Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences).
Séance du 6 juillet 1946.

Construction de surfaces algébriques irrégulières

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

On ne connaît que quelques catégories de surfaces algébriques irrégulières et il est intéressant de montrer l'existence de surfaces irrégulières ne rentrant pas dans ces catégories. Un procédé qui permet d'obtenir de nouvelles surfaces irrégulières est le suivant : Soit L une courbe algébrique contenant une involution cyclique d'ordre $n > 2$, irrationnelle ; soient F la surface qui représente les couples de points non ordonnés de la courbe L, Φ la surface qui représente les couples de points non ordonnés de la courbe L′, image de l'involution. Entre les surfaces Φ, F, nous avons une correspondance $(1, n^2)$, déterminant sur F une involution d'ordre n^2. D'autre part, il existe sur F une involution d'ordre n, au moyen de laquelle l'involution précédente est composée. Si F′ est une surface image de cette involution, il existe donc une correspondance $(1, n)$ entre F′ et F, et une correspondance $(1, n)$ entre Φ et F′. Il en résulte que l'irrégularité de F′ est comprise entre celle de Φ et celle de F, c'est-à-dire entre le genre de L′ et celui de L (1).

L'involution d'ordre n appartenant à F et d'image F′, possède un nombre fini de points unis. La difficulté qui se présente est la détermination de la structure de ces

(1) Nous avons utilisé ce procédé dans le cas où l'involution appartenant à la courbe L est privée de points unis. (Bull. de l'Académie, 1933, pp. 674-680). Voir aussi les Bulletins de l'Académie, 1943, pp. 408-422, 815-822 ; 1944, pp. 11-18 ; 1945, pp. 9-16.

points unis, structure qui a une répercussion sur la construction du système canonique de la surface F′.

Dans cette note, nous construisons, d'après le procédé indiqué, deux surfaces irrégulières :

1° *Une surface irrégulière d'ordre* 36, *appartenant à un espace linéaire à huit dimensions, de genres*

$$p_g = 9, \quad p_a = 8, \quad p^{(1)} = 37,$$

dont le système des sections hyperplanes est le système canonique.

2° *Une surface irrégulière d'ordre* 92, *appartenant à un espace linéaire à* 14 *dimensions, de genres*

$$p_g = 15, \quad p_a = 12, \quad p^{(1)} = 93,$$

dont le système des sections hyperplanes est le système canonique.

1. Considérons, dans un espace S_3, l'homographie de période trois

$$x_1' : x_2' : x_3' : x_4' = x_1 : x_2 : \epsilon x_3 : \epsilon^2 x_4, \tag{1}$$

où ϵ est une racine cubique primitive de l'unité. Elle admet les points unis $O_3(0, 0, 1, 0)$, $O_4(0, 0, 0, 1)$ et l'axe ponctuel $x_3 = x_4 = 0$.

Les surfaces cubiques

$$x_3^2 x_4 \phi_0 + x_4^2 \phi_1(x_1, x_2) + x_3 \phi_2(x_1, x_2) = 0, \tag{2}$$

$$x_3 x_4^2 \psi_0 + x_3^2 \psi_1(x_1, x_2) + x_4 \psi_2(x_1, x_2) = 0, \tag{3}$$

où les ϕ et les ψ sont des polynomes en x_1, x_2 dont le degré est indiqué par l'indice, sont transformées en elles-mêmes par l'homographie (1). Elles ont en commun, en dehors de la droite $x_3 = x_4 = 0$, une courbe L d'ordre huit, passant par les points O_3, O_4 et s'appuyant en quatre points sur la droite $x_3 = x_4 = 0$, transformée en elle-même par l'homographie (1).

La courbe L est de genre sept. Sur cette courbe, l'homographie (1) engendre une involution d'ordre trois présentant six points unis ; cette involution est donc, d'après la formule de Zeuthen, de genre un.

La surface (2) touche, le long de la droite $x_3 = x_4 = 0$, le plan $x_3 = 0$; elle possède donc deux points doubles coniques sur cette droite. Il est facile de voir que ces points doubles sont donnés par

$$x_3 = 0, \quad x_4 = 0, \quad \phi_2(x_1, x_2) = 0.$$

Nous les désignerons par P_{11}, P_{12}.

