Extrait du *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége.*
Séance du 23 mai 1941. — N° 5.

Remarque sur l'étude des points unis des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique,

par Lucien GODEAUX, Membre de la Société.

Une involution cyclique n'ayant qu'un nombre fini de points unis appartenant à une surface algébrique étant donnée, on peut construire sur cette surface un système linéaire comprenant p systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution, p étant l'ordre de cette dernière. Les courbes de ces p systèmes ont, en un point uni de l'involution, des comportements déterminés. Tout multiple du système linéaire envisagé contient également p systèmes linéaires appartenant à l'involution et les courbes de ces p systèmes ont, au point uni considéré, les mêmes comportements que les courbes des p systèmes primitifs. Considérons un système linéaire $|C|$ contenant p systèmes linéaires appartenant à l'involution donnée et le système linéaire $|2C|$. Un système linéaire compris dans $|2C|$ et appartenant à l'involution comprend $\frac{1}{2}(p+1)$ systèmes de courbes formées au moyen de courbes tirées des systèmes de $|C|$ appartenant à l'involution. Cette remarque permet d'obtenir des indications sur le comportement en un point uni des courbes des systèmes contenus dans $|C|$ et appartenant à l'involution. C'est ce que nous montrons dans cette courte note [1].

1. Soit F une surface algébrique contenant une involution cyclique I_p, d'ordre premier p, n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Nous pouvons prendre, comme modèle projectif de la surface F, une surface normale d'ordre pn, appartenant à un espace linéaire S_r dont le nombre de dimensions est aussi grand qu'on le veut, sur laquelle l'involution I_p est déterminée par une

---

(1) Nous supposons connus certains résultats que nous avons obtenus antérieurement sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique; voir en particulier notre exposé sur Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (*Actualités scientif. et industr.*, Paris, Hermann, 1935); Recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1930, pp. 450-467; 1931, pp. 1131-1150); Sur la structure des points unis des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (*Mém. Acad. roy. de Belgique*, sér. in-8°, 1938).

homographie cyclique H, possédant p axes ponctuels dont un seul rencontre la surface (aux points unis de l'involution I_p).

Désignons par $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p$ les axes ponctuels de l'homographie H, par $r_1, r_2, \ldots, r_p$ leurs dimensions respectives, et supposons que ce soit l'espace σ_p qui rencontre la surface F aux points unis de l'involution I_p. Soit Σ_i le système linéaire d'hyperplans, de dimension r_i, ayant pour base les espaces $\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_p (i = 1, 2, \ldots, p)$.

Les hyperplans du système Σ_i découpent sur F des courbes C_i formant un système linéaire incomplet $|C_i|$, appartenant à l'involution I_p. Le système $|C_p|$ est dépourvu de points-base, mais les systèmes $|C_1|, |C_2|, \ldots, |C_{p-1}|$ ont pour points-base les points unis de l'involution.

2. Considérons un point uni A de l'involution; nous pouvons supposer que c'est un point simple de la surface F et que le plan tangent α à cette surface en ce point ne rencontre l'espace σ_p qu'au seul point A.

Le plan α est uni pour l'homographie H et s'appuie par conséquent soit suivant une droite sur l'un des axes $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{p-1}$, soit suivant deux points situés sur deux de ces axes. Dans le premier cas, le point A est uni parfait pour l'involution I_p; nous laisserons ce cas de côté, nous l'avons étudié ailleurs [1]. Dans le second cas, le point A est uni non parfait pour l'involution I_p. Pour fixer les idées, nous supposerons que le plan α s'appuie en un point sur l'espace σ_1 et un point sur l'espace $\sigma_i (1 < i < p)$.

Les hyperplans de Σ_1 ne contiennent pas en général le plan α et par conséquent les courbes C_1 ont en général un point simple en A; elles touchent en ce point la droite joignant A au point d'appui du plan α sur l'espace σ_i.

De même, les courbes C_i ont en général un point simple en A et y touchent la droite joignant A au point d'appui du plan α sur l'axe σ_1.

