EXTRAIT DU *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége.*
(Séance du 15 juin 1944. — Nos 5-6.)

Sur des variétés algébriques possédant une hypersurface canonique ou bicanonique d'ordre zéro,

par LUCIEN GODEAUX, Membre de la Société.

On sait que la surface d'Enriques, dépourvue de courbe canonique et possédant une courbe bicanonique d'ordre zéro, est l'image d'une involution du second ordre, privée de points unis, appartenant à une surface de genres un, ayant donc une courbe canonique d'ordre zéro (1). Par contre, une involution du second ordre, appartenant à une courbe elliptique, est elliptique, c'est-à-dire que la courbe et l'involution ont des groupes canoniques d'ordre zéro. Nous avons montré que cette propriété se généralise en ce sens qu'une variété algébrique à n dimensions, image d'une involution du second ordre privée de points unis, appartenant à une variété algébrique à n dimensions possédant une hypersurface canonique d'ordre zéro, possède une hypersurface canonique d'ordre zéro si n est impair, ou est dépourvue d'hypersurface canonique mais possède une hypersurface bicanonique d'ordre zéro si n est pair (2). Dans cette note, nous illustrons cette propriété par un exemple.

---

(1) Ce théorème est dû à M. Enriques. Pour la bibliographie, voir notre exposé sur : Les surfaces algébriques non rationnelles de genres arithmétique et géométrique nuls (*Actualités scientifiques*, Paris, Hermann, 1934).

(2) Sur la construction de variétés algébriques analogues à la surface d'Enriques (*Bull. de la Soc. roy. des Sciences de Liége*, 1939). Voir aussi notre note : Un problème sur les variétés algébriques (*Revue scientifique*, 1942).

1. Considérons, dans un espace linéaire S_{2n+1} à $2n+1$ dimensions, la variété V_n, à n dimensions, d'ordre 2^{n+1}, intersection de $n+1$ hyperquadriques Q^2_{2n}, linéairement indépendantes. Nous allons démontrer que cette variété possède une hypersurface canonique d'ordre zéro.

Observons tout d'abord que cette propriété est vérifiée pour $n=1$ et $n=2$. Pour $n=1$, la variété est une quartique elliptique de S_3, dont la série canonique est d'ordre zéro. Pour $n=2$, la variété est la surface du huitième ordre de S_5, intersection de trois hyperquadriques; elle est de genres un ($p_a=P_4=1$) et possède une courbe canonique d'ordre zéro.

Supposons que la propriété soit vraie pour la valeur $n-1$ de n, c'est-à-dire que la variété V_{n-1}, intersection de n hyperquadriques de S_{2n-1}, ait une hypersurface canonique d'ordre zéro.

Considérons la variété W_n de S_{2n}, intersection de n hyperquadriques et soient V_{n-1} ses sections hyperplanes. Le système adjoint $|V'_{n-1}|$ à $|V_{n-1}|$ est formé de variétés d'ordre zéro. Le système adjoint au système $|2V_{n-1}|$ découpé sur W_n par les hyperquadriques de S_{2n} est donc le système $|V_{n-1}|$. Par conséquent, l'intersection de $n+1$ hyperquadriques de S_{2n} est une variété dont les sections hyperplanes sont des variétés canoniques. Cela étant, les sections hyperplanes de la variété V_n de S_{2n+1} intersection de $n+1$ hyperquadriques, forment un système linéaire qui est son propre adjoint. L'hypersurface canonique de V_n est donc d'ordre zéro.

La propriété énoncée est vraie pour n si elle est vraie pour $n-1$; elle est vraie pour $n=1$, $n=2$, donc elle est vraie pour toute valeur de n.

La variété V_n, *d'ordre* 2^{n+1}, *de* S_{2n+1}, *intersection de* $n+1$ *hyperquadriques linéairement indépendantes, possède une hypersurface canonique d'ordre zéro.*

2. Soit H une homographie biaxiale harmonique de S_{2n+1}, ayant pour axes deux espaces η_0, ζ_0 à n dimensions.

Nous prendrons pour coordonnées homogènes des points de S_{2n+1}, $2n+2$ quantités $y_0, y_1, \ldots, y_n, z_0, z_1, \ldots, z_n$ choisies de telle sorte que l'axe η_0 soit donné par

$$z_0 = z_1 = \cdots = z_n = 0,$$

et l'axe ζ_0 par

$$y_0 = y_1 = \cdots = y_n = 0.$$

Les équations de H peuvent alors s'écrire

$$\frac{y_i'}{y_i} = \frac{z_k'}{-z_k} \qquad (i, k = 0, 1, \ldots, n).$$

L'homographie H engendre, dans S_{2n+1}, une involution I_2 d'ordre deux. Il existe deux systèmes linéaires d'hyperquadriques appartenant à l'involution I_2; l'un est formé par les hyperquadriques représentées par l'équation

$$\varphi(y_0, y_1, \ldots, y_n) + \psi(z_0, z_1, \ldots, z_n) = 0, \tag{1}$$

où φ et ψ sont des formes quadratiques; l'autre est formé des hyperquadriques représentées par l'équation

$$\sum_{i,k} \lambda_{ik}\, y_i z_k = 0 \qquad (i, k = 0, 1, \ldots, n). \tag{2}$$

Le système (1) a la dimension $n(n+3)+1$, le système (2) la dimension $n(n+2)$.