La surface (3) est tangente, le long de la droite $x_3 = x_4 = 0$, au plan $x_4 = 0$; elle possède également deux points doubles coniques sur cette droite. Ce sont les points

$$x_3 = 0, \quad x_4 = 0, \quad \psi_2(x_1, x_2) = 0 ;$$

nous les désignerons par P_{21}, P_{22}.

Les points d'appui de la courbe L sur la droite $x_3 = x_4 = 0$ sont évidemment les points $P_{11}, P_{12}, P_{21}, P_{22}$. Ce sont des points unis de l'involution déterminée sur L par l'homographie (1).

2. La série canonique de L est découpée sur cette courbe par les quadriques passant par la droite $x_3 = x_4 = 0$. Rapportons projectivement ces quadriques aux hyperplans d'un espace linéaire S_6 à six dimensions en posant

$$\frac{X_{13}}{x_1x_3} = \frac{X_{14}}{x_1x_4} = \frac{X_{23}}{x_2x_3} = \frac{X_{24}}{x_2x_4} = \frac{X_{33}}{x_3^2} = \frac{X_{34}}{x_3x_4} = \frac{X_{44}}{x_4^2} .$$

Aux points de S_3 correspondent les points d'une variété V_3^4 d'équations

$$\left\| \begin{matrix} X_{13} & X_{23} & X_{33} & X_{34} \\ X_{14} & X_{24} & X_{34} & X_{44} \end{matrix} \right\| = 0.$$

A la courbe L correspond une courbe canonique, que nous désignerons encore par L, tracée sur la variété V_3^4.

A l'homographie (1) correspond, dans S_6, l'homographie H d'équations

$$\frac{X'_{13}}{\epsilon X_{13}} = \frac{X'_{23}}{\epsilon X_{23}} = \frac{X'_{14}}{\epsilon^2 X_{14}} = \frac{X'_{24}}{\epsilon^2 X_{24}} = \frac{X'_{33}}{\epsilon^2 X_{35}} = \frac{X'_{34}}{X_{34}} = \frac{X'_{44}}{\epsilon X_{44}}.$$

Cette homographie H possède donc un point uni O_{34} et deux plans unis : σ_2, d'équations

$$X_{14} = X_{24} = X_{33} = X_{34} = 0$$

et σ'_2, d'équations

$$X_{13} = X_{23} = X_{44} = X_{34} = 0.$$

Nous allons déterminer la distribution des points unis sur la courbe L de S_6.

Au point $O_3(0, 0, 1, 0)$ correspond le point O_{33}, dont toutes les coordonnées sont nulles sauf X_{33}. Ce point appartient au plan σ'_2.

Au point $O_4(0, 0, 0, 1)$ correspond le point O_{44}, qui appartient au plan σ_2.

Soient y_1, y_2, 0, 0 les coordonnées du point P_{11}. On a donc $\phi_2(y_1, y_2) = 0$. Considérons les quadriques

$$\lambda_{13}x_1x_3 + \lambda_{14}x_1x_4 + \lambda_{23}x_2x_3 + \lambda_{24}x_2x_4 \\ + \lambda_{33}x_3^2 + \lambda_{34}x_3x_4 + \lambda_{44}x_4^2 = 0$$

tangentes en P_{11} à la courbe L, c'est-à-dire tangentes en ce point au plan $x_4 = 0$. Elles sont caractérisées par

$$\lambda_{13}y_1 + \lambda_{23}y_2 = 0$$

et à ces quadriques correspondent donc les hyperplans de S_6 passant par le point

$$\frac{X_{13}}{y_1} = \frac{X_{23}}{y_2}, \qquad X_{14} = X_{24} = X_{33} = X_{34} = X_{44} = 0.$$

Ce point appartient au plan σ_2 et à la courbe L de S_6.

On voit donc que la courbe L rencontre le plan σ_2 au point O_{44} et aux deux points

$$\phi_2(X_{13}, X_{23}) = 0, \quad X_{14} = X_{24} = X_{33} = X_{34} = X_{44} = 0.$$

De même, la courbe L rencontre le plan σ'_2 au point O_{33} et aux deux points

$$\psi_2(X_{14}, X_{24}) = 0, \quad X_{13} = X_{23} = X_{33} = X_{34} = X_{44} = 0.$$

Nous désignerons les deux premiers points par P'_{11}, P'_{12} les deux derniers par P'_{21}, P'_{22}.

