COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur les variétés de Segre représentant les points de *n* plans,

par Lucien Godeaux, correspondant de l'Académie

On sait que C. Segre a construit des variétés normales représentant les groupes de n points appartenant à n espaces linéaires donnés (1). Ces variétés ont, depuis, reçu le nom de *variétés de Segre*; on les rencontre fréquemment tant en géométrie que dans la théorie des fonctions de variables complexes. Nous les avons utilisées à diverses reprises pour construire des surfaces et variétés algébriques répondant à certaines conditions.

Dans une note récente, nous avons établi que les sections de la variété de Segre représentant les points de n ponctuelles par une hyperquadrique ou par une hypersurface cubique étaient respectivement des variétés algébriques à variété canonique d'ordre zéro ou à variétés canoniques hyperplanes (2). Nous nous proposons d'établir, dans cette nouvelle note :

La section par une hypersurface cubique de la variété de

(1) C. Segre, *Sulle varietà che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazi* (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 1891, pp. 192-204).

(2) *Sur les variétés appartenant à la variété de Segre représentant les points de* n *ponctuelles* (*Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége*, 1938, pp. 520-524).

Segre représentant les points de n *plans, est une variété dont la variété canonique est d'ordre zéro.*

On déduit aisément, de ce théorème, le système canonique de la section de la variété de Segre en question par une hypersurface d'ordre m.

Pour démontrer la propriété énoncée, nous avons construit le système canonique de la section par une hypersurface cubique de la variété de Segre représentant les points de p droites et de $n-p$ plans [1].

1. Considérons p ponctuelles $s_1, s_2 \ldots, s_p$ et $n-p$ plans $\sigma_{p+1}, \sigma_{p+2}, \ldots \sigma_n$ $(p \leqslant n)$. Désignons par Σ une liaison ponctuelle du premier ordre entre ces ponctuelles et ces plans. Analytiquement, Σ est obtenue en égalant à zéro une forme algébrique à n séries de variables : les coordonnées projectives homogènes des points des ponctuelles $s_1, s_2, \ldots, s_p$ et celles des points des $n-p$ plans $\sigma_{p+1}, \sigma_{p+2}, \ldots, \sigma_n$, forme linéaire par rapport à chacune de ces séries de variables. Une telle forme possède $2^p \cdot 3^{n-p}$ coefficients.

Rapportons projectivement les liaisons ponctuelles Σ aux hyperplans d'un espace linéaire S_r à $r = 2^p \cdot 3^{n-p} - 1$ dimensions. Aux groupes de n points pris un dans chacune des formes $s_1, s_2, \ldots, s_p, \sigma_{p+1}, \ldots, \sigma_n$, correspondent les points de la variété de Segre représentant ces formes. Nous représenterons cette variété par la notation

$$(s_1, s_2, \ldots, s_p, \sigma_{p+1}, \sigma_{p+2}, \ldots, \sigma_n).$$

Cette variété est à $2n-p$ dimensions et son ordre est égal à

$$N_p = (2n-p)! : 2^{n-p}.$$

(1) Les procédés de démonstration utilisés permettraient de démontrer que la section par une hypersurface d'ordre $r+1$ de la variété de Segre représentant les points de n espaces linéaires à r dimensions, est une variété possédant une variété canonique d'ordre zéro. Nous avons établi cette propriété dans le cas particulier de deux espaces dans notre note *Sur les variétés de Segre représentant les couples de points de deux espaces à* n *dimensions* (*Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége*, 1938, pp. 592-594).

Désignons par G un groupe de n points pris un dans chacune des formes $s_1, s_2, \ldots, \sigma_n$.