Pour obtenir une image de l'involution I_2, rapportons projectivement les hyperquadriques du système (1) aux hyperplans d'un espace $S_{n(n+3)+1}$. A cet effet, posons

$$\rho Y_{ih} = y_i y_h, \quad \rho Z_{jk} = z_j z_k. \tag{3}$$

L'élimination des y et des z entre ces équations conduit à écrire que les déterminants

$$|X_{ih}|, \quad |Z_{jk}|$$

sont de caractéristique un.

Appelons η l'espace à $\frac{1}{2}n(n+3)$ dimensions représenté par $Z_{jk}=0$, ζ l'espace à $\frac{1}{2}n(n+3)$ dimensions donné par $Y_{ih}=0$. Remarquons que les espaces η, ζ ne se rencontrent pas.

Dans l'espace η, les équations obtenues en écrivant que le déterminant $|Y_{ih}|$ a la caractéristique un représentent une variété de Veronese, obtenue en rapportant projectivement les hyperquadriques d'un espace à n dimensions aux hyperplans de η. Représentons cette variété par Y. On sait qu'elle est normale, d'ordre 2^n et à n dimensions.

De même, dans l'espace ζ, en écrivant que le déterminant $|Z_{jk}|$ est de caractéristique un, on obtient une variété de Veronese Z de même nature que Y.

La variété M_{2n+1}, à $2n+1$ dimensions, représentant l'involution I_2 dans $S_{n(n+3)+1}$, est donc l'intersection du cône projetant Y de ζ et du cône projetant la variété Z de η, c'est-à-dire qu'elle est le lieu des droites joignant les points des variétés Y et Z.

La variété M_{2n+1} est d'ordre 2^{2n} et possède Y et Z comme variétés multiples d'ordre 2^n.

3. Élevons les deux membres de l'équation (2) au carré et tenons compte des équations (3); nous obtenons

$$\Sigma \lambda_{ih} \lambda_{jk} Y_{ij} Z_{hk} = 0, \tag{4}$$

équation qui représente une hyperquadrique $Q_{n(n+3)}$ passant par les espaces η et ζ. Lorsque les λ varient, nous obtenons ainsi un système d'hyperquadriques de dimension $n(n+2)$, non linéaire.

Désignons par M_{2n} les sections hyperplanes de la variété M_{2n+1}. A une hyperquadrique quelconque Q_{2n} de S_{2n+1} correspond sur M_{2n+1} une certaine variété M'_{2n}; inversement, à la variété M'_{2n} correspondent, dans S_{2n+1}, l'hyperquadrique Q_{2n} et sa transformation Q'_{2n} par H. Lorsque Q_{2n} varie, M'_{2n} engendre un système rationnel et appartient totalement à un système linéaire $|M'_{2n}|$.

Faisons varier Q_{2n} d'une manière continue de manière qu'elle vienne coïncider avec une hyperquadrique du système (1). La variété M'_2 varie d'une manière continue et vient coïncider avec la variété correspondante M_{2n}, comptée deux fois. On en conclut que le système $|M'_{2n}|$ contient les variétés découpées sur $M_{2^{n+1}}$ par les hyperquadriques de $S_{n(n+3)+1}$. Faisons, d'autre part, tendre Q_{2n} d'une manière continue vers une hyperquadrique du système (2). La variété M'_{2n} tend vers une certaine variété $\overline{M}_{2n}$, comptée deux fois, augmentée des domaines des variétés Y, Z, multiples pour M_{2n+4}. Il en résulte que le long de chacune des variétés $\overline{M}_{2n}$, il y a une hyperquadrique (4) inscrite dans la variété M_{2n+1}. En d'autres termes, la variété M_{2n+1} est l'enveloppe du système (4).

On vérifie d'ailleurs sans peine ce point en partant de l'équation (4), où l'on suppose, par exemple, qu'un seul des paramètres λ varie.

4. Considérons, dans S_{2n+1}, une variété V_n d'ordre 2^{n+1}, intersection de $n+1$ hyperquadriques Q^2_{2n} appartenant au système (1). La variété V_n contient ∞^n couples de l'involution I_2, formant sur cette variété une involution que nous désignerons par J. Aux couples de cette involution J correspondent, sur la variété M_{2n+1} image de I_2, une variété Ω_n d'ordre 2^{2n}.

Aux hyperquadriques du système (1) passant par V_n correspondent des hyperplans de $S_{n(n+3)+1}$ passant par Ω_n et cette variété est donc l'intersection de M_{2n+1} par un espace linéaire $S_{n(n+2)}$ à $n(n+2)$ dimensions.