Le plan $x_3 = 0$ coupe la courbe L de S_3 aux points P_{11}, P_{12} et la touche aux points P_{21}, P_{22} et O_{44}. De même, le plan $x_4 = 0$ coupe L aux points P_{21}, P_{22} et la touche aux points P_{11}, P_{12} et O_{33}. Il en résulte qu'à la quadrique $x_3x_4 = 0$ correspond dans S_6 l'hyperplan $X_{34} = 0$, uni pour H et passant par σ_2, σ'_2, touchant la courbe L aux six points unis P'_{11}, P'_{12}, P'_{21}, P'_{22}, O_{33}, O_{44}.

3. Désignons par J_3 l'involution d'ordre trois engendrée par H sur la courbe L de S_6 et par L' la courbe elliptique image de cette involution.

Les hyperplans passant par O_{34} et par σ'_2 sont unis pour l'homographie H et découpent sur L une série linéaire g^2_9 appartenant à l'involution J_3. Il lui correspond sur L' une série g^2_3, donc complète.

De même, les hyperplans passant par O_{34} et par σ_2 sont unis pour H et découpent sur L une série g^2_9 à laquelle correspond sur L' une série g^2_3 complète.

L'hyperplan $X_{34} = 0$, contenant les plans σ_2, σ'_2 et déterminé par ceux-ci, touche L aux six points de diramation et ne rencontre donc plus la courbe en dehors de ces points. Observons que la courbe L' étant elliptique possède un groupe canonique d'ordre zéro. Son transformé sur L est un groupe d'ordre zéro qui, d'après l'interprétation géométrique de la formule de Zeuthen due à M. Castelnuovo, ajouté au groupe de points unis, doit donner un groupe canonique de L. C'est bien ce qui a lieu ici ; on observera en effet que l'involution J_3 étant cyclique, chaque point uni doit être compté deux fois.

Considérons la tangente à la courbe L en un point uni, par exemple en O_{33}. L'hyperplan $X_{34} = 0$ étant tangent à L en O_{33}, contient cette tangente. Celle-ci est unie pour H et ne peut appartenir à σ'_2, donc elle doit contenir un second point uni qui est nécessairement situé dans σ_2.

4. Nous allons maintenant, pour simplifier, changer de notations. Nous désignerons par $X_0, X_1, X_2, \dots, X_6$ les coordonnées des points de S_6, par O_i le point dont toutes les coordonnées sont nulles sauf X_i. Nous supposerons que les équations de l'homographie H sont

$$X'_0 : X'_1 : X'_2 : X'_3 : X'_4 : X_5 : X_6$$
$$= X_0 : \epsilon X_1 : \epsilon X_2 : \epsilon X_3 : \epsilon^2 X_4 : \epsilon^2 X_5 : \epsilon^2 X_6.$$

Le point O_0 est uni pour H et cette homographie possède les axes ponctuels $\sigma_2 \equiv O_1O_2O_3$ et $\sigma'_2 \equiv O_4O_5O_6$. On peut de plus supposer que les points de la courbe L situés sur σ_2 sont O_1, O_2, O_3 et ceux situés sur σ'_2, O_4, O_5, O_6.

Soit F la surface qui représente les couples de points non ordonnés de la courbe L. Elle a, comme on sait, les genres

$$p_g = 21, \qquad p_a = 14, \qquad p^{(1)} = 115.$$

Les courbes canoniques C de F correspondent aux couples de points d'appui sur L des cordes de cette courbe appartenant à un complexe linéaire de S_6 [1].