Les courbes $C_2, C_3, \ldots, C_{i-1}, C_{i+1}, \ldots, C_{p-1}$ ont en A une multiplicité au moins égale à deux.

3. On peut prendre comme figure de référence dans l'espace S_r une pyramide dont tous les sommets appartiennent aux axes $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p$ de l'homographie H. Si nous désignons par x_i l'ensemble

---

(1) Sur les points unis parfaits des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (*Bull. de la Soc. roy. des Sc. de Liège*, 1937, pp. 37-40).

des coordonnées d'un point de S_r appartenant à l'espace σ_i, qui ne sont pas nécessairement nulles, l'homographie H pourra être représentée analytiquement par

$$\rho x'_1 = \varepsilon x_1,\ \rho x'_2 = \varepsilon^2 x_2, \ldots, \rho x'_i = \varepsilon^i x_i, \ldots, \rho x'_{p-1} = \varepsilon^{p-1} x_{p-1},\ \rho x'_p = x_p .$$

Désignons par $|C|$ le système des sections hyperplanes de F, système qui contient comme courbes totales $C_1, C_2, \ldots, C_p$, et considérons le système $|2C|$. Ce système contient p systèmes linéaires partiels rppartenant à l'involution I_p. D'autre part, si l'on combine deux-à-deux par addition les p systèmes $|C_1|, |C_2|, \ldots, |C_p|$, on obtient $\binom{p+1}{2}$ systèmes linéaires appartenant à l'involution I_p et qui doivent coïncider avec les p systèmes dont il vient d'être question.

Représentons par $|D|$ le système $|2C|$ et par $|D_1|, |D_2|, \ldots, |D_p|$ les systèmes appartenant à l'involution I_p qu'il contient.

Le système $|D_1|$ contiendra les courbes

$$C_1 + C_p,\ C_2 + C_{p-1}, \ldots, C_\nu + C_{\nu+2},\ 2C_{\nu+1},$$

où l'on a posé $p = 2\nu + 1$. Ces courbes auront en A en général le même comportement que les courbes C_1.

Le système $|D_2|$ contiendra les courbes

$$2C_1,\ C_2 + C_p,\ C_3 + C_{p-1}, \ldots, C_\nu + C_{\nu+3},\ C_{\nu+1} + C_{\nu+2}.$$

Les courbes D_2 se comportent en général en A comme les courbes C_2.

Le système $|D_3|$ contiendra les courbes

$$C_1 + C_2,\ C_3 + C_p,\ C_2 + C_{p-1}, \ldots, C_\nu + C_{\nu+4},\ C_{\nu+1} + C_{\nu+3},\ 2C_{\nu+2}.$$

Les courbes D_3 auront en général en A le même comportement que les courbes C_3.

Plus généralement, le système $|D_{2j}|$ contiendra les courbes

$$2C_j,\ C_1 + C_{2j-1}, \ldots, C_{2j} + C_p$$

et les courbes D_{2j} auront en A en général le même comportement que les courbes C_{2j}.

Le système $|D_{2j+1}|$ contiendra les courbes

$$C_1 + C_{2j},\ C_{2j+1} + C_p, \ldots, 2C_{\nu+j+1},$$

et ces courbes se comporteront en général en A comme les courbes C_{2j+1}.

En particulier, le système $|D_p|$ contiendra les courbes

$$C_1 + C_{p-1},\ C_2 + C_{p-2}, \ldots, C_\nu + C_{\nu+1},\ 2C_p.$$

4. Les courbes C_p ne passent pas en général par le point A. Celles de ces courbes qui passent par ce point y acquièrent une certaine multiplicité τ_1 et leurs tangentes en ce point sont confondues avec les droites t_1, t_i du plan α s'appuyant respectivement sur σ_1, σ_i. Nous désignerons ces courbes par C'_p.

