon^3 x_5 & \varepsilon^4 x_1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix},$$

$$\Omega_2 = \begin{pmatrix} x_2 & \varepsilon^2 x_3 & \varepsilon^4 x_4 & \varepsilon x_5 & \varepsilon^3 x_1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix},$$

$$\Omega_3 = \begin{pmatrix} x_2 & \varepsilon^3 x_3 & \varepsilon x_4 & \varepsilon^4 x_5 & \varepsilon^2 x_1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix},$$

$$\Omega_4 = \begin{pmatrix} x_2 & \varepsilon^4 x_3 & \varepsilon^3 x_4 & \varepsilon^2 x_5 & \varepsilon x_1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix},$$

Nous désignerons par A_{k1}, A_{k2}, ..., A_{k5} les points unis de Ω_k. Nous avons

A_1	$(1, 0, 0, 0, 0)$,	A_{01}	$(1, 1, 1, 1, 1)$,
A_2	$(0, 1, 0, 0, 0)$,	A_{02}	$(1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4)$,
A_3	$(0, 0, 1, 0, 0)$,	A_{03}	$(1, \varepsilon^2, \varepsilon^4, \varepsilon, \varepsilon^3)$,
A_4	$(0, 0, 0, 1, 0)$,	A_{04}	$(1, \varepsilon^3, \varepsilon, \varepsilon^4, \varepsilon^2)$,
A_5	$(0, 0, 0, 0, 1)$,	A_{05}	$(1, \varepsilon^4, \varepsilon^3, \varepsilon^2, \varepsilon)$,
A_{11}	$(1, \varepsilon^4, \varepsilon^2, \varepsilon^4, 1)$,	A_{21}	$(1, \varepsilon^3, \varepsilon^4, \varepsilon^3, 1)$,
A_{12}	$(\varepsilon^4, \varepsilon^4, \varepsilon^3, \varepsilon, \varepsilon^3)$,	A_{22}	$(\varepsilon^3, \varepsilon^2, \varepsilon^4, \varepsilon^4, \varepsilon^2)$,
A_{13}	$(\varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^3, \varepsilon^2, 1)$,	A_{23}	$(\varepsilon^4, \varepsilon^4, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^2)$,
A_{14}	$(\varepsilon^4, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^2, \varepsilon)$,	A_{24}	$(\varepsilon^3, \varepsilon^4, \varepsilon^3, 1, 1)$,
A_{15}	$(1, \varepsilon^3, 1, \varepsilon, \varepsilon)$,	A_{25}	$(1, \varepsilon^2, \varepsilon^2, 1, \varepsilon)$,
A_{31}	$(1, \varepsilon^2, \varepsilon, \varepsilon^2, 1)$,	A_{41}	$(1, \varepsilon, \varepsilon^3, \varepsilon, 1)$,
A_{32}	$(\varepsilon^2, 1, 1, \varepsilon^2, \varepsilon)$,	A_{42}	$(\varepsilon, \varepsilon^3, \varepsilon, 1, 1)$,
A_{33}	$(\varepsilon, 1, \varepsilon, \varepsilon^4, \varepsilon^4)$,	A_{43}	$(\varepsilon^3, \varepsilon, 1, 1, \varepsilon)$,
A_{34}	$(\varepsilon^2, \varepsilon^2, \varepsilon^4, \varepsilon^3, \varepsilon^4)$,	A_{44}	$(\varepsilon, 1, 1, \varepsilon, \varepsilon^3)$,
A_{35}	$(1, \varepsilon, \varepsilon^4, \varepsilon^4, \varepsilon)$,	A_{45}	$(1, 1, \varepsilon, \varepsilon^3, \varepsilon)$.

2. Chacune des homographies Ω, Ω_0, Ω_1, ... Ω_4 possède cinq hyperplans unis, formant un pentaèdre. Fixons l'attention sur l'homographie Ω_1, par exemple, et formons l'équation

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_2 & \varepsilon x_3 & \varepsilon^2 x_4 & \varepsilon^3 x_5 & \varepsilon^4 x_1 \\ \varepsilon x_3 & \varepsilon^3 x_4 & x_5 & \varepsilon^2 x_1 & \varepsilon^4 x_2 \\ \varepsilon^3 x_4 & \varepsilon x_5 & \varepsilon^4 x_1 & \varepsilon^2 x_2 & x_3 \\ \varepsilon x_5 & x_1 & \varepsilon^4 x_2 & \varepsilon^3 x_3 & x\varepsilon^2{}_4 \end{vmatrix} = 0 \qquad (1)$$

Le déterminant du premier membre s'obtient en prenant pour éléments des lignes les coordonnées d'un point et de ses transformés successifs par Ω_1 et ses puissances.