Désignons par,

$$p_{ik} = y_i z_k - y_k z_i, \qquad i < k$$

les coordonnées radiales des droites de S_6. Il existe trois systèmes linéaires de complexes linéaires de droites de S_6 transformés en eux-mêmes par H ; ce sont les systèmes

(1) Severi, *Sulle superficie che rappresentano le coppie di punti di una curva algebrica* (Atti Accademia, Torino, 1902-1903).

$$\lambda_{14}p_{14} + \lambda_{15}p_{15} + \lambda_{16}p_{16} + \lambda_{24}p_{24} + \lambda_{25}p_{25} + \lambda_{26}p_{26} + \lambda_{34}p_{34} + \lambda_{35}p_{35} + \lambda_{36}p_{36} = 0,$$

$$\lambda_{01}p_{01} + \lambda_{02}p_{02} + \lambda_{03}p_{03} + \lambda_{45}p_{45} + \lambda_{46}p_{46} + \lambda_{56}p_{56} = 0,$$

$$\lambda_{04}p_{04} + \lambda_{05}p_{05} + \lambda_{06}p_{06} + \lambda_{12}p_{12} + \lambda_{13}p_{13} + \lambda_{23}p_{23} = 0.$$

Nous les désignerons respectivement par Σ_1, Σ_2, Σ_3. Soient $|C_1|$, $|C_2|$, $|C_3|$ les systèmes linéaires partiels compris dans le système canonique $|C|$ de F qui leur correspondent.

A un point M de F, qui représente le couple de points M_1, M_2 de L, faisons correspondre le point M′ qui représente les points M'_1, M'_2 de L que H fait correspondre à M_1, M_2. Nous définissons ainsi sur F une transformation birationnelle T, de période trois, engendrant une involution I_3 d'ordre trois.

Les points unis de l'involution I_3 sont les points qui représentent des couples de points unis, distincts ou confondus, de l'involution J_3 sur L. Nous désignerons par A_{ik} le point qui représente le couple O_iO_k et par A_{ii} celui qui représente le point O_i compté deux fois. L'involution I_3 possède donc 21 points unis.

Le système $|C|$ est évidemment transformé en lui-même par T et les systèmes $|C_1|$, $|C_2|$, $|C_3|$ appartiennent à l'involution I_3.

5. Le point A_{12} correspond à la corde O_1O_2 de L ; cette corde appartient au plan σ_2 et aux complexes Σ_1, Σ_2. Donc les courbes C_1, C_2 passent par le point A_{12} ; elles passent également par les points A_{13}, A_{23}.

De même, les points A_{45}, A_{46}, A_{56} appartiennent aux courbes C_1, C_3.

Le point A_{14} correspond à la corde O_1O_4 de L, corde qui appartient aux complexes Σ_2, Σ_3. Donc le point A_{14} et de même les points A_{15}, ..., A_{36} appartiennent aux courbes C_2, C_3.

La tangente à la courbe L au point A_1 rencontre, comme nous l'avons observé, le plan σ'_2 et par conséquent, cette droite appartient aux complexes Σ_2, Σ_3. Par conséquent, le point A_{11} et de même les points A_{22}, A_{33}, ..., A_{66} appartiennent aux courbes C_2, C_3.

Les points unis isolés d'une involution cyclique d'ordre trois, appartenant à une surface algébrique, sont de deux sortes : les points unis parfaits et les points unis symétriques. Dans le domaine d'un point uni parfait, la transformation génératrice de l'involution détermine l'identité ; dans le domaine d'un point uni symétrique, cette transformation détermine une involution ayant deux points unis. Nous allons déterminer la nature des points unis de I_3.

Considérons le point A_{12}, qui représente la droite O_1O_2 et soient t_1, t_2 les tangentes à la courbe L aux points O_1, O_2. Les droites de la congruence des cordes de L, infiniment voisines de O_1O_2, coïncident avec les droites s'appuyant sur t_1, t_2, infiniment voisines de la même droite O_1O_2.