Les courbes C'_p, assujetties à toucher en A une droite du plan α distincte de t_1, t_i, acquièrent en A une multiplicité $\tau_2 > \tau_1$. Appelons C''_p ces courbes. Si $p = 3$, nous avons montré que l'on a $\tau_1 = 2$, $\tau_2 = 3$ et que les courbes C''_p ont en A un point triple à tangentes variables. Si $p > 3$, ce que nous supposerons dans la suite, les tangentes aux courbes C''_p en A sont confondues aux t_1, t_i.

Appelons ensuite C'''_p les courbes C''_p assujetties à toucher en A une droite distincte de t_1, t_i, et ainsi de suite. Nous formons ainsi une suite de systèmes linéaires $|C'_p|, |C''_p|, \ldots, |C^{(h)}_p|$ dont les dimensions vont en décroissant et dont les courbes ont en A des multiplicités d'ordres $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_h$ croissants. Les tangentes en A aux courbes $C'_p, C''_p, \ldots, C^{(h-1)}_p$ sont confondues avec les droites t_1, t_i, mais les courbes $C^{(h)}_p$ ont en A un point multiple d'ordre $\tau_h = p$, à tangentes variables.

Les courbes du système $|D_p|$, qui comprend les courbes $2C_p$, ne passent pas en général par le point A. Désignons par $|D'_p|, |D''_p|, \ldots, |D^{(h)}_p|$ les systèmes linéaires obtenus en partant de $|D_p|$ comme les systèmes linéaires $|C'_p|, |C''_p|, \ldots, |C^{(h)}_p|$ ont été obtenus en partant de $|C_p|$. Les courbes $D^{(l)}_p$ se comportent en A comme les courbes $C^{(l)}_p$, car le système $|D^{(l)}_p|$ peut évidemment être défini par la condition de contenir les courbes $C_p + C^{(l)}_p$.

Cela étant, les courbes

$$C_1 + C_{p-1},\ C_2 + C_{p-2}, \ldots, C_\nu + C_{\nu+1},$$

qui appartiennent à $|D_p|$ et qui passent par A, doivent appartenir aux systèmes $|D'_p|, |D''_p|, \ldots,$ ou $|D^{(l)}_p|$.

5. Reprenons les courbes D_2. Ces courbes se comportent en A comme les courbes C_2; par conséquent la multiplicité des courbes C_2 en A sera égale à la multiplicité minimum en ce point des courbes

$$2C_1,\ C_2 + C_p,\ C_3 + C_{p-1}, \ldots, C_{\nu+1} + C_{\nu+2}.$$

Les courbes $C_2, C_3, \ldots, C_{i-1}, C_{i+1}, \ldots, C_{p-1}$ ont en A une multiplicité au moins égale à deux. D'autre part, le système $|D_2|$ contient la courbe $C_i + C_{p-i+2}$.

Supposons en premier lieu $i = 2$; les courbes C_2 ont en A un point simple et y touchent la droite t_1. Supposons ensuite $i > 2$. Les courbes $C_i + C_{p-i+2}$ ont en A une multiplicité au moins égale à trois; il en résulte que les courbes C_2 ont en A la même multiplicité que les courbes $2C_1$, c'est-à-dire un point double, les deux tangentes étant confondues avec t_i.

De même, la multiplicité des courbes C_3 en A est égale à la multiplicité minimum en ce point des courbes

$$C_1 + C_2, \; C_3 + C_p, \; C_4 + C_{p-1}, \ldots, C_i + C_{p-i+3}, \ldots, 2C_{\nu+2}.$$

Si $i = 2$, les courbes C_3 ont en A la même multiplicité que les courbes $C_1 + C_2$, c'est-à-dire un point double, les tangentes étant confondues avec t_1, t_2.

Si $i = 3$, les courbes C_3 ont un point simple en A et y touchent la droite t_1.

Si $i = \nu + 2$, les courbes C_3 ont en A un point double, les deux tangentes étant confondues avec la droite t_1.

Si i est distinct de 2, 3 et de $\nu + 2$, les courbes C_3 ont un point triple en A, les trois tangentes étant confondues avec la droite t_i.