Si l'on remplace, dans deux lignes quelconques du déterminant de l'équation (1), x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 par les coordonnées d'un point uni de Ω_1, les éléments de ces lignes sont proportionnels et le déterminant est nul. Il en résulte que les dérivées troisièmes du déterminant sont nulles aux points unis de Ω_1. L'équation (1) représente donc une hypersurface du cinquième ordre ayant des points quadruples aux points unis de Ω_1 et par suite formée des cinq hyperplans unis de cette homographie. Nous dirons pour abréger que l'hypersurface (1) est le pentaèdre uni de l'homographie Ω_1.

Posons

$$\begin{aligned}
\varphi_0 &= x_1x_2x_3x_4x_5,\\
\varphi_1 &= x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + x_5^5,\\
\varphi_2 &= x_1^3x_2x_5 + x_2^3x_3x_1 + x_3^3x_4x_2 + x_4^3x_5x_3 + x_5^3x_1x_4,\\
\varphi_3 &= x_1^3x_3x_4 + x_2^3x_4x_5 + x_3^3x_5x_1 + x_4^3x_1x_2 + x_5^3x_2x_3,\\
\varphi_4 &= x_1x_2^2x_5^2 + x_2x_3^2x_1^2 + x_3x_4^2x_2^2 + x_4x_5^2x_3^2 + x_5x_1^2x_4^2,\\
\varphi_5 &= x_1x_3^2x_4^2 + x_2x_4^2x_5^2 + x_3x_5^2x_1^2 + x_4x_1^2x_2^2 + x_5x_2^2x_3^2.
\end{aligned}$$

L'équation (1) développée, s'écrit

$$5\varphi_0 - \varphi_1 + 5\varepsilon\varphi_2 + 5\varepsilon^4\varphi_3 - 5\varepsilon^2\varphi_4 - 5\varepsilon^3\varphi_5 = 0.$$

On en déduit que les pentaèdres unis des homographies Ω, Ω_0, Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_4 ont respectivement pour équations

$$\varphi_0 = 0\,.$$

$$\begin{aligned}
5\varphi_0 - \varphi_1 + 5\varphi_2 + 5\varphi_3 - 5\varphi_4 - 5\varphi_5 &= 0\\
5\varphi_0 - \varphi_1 + 5\varepsilon\varphi_2 + 5\varepsilon^4\varphi_3 - 5\varepsilon^2\varphi_4 - 5\,\varepsilon^3\varphi_5 &= 0,\\
5\varphi_0 - \varphi_1 + 5\varepsilon^2\varphi_2 + 5\varepsilon^3\varphi_3 - 5\varepsilon^4\varphi_4 - 5\varepsilon\varphi_5 &= 0,\\
5\varphi_0 - \varphi_1 + 5\varepsilon^3\varphi_2 + 5\varepsilon^2\varphi_3 - 5\varepsilon\varphi_4 - 5\varepsilon^4\varphi_5 &= 0,\\
5\varphi_0 - \varphi_1 + 5\varepsilon^4\varphi_2 + 5\varepsilon\varphi_3 - 5\varepsilon^3\varphi_4 - 5\varepsilon^2\varphi_5 &= 0.
\end{aligned}$$

Ces six hypersurfaces sont linéairement indépendantes et appartiennent au système complet $|V_3^5|$ d'équation

$$\lambda_0\varphi_0 + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \lambda_3\varphi_3 + \lambda_4\varphi_4 + \lambda_5\varphi_5 = 0.$$

3. Nous allons rechercher la base du système $|V_3^5|$. Celle-ci est évidemment située dans les hyperplans formant le pentaèdre uni de l'homographie Ω.

Les points-base de $|V_3^5|$ situés dans l'hyperplan $x_1=0$ satisfont aux équations

$$x_1=0,\quad x_2^5+x_3^5+x_4^5+x_5^5=0,\quad x_3x_4(x_3^2x_2+x_4^2x_5)=0,$$
$$x_2x_5(x_2^2x_4+x_5^2x_3)=0,\quad x_3x_4(x_2^2x_4+x_5^2x_3)=0,$$
$$x_2x_5(x_3^2x_2+x_4^2x_5)=0.$$

Les surfaces cubiques réglées

$$x_3^2x_2+x_4^2x_5=0,\quad x_2^2x_4+x_5^2x_3=0,$$

ont en commun cinq génératrices dont les équations sont

$$x_2+x_5=0,\quad x_3+x_4=0;\quad x_2+\varepsilon x_5=0,\quad x_3+\varepsilon^2x_4=0;$$
$$x_2+\varepsilon^2x_5=0,\quad x_3+\varepsilon^4x_4=0;\quad x_2+\varepsilon^3x_5=0,\quad x_3+\varepsilon x_4=0;$$
$$x_2+\varepsilon^4x_5=0,\quad x_3+\varepsilon^3x_4=0.$$

Ces droites appartiennent à la surface

$$x_2^5+x_3^5+x_4^5+x_5^5=0,$$

mais cette dernière ne passe pas par les directrices $x_2=x_5=0$, $x_3=x_4=0$ des réglées cubiques.