Les tangentes t_1, t_2 coupent σ'_2 en des points P_1, P_2. Considérons l'espace à trois dimensions déterminé par les points $O_1O_2P_1P_2$. Dans cet espace, H détermine une homographie ayant pour axes ponctuels les droites O_1O_2 et P_1P_2. En prenant le tétraèdre $O_1O_2P_1P_2$ comme figure de référence, on peut écrire les équations de cette homographie sous la forme

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = x_1 : x_2 : \epsilon x_3 : \epsilon x_4, \tag{1}$$

ϵ étant une racine cubique primitive de l'unité. En coordonnées radiales, la congruence lieu des droites s'appuyant sur t_1, t_2 a pour équations

$$p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} = 0, \qquad p_{14} = 0, \qquad p_{23} = 0. \tag{2}$$

Interprétons p_{12}, p_{13}, p_{42}, p_{34} comme coordonnées d'un espace à trois dimensions. La congruence est donc représentée par une quadrique (2). L'homographie (1) donne

$$p'_{12} : p'_{13} : p'_{42} : p'_{34} = p_{12} : \epsilon p_{13} : \epsilon p_{42} : \epsilon^2 p_{34}. \tag{3}$$

A la droite O_1O_2 correspond le point (1, 0, 0, 0) ; le plan tangent en ce point est $p_{34} = 0$ et dans ce plan, l'homographie (3) détermine une homologie ayant pour centre le point (1, 0, 0, 0). Ce point est donc uni parfait pour l'involution d'ordre trois engendrée par l'homographie (3) sur la quadrique (2). Par conséquent, les cordes de la courbe L, infiniment voisines de la droite O_1O_2, sont unies pour l'homographie H. Il en résulte que le point A_{12} est uni parfait pour l'involution I_3. Il en est de même des points A_{13}, A_{23}, A_{45}, A_{46}, A_{56}.

Considérons maintenant le point A_{14} et la droite O_1O_4. Soit t_4 la tangente à L au point O_4. En raisonnant comme plus haut, nous sommes conduit à examiner la manière d'opérer de l'homographie H sur les droites de la congruence de directrices O_1O_4, P_1P_4 (P_4 étant le point de rencontre de t_4 avec σ_2), infiniment voisines de O_1O_4. Dans l'espace $O_1O_4P_1P_4$, où ces points sont pris comme sommets du tétraèdre de référence, H détermine l'homographie

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = x_1 : \epsilon x_2 : \epsilon x_3 : x_4, \tag{4}$$

ayant pour axes O_1P_4 ($x_2 = x_3 = 0$) et O_4P_1($x_1 = x_4 = 0$). La congruence envisagée a pour directrices t_1, t_4 et est représentée par la quadrique

$$p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0, \qquad p_{12} = 0, \qquad p_{34} = 0. \tag{5}$$

L'homographie (4) détermine l'homographie

$$p'_{13} : p'_{14} : p'_{23} : p'_{42} = \epsilon p_{13} : p_{14} : \epsilon^2 p_{13} : \epsilon p_{42}. \tag{6}$$

A la droite O_1O_4 correspond sur le quadrique (5) le point $p_{14} = p_{23} = p_{42} = 0$. Le plan tangent à la quadrique en ce point est $p_{42} = 0$. Dans ce plan, l'homographie (6) détermine une homographie non homologique, donc le point considéré est uni symétrique sur la quadrique. Il en résulte que le point A_{14} est uni symétrique pour I_3 ; il ne contient, dans son domaine du premier ordre, que deux points unis (parfaits) pour I_3. Les points A_{15}, A_{16}, A_{24}, A_{25}, A_{26}, A_{34}, A_{35}, A_{36} sont de même nature.

On peut encore reprendre le raisonnement précédent pour les points A_{11}, A_{22}, ..., A_{66}, qui sont aussi unis symétriques pour I_3.

6. Sur la surface F, l'involution I_3 possède donc 21 points unis : six points unis parfaits et 15 points unis symétriques.

Soit F′ une surface image de l'involution I_3. Entre le genre arithmétique p_a de F et celui p'_a de F′, nous avons la relation [1]

$$12(p_a + 1) = 3.12(p'_a + 1) - 6.4 - 15.8.$$

Actuellement, $p_a = 14$, donc $p'_a = 8$.

Le genre linéaire $p^{(1)}$ de F′ est donné par

$$3(p^{(1)} - 1) + 6 = 114,$$

donc $p^{(1)} = 36$.

Désignons par $|C'|$ le système canonique de F′. Nous avons établi qu'à un point uni parfait correspondait sur F′ un point de diramation équivalent à une courbe rationnelle de degré -3 qui doit être rencontrée en un point variable par les courbes canoniques C′. A un point uni symétrique, correspond sur F′ un point de diramation équivalent à deux courbes rationnelles de degré -2 se coupant en un point, sans influence sur le système canonique $|C'|$.