La variété V_n n'a aucun point commun avec les axes η_0, ζ_0 de H et la variété Ω_n ne rencontre pas les espaces η, ζ; elle est donc dépourvue de points multiples.

Désignons par F les variétés à n—1 dimensions, sections hyperplanes de V_n. Le système linéaire $|F|$ contient deux systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution J : l'un, $|F_1|$, est formé des sections de V_n par les hyperplans passant par l'axe η_0; l'autre, $|F_2|$, est formé des sections de V_n par les hyperplans passant par l'axe ζ_0 de H.

Aux variétés F_1 correspondent sur Ω_n des variétés que nous désignerons par Φ_1, formant un système linéaire de même dimension n que $|F_1|$. Aux variétés F_2 correspondent sur Ω_n des variétés Φ_2, formant également un système linéaire de dimension n. On a d'ailleurs, par la construction de Ω_n,

$$|2\Phi_1| = |2\Phi_2|.$$

5. La variété V_n ayant une hypersurface canonique d'ordre zéro, tout système linéaire de variétés à n—1 dimensions tracé sur cette variété est son propre adjoint. Il en est ainsi en particulier du système $|2F|$ découpé sur V_n par les hyperquadriques de S_{2n+1} ne contenant pas V_n.

Le système $|2F|$ contient deux systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution J. L'un est découpé par les hyperquadriques du système (1) et contient les variétés $2F_1$, $2F_2$; nous le désignerons par $|(2F)_1|$. L'autre est découpé sur V_n par les hyperquadriques du système (2) et contient les variétés F_1+F_2; nous le désignerons par $|(2F)_2|$.

Observons que le système $|2F|$ est nécessairement complet, parce que V_n est intersection d'hyperquadriques.

Cela étant, le système canonique complet d'une variété $(2F)_1$ est découpé sur cette variété par les variétés de $|2F|$; il contient deux systèmes linéaires appartenant à l'involution J : l'un, de dimension $n(n+2)-1$, est découpé par $|(2F)_1|$; l'autre, de dimension $n(n+2)$, est découpé par $|(2F)_2|$.

L'un de ces systèmes est l'homologue du système canonique de la variété $(2\Phi)_1$ homologue, sur Ω_n, de la variété $(2F)_1$ considérée. Nous avons démontré [3] que :

Si n—1 est pair, le transformé du système canonique de

---

[3] Sur une propriété des correspondances rationnelles entre deux variétés algébriques (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1938).

$(2\Phi)_1$ sur $(2F)_1$ est celui des systèmes considérés qui a la plus petite dimension.

Si $n-1$ est impair, c'est au contraire le système qui a la plus grande dimension.

Désignons par $(2\Phi)_1$, $(2\Phi)_2$ les variétés qui correspondent sur Ω_n aux variétés $(2F)_1$, $(2F)_2$.

Si n est impair, on a, sur Ω_n,

$$|(2\Phi)_1'| = |(2\Phi)_1|$$

et cette variété possède une variété canonique d'ordre zéro. Tout système de variétés à $n-1$ dimensions tracées sur Ω_n est son propre adjoint et l'on a

$$|(2\Phi)_2'| = |(2\Phi)_2|,$$

$$|\Phi_1'| = |\Phi_1|, \quad |\Phi_2'| = |\Phi_2|.$$

Si n est pair, on a, sur Ω_n,

$$|(2\Phi)_1'| = |(2\Phi)_2|$$

et la variété est dépourvue de variété canonique.

Le système $|(2\Phi)_1|$ contient les variétés $2\Phi_1$, $2\Phi_2$ et le système $|(2\Phi)_2|$ les variétés $\Phi_1 + \Phi_2$. On a donc

$$|\Phi_1 + \Phi_1'| = |\Phi_1 + \Phi_2|,$$

d'où

$$|\Phi_1'| = |\Phi_2|.$$

Un raisonnement analogue montre qu'on a également

$$|\Phi_2'| = |\Phi_1|.$$

On en déduit

$$|\Phi_1''| = |\Phi_2'| = |\Phi_1|$$

et, par conséquent, la variété Ω_n possède une variété bicanonique d'ordre zéro.

La section par un espace linéaire à n(n+2) *dimensions de la variété d'ordre* 2^{2n} *lieu des droites joignant les points de deux variétés de Veronese à* n *dimensions, d'ordre* 2^n, *situées dans des espaces indépendants dans un espace linéaire à* n(n+3)+1 *dimensions, est une variété à* n *dimensions: possédant une variété canonique d'ordre zéro si* n *est impair; dépourvue de variété canonique et possédant une variété bicanonique d'ordre zéro si* n *est pair.*

Liége, le 6 juin 1944.

M. HAYEZ, Imprimeur de l'Académie royale de Belgique, rue de Louvain, 112, Bruxelles.
(Domicile légal : rue de la Chancellerie, 4)