Il en résulte que, dans l'hyperplan $x_1=0$, les variétés V_3^5 ont en commun cinq droites. On voit d'autre part qu'elles ont en outre en commun vingt points isolés, que l'on retrouvera plus loin.

On établit de même que la base du système $|V_3^5|$ comprend, dans l'hyperplan $x_2=0$, les cinq génératrices communes aux réglées cubiques

$$x_4^2x_3+x_5^2x_1=0,\quad x_1^2x_4+x_3^2x_5=0;$$

dans l'hyperplan $x_3=0$, les cinq génératrices communes aux surfaces cubiques

$$x_1^2x_2+x_5^2x_4=0,\quad x_2^2x_5+x_4^2x_1=0;$$

dans l'hyperplan $x_4=0$, les cinq génératrices communes aux surfaces cubiques

$$x_1^2x_5+x_2^2x_3=0,\quad x_3^2x_1+x_5^2x_2=0;$$

enfin dans l'hyperplan $x_5=0$, les cinq génératrices communes aux réglées cubiques

$$x_2^2x_1 + x_3^2x_4 = 0, \quad x_1^2x_3 + x_4^2x_2 = 0.$$

La base du système $|V_3^5|$ se compose donc de vingt-cinq droites. Ces droites appartiennent à chacun des pentaèdres unis des homographies Ω, Ω_0, ..., Ω_4. Il en résulte que :

1° Chacune des vingt-cinq droites appartient à un hyperplan uni de chacune des six homographies Ω, Ω_0, Ω_1, ..., Ω_4 ;

2° Chacun des hyperplans unis d'une des homographies Ω, Ω_0, ..., Ω_4 contient cinq des droites-base de $|V_3^5|$.

4. Corrélativement, les trente points unis des homographies Ω, Ω_0, Ω_1, ..., Ω_4 se distribuent six par six dans vingt-cinq plans, chacun de ces plans contenant un et un seul point uni de chacune des six homographies.

La répartition des points unis des homographies dans les vingt-cinq plans se fait de la manière suivante :

$A_1,\ A_{01};\ A_{14};\ A_{22},\ A_{35},\ A_{43};$
$A_1,\ A_{03},\ A_{11},\ A_{24},\ A_{32},\ A_{45};$
$A_1,\ A_{05},\ A_{13},\ A_{21},\ A_{34},\ A_{42};$
$A_1,\ A_{02},\ A_{15},\ A_{23},\ A_{31},\ A_{44};$
$A_1,\ A_{04},\ A_{12},\ A_{25},\ A_{33},\ A_{41};$

$A_2,\ A_{01},\ A_{15},\ A_{24},\ A_{33},\ A_{42};$
$A_2,\ A_{02},\ A_{11},\ A_{25},\ A_{34},\ A_{43};$
$A_2,\ A_{03},\ A_{12},\ A_{21},\ A_{35},\ A_{44};$
$A_2,\ A_{04},\ A_{13},\ A_{22},\ A_{31},\ A_{45};$
$A_2,\ A_{05},\ A_{14},\ A_{23},\ A_{32},\ A_{41},$

$A_3,\ A_{01},\ A_{11},\ A_{21},\ A_{31},\ A_{41};$
$A_3,\ A_{05},\ A_{15},\ A_{25},\ A_{35},\ A_{45};$
$A_3,\ A_{04},\ A_{14},\ A_{24},\ A_{34},\ A_{44};$
$A_3,\ A_{03},\ A_{13},\ A_{23},\ A_{33},\ A_{43};$
$A_3,\ A_{02},\ A_{12},\ A_{22},\ A_{32},\ A_{42};$

$A_4,\ A_{01},\ A_{12},\ A_{23},\ A_{34},\ A_{45};$
$A_4,\ A_{02},\ A_{13},\ A_{24},\ A_{35},\ A_{41};$
$A_4,\ A_{03},\ A_{14},\ A_{25},\ A_{31},\ A_{42};$
$A_4,\ A_{04},\ A_{15},\ A_{21},\ A_{32},\ A_{43};$
$A_4,\ A_{05},\ A_{11},\ A_{22},\ A_{33},\ A_{44};$

$A_5,\ A_{01},\ A_{13},\ A_{25},\ A_{32},\ A_{44};$
$A_5,\ A_{02},\ A_{14},\ A_{21},\ A_{33},\ A_{45};$
$A_5,\ A_{03},\ A_{15},\ A_{22},\ A_{34},\ A_{41};$
$A_5,\ A_{04},\ A_{11},\ A_{23},\ A_{35},\ A_{42};$
$A_5,\ A_{05},\ A_{12},\ A_{24},\ A_{31},\ A_{43}.$

Liége, le 2 avril 1941.