On en conclut qu'au système $|C'|$ correspond sur F celui des systèmes $|C_1|$, $|C_2|$, $|C_3|$ ayant pour points-base les points unis parfaits de I_3, c'est-à-dire les points A_{12}, A_{13}, A_{23}, A_{45}, A_{46}, A_{56}, mais non les autres points unis. Le transformé de $|C'|$ est donc le système $|C_1|$,

[1] Voir nos *Recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (BULLETIN DE L'ACADÉMIE DE BELGIQUE, 1935, pp. 338-344).

de dimension 8. On a donc, pour le genre géométrique de F', $p_g = 9$.

Rapportons projectivement les courbes C' aux hyperplans d'un espace linéaire S_8 à huit dimensions. A la surface F' correspond un surface d'ordre 36, que nous désignerons toujours par F'.

Aux points de diramation homologues des six points unis parfaits correspondent sur F' six droites de degré — 3. Aux 15 autres points de diramation correspondent quinze points doubles biplanaires ordinaires de F'.

Aux courbes C_2 correspondent sur F' des courbes C'_2 d'ordre 37, passant par les 15 points doubles biplanaires et rencontrant trois des six droites de la surface. Aux courbes C_3 correspondent des courbes C'_3 d'ordre 37 passant également par les 15 points doubles biplanaires et rencontrant les trois autres droites de la surface.

7. Nous allons maintenant nous occuper de la seconde surface. Considérons la courbe d'équations

$$x_3^2 x_4 \phi_0 + x_4^2 \phi_1(x_1, x_2) + x_3 \phi_2(x_1, x_2) = 0,$$
$$x_3^3 \psi_0 + x_4^3 \psi'_0 + x_3 x_4 \psi_1(x_1, x_2) + \psi_3(x_1, x_2) = 0.$$

Nous la désignerons encore par L, ces nouvelles notations n'ayant rien de commun avec celles qui précèdent. La courbe L est d'ordre neuf et de genre dix, et est invariante pour l'homographie

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = x_1 : x_2 : \epsilon x_3 : \epsilon^2 x_4, \tag{1}$$

ϵ étant toujours une racine cubique primitive de l'unité. Cette homographie détermine sur la courbe L une involution J_3, d'ordre trois, ayant trois points unis sur la droite $x_3 = x_4 = 0$. Cette involution est donc de genre trois.

Le système canonique de la courbe L est découpé par les quadriques de l'espace. Rapportons projectivement ces quadriques aux hyperplans d'un espace linéaire S_9 à neuf dimensions en posant

$$\rho X_{ik} = x_i x_k, \qquad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

A la courbe L correspond une courbe d'ordre 18, que nous désignerons toujours par L.

A l'homographie (1) correspond une homographie H d'équations

$$\frac{X'_{11}}{X_{11}} = \frac{X'_{22}}{X_{22}} = \frac{X'_{12}}{X_{12}} = \frac{X'_{34}}{X_{34}}$$
$$= \frac{X'_{44}}{\epsilon X_{44}} = \frac{X'_{13}}{\epsilon X_{13}} = \frac{X'_{23}}{\epsilon X_{23}} = \frac{X'_{33}}{\epsilon^2 X_{33}} = \frac{X'_{14}}{\epsilon^2 X_{14}} = \frac{X'_{24}}{\epsilon^2 X_{24}}.$$

L'homographie H possède trois axes ponctuels : un espace à trois dimensions σ_3 et deux plans σ_2, σ'_2.

Les points unis de l'involution J_3 engendrée par H sur la courbe L de S_9 appartiennent à l'axe σ_3 et les tangentes à la courbe L en ces points s'appuient sur σ'_2.

Pour établir ces différents points, retournons à la courbe L de l'espace S_3. Cette courbe touche le plan $x_3 = 0$ en ses points d'appui sur la droite $x_3 = x_4 = 0$, car la première surface cubique contenant L touche ce plan le long de cette droite.