Le système $|D_4|$ contient les courbes

$$C_1 + C_3, \; 2C_2, \; C_4 + C_p, \; C_5 + C_{p-1}, \ldots, C_i + C_{p-i+4}, \ldots$$

Si $i = 2$, les courbes C_4 ont en A un point double, les deux tangentes étant confondues avec la droite t_1.

Si $i = 3$, les courbes C_4 ont en A la même multiplicité que les courbes $C_1 + C_3$, c'est-à-dire un point double, les tangentes étant confondues avec t_1, t_3.

Si $i = 4$, les courbes C_4 ont en A un point simple et y touchent la droite t_1.

Si $i = \nu + 2$, les courbes C_4 ont en A un point triple, deux tangentes étant confondues avec t_1 et la troisième tangente avec $t_{\nu+2}$.

Pour les autres valeurs de i, les courbes C_4 ont en A un point quadruple, les quatre tangentes étant confondues avec t_i.

Examinons encore la singularité des courbes C_5 en A. Le système $|D_5|$ contient les courbes

$$C_1 + C_4, \; C_2 + C_3, \; C_5 + C_p, \; C_6 + C_{p-1}, \ldots, C_i + C_{p-i+5}, \ldots, 2C_{\nu+3}.$$

Supposons $i = 2$. Les courbes C_5 ont en A un point triple, deux tangentes étant confondues avec t_1 et une avec t_2.

Supposons $i = 3$. Les courbes C_5 ont également un point triple en A, deux tangentes étant confondues avec t_3 et une avec t_1.

Supposons $i = 4$. Les courbes C_5 ont un point double en A, les tangentes étant confondues avec les droites t_1, t_4.

Si $i = 5$, les courbes C_5 passent simplement par A en y touchant la droite t_1.

Pour $i = \nu + 2$, les courbes C_5 ont un point quadruple en A, deux tangentes étant confondues avec t_1 et deux avec $t_{\nu+2}$.

Supposons maintenant $i = \nu + 3$. Les courbes C_5 ont un point double en A, les deux tangentes étant confondues avec la droite t_1.

Pour les autres valeurs de i, les courbes C_5 auront un point quintuple en A, toutes les tangentes étant confondues avec t_i.

On voit, par ces considérations, le parti que l'on peut tirer de la remarque faite plus haut pour l'étude de la structure du point uni A.

6. Nous allons traiter un exemple. Nous supposerons $p = 7$ et $i = 2$ (c'est-à-dire que le plan tangent α à F en A s'appuie en un point sur σ_1 et en un point sur σ_2).

Les courbes C_1 ont en A un point simple et y touchent la droite t_2. Les courbes C_2 ont également un point simple en A et y touchent la droite t_1.

Les courbes C_3 ont un point double en A, les tangentes étant t_1, t_2.

Les courbes C_4 ont un point double en A, les deux tangentes étant confondues avec t_1.

Les courbes C_5 ont un point triple en A, deux tangentes étant confondues avec t_1 et une avec t_2.

Les courbes C_6 ont un point triple en A, les trois tangentes étant confondues avec la droite t_1.

Les courbes $C_1 + C_6$, $C_2 + C_5$, $C_3 + C_4$, qui appartiennent au système $|D_7|$, ont en A un point quadruple, trois tangentes étant confondues avec t_1 et une avec t_2. Cette singularité est celle des courbes de l'un des systèmes $|C_7'|$, $|C_7''|$,... Si l'on examine les singularités des courbes $C_1, C_2, ..., C_6$ en A, singularités qui sont différentes de celle des courbes C_7', on voit que les courbes C_7' ont en A soit un point triple dont deux tangentes sont confondues avec t_2 et une avec t_1, soit un point quadruple avec trois tangentes confondues avec t_1 et une confondue avec t_2.

Liége, le 22 mai 1941.

M. HAYEZ, Impr. de l'Académie royale, 112, rue de Louvain, Bruxelles
(Domicile légal : rue de la Chancellerie, 4)