Les quadriques

$$\lambda_{11}x_1^2 + \lambda_{22}x_2^2 + \lambda_{12}x_1x_2 + \lambda_{34}x_3x_4 = 0,$$

unies pour l'homographie (1), ne passent pas par les points unis. Il leur correspond les hyperplans passant par σ_2, σ'_2, donc les points unis de J_3 sur la courbe L de S_9 appartiennent à σ_3.

Les quadriques

$$\lambda_{33}x_3^2 + \lambda_{14}x_1x_4 + \lambda_{24}x_2x_4 = 0,$$

unies pour l'homographie (1), passent par $x_3 = x_4 = 0$ sans toucher la courbe L de S_3 en ses points d'appui sur cette droite. Il leur correspond dans S_9 les hyperplans passant par σ_4, σ_2.

Les quadriques

$$\lambda_{44}x_4^2 + \lambda_{13}x_1x_3 + \lambda_{23}x_2x_3 = 0$$

unies pour l'homographie (1), touchent la courbe L de S_3 en ses points d'appui sur la droite $x_3 = x_4 = 0$. Il leur correspond les hyperplans de S_9 passant par σ_3, σ_2'. Par conséquent, les tangentes à L en ses points d'appui sur σ_3, qui sont unies pour H, s'appuient sur σ_2'.

8. Appelons F la surface qui représente les couples de points non ordonnés de la courbe L. Cette surface F a les caractères

$$p_g = 45, \qquad p_a = 35, \qquad p^{(1)} = 280.$$

L'existence de l'homographie H, transformant L en elle-même, implique celle d'une transformation birationnelle T, de période trois, de F en elle-même. Cette transformation T engendre sur F une involution I_3, d'ordre trois, présentant six points unis.

Soient P_1, P_2, P_3 les points d'appui de la courbe L de S_9 sur l'espace σ_3 et t_1, t_2, t_3 les tangentes à L en ces points. Les points unis de l'involution I_3 sont les points A_{23}, A_{31}, A_{12} représentant les couples P_2P_3, P_3P_1, P_1P_2 et les points A_{11}, A_{22}, A_{33} qui représentent les couples formés des points P_1, P_2, P_3 comptés chacun deux fois.

En suivant exactement la même méthode que dans l'exemple précédent, on démontre que les points A_{23}, A_{13}, A_{12} sont unis parfaits pour l'involution I_3, tandis que les points A_{11}, A_{22}, A_{33} sont unis symétriques.

Soit F' la surface qui représente l'involution I_3. Le genre arithmétique et le genre linéaire de la surface F', calculés d'après les formules rappelées plus haut, ont pour valeur

$$p_a = 12, \qquad p^{(1)} = 93.$$

9. Le système canonique $|C|$ de F correspond aux cordes de la courbe L de S_9 situées dans des complexes linéaires de droites.

Un simple calcul, analogue à celui que nous avons effectué plus haut, montre qu'il existe trois systèmes linéaires de complexes linéaires de droites de S_9, transformés en eux-mêmes par l'homographie H. Ces trois systèmes ont la même dimension 14.

En correspondance, nous avons dans $| C |$ trois systèmes linéaires partiels $| C_1 |$, $| C_2 |$, $| C_3 |$ appartenant à l'involution I_3. Il est facile de voir que les points A_{23}, A_{31}, A_{12} sont points-base de deux des systèmes, soient $| C_1 |$, $| C_2 |$ et que les points A_{11}, A_{22}, A_{33} sont points-base de deux systèmes $| C_2 |$, $| C_3 |$.

Cela étant, le transformé du système canonique de F′ doit être celui des systèmes $| C_1 |$, $| C_2 |$, $| C_3 |$ dont les courbes passent par les points unis parfaits A_{23}, A_{31}, A_{12} de $\mathbf{I}_3$; c'est donc le système $| C_1 |$ et le genre géométrique de la surface F′ est $p_g = 15$.

En rapportant projectivement les courbes C_1 aux hyperplans d'un espace linéaire S_{14} à 14 dimensions, on obtient comme modèle projectif de la surface F′ une surface d'ordre 92, à sections hyperplanes de genre 93, contenant trois droites de degré — 3 et trois points doubles biplanaires ordinaires.

Liége, le 16 juin 1946.