Aux groupes G comprenant un point fixe S_1 de s_1, correspondent sur la variété de Segre $(s_1, s_2, \ldots, \sigma_n)$ les points de la variété de Segre à $2n-p-1$ dimensions représentant les groupes de $n-1$ points des formes $s_2, s_3, \ldots, \sigma_n$. Nous représenterons cette variété par la notation

$$(S_1, s_2, \ldots, s_p, \sigma_{p+1}, \ldots, \sigma_n).$$

Aux groupes G comprenant un point d'une droite fixe s_{p+1} de σ_{p+1}, correspondent sur la variété de Segre $(s_1, s_2, \ldots, \sigma_n)$ les points de la variété de Segre à $2n-p-1$ dimensions représentant les groupes de n points des formes $s_1, s_2, \ldots, s_p, s_{p+1}, \sigma_{p+2}, \ldots, \sigma_n$. Nous représenterons cette variété par la notation

$$(s_1, s_2, \ldots, s_p, s_{p+1}, \sigma_{p+2}, \ldots, \sigma_n).$$

Parmi les liaisons ponctuelles Σ se trouvent des liaisons ponctuelles dégénérées représentées analytiquement en égalant à zéro le produit de n formes linéaires respectivement par rapport aux coordonnées des points des formes $s_1, s_2, \ldots, s_p, \sigma_{p+1}, \ldots, \sigma_n$. En d'autres termes, si S_1 est un point de $s_1, \ldots, S_p$ un point de s_p, et s_{p+1} une droite de $\sigma_{p+1}, \ldots, s_n$ une droite de σ_n, la liaison ponctuelle dégénérée en question contient tous les groupes G comprenant soit un des points $S_1, S_2, \ldots, S_p$, soit un point d'une des droites $s_{p+1}, \ldots, s_n$. On en conclut que le système des sections hyperplanes de la variété de Segre $(s_1, s_2, \ldots, \sigma_n)$ peut être représenté par

$$\begin{gathered}|(S_1, s_2, \ldots, s_p, \sigma_{p+1}, \ldots, \sigma_n) + (s_1, S_2, s_3, \ldots, s_p, \sigma_{p+1}, \ldots, \sigma_n) + \ldots \\ + (s_1, s_2, \ldots, s_{p-1}, S_p, \sigma_{p+1}, \ldots, \sigma_n) + (s_1, s_2, \ldots, s_{p+1}, \sigma_{p+2}, \ldots, \sigma_n) \\ + \ldots + (s_1, s_2, \ldots, s_p, \sigma_{p+1}, \ldots, \sigma_{n-1}, s_n)|.\end{gathered}$$

Considérons la variété de Segre $(s_1, s_2, \ldots, s_p, \sigma_{p+1}, \ldots, \sigma_q)$ représentant les groupes de q points de $s_1, s_2, \ldots, s_p, \sigma_{p+1}, \ldots, \sigma_q$, $(q < n)$. Il est évident que la variété de Segre $(s_1, s_2, \ldots, s_p, \sigma_{p+1}, \ldots, \sigma_n)$ représente les groupes de $n-q+1$

points formés d'un point de la variété $(s_1, \ldots, \sigma_q)$ considérée et des $n-q$ plans $\sigma_{q+1}, \ldots, \sigma_n$. Considérons en particulier les points de la variété $(s_1, \ldots, \sigma_n)$ qui représentent les points d'une section hyperplane de $(s_1, \ldots, \sigma_q)$ et de σ_{q+1}, $\ldots, \sigma_n$. Ils forment une variété à $2\,n-p-1$ dimensions que nous représenterons par

$$\overline{(s_1, s_2, \ldots, s_p, \sigma_{p+1}, \ldots, \sigma_q}, \sigma_{q+1}, \ldots, \sigma_n).$$

En particulier, pour $q=p$, on obtiendra la variété

$$\overline{(s_1, s_2, \ldots, s_p, \sigma_{p+1}}, \ldots, \sigma_n)$$

qui représente les points d'une section hyperplane de la variété $(s_1, s_2, \ldots, s_p)$ et des $n-p$ plans $\sigma_{p+1}, \ldots, \sigma_n$.

Le système des sections hyperplanes de la variété $(s_1, s_2, \ldots, \sigma_n)$ pourra être représenté par

$$|\overline{(s_1, s_2, \ldots, s_p, \sigma_{p+1}, \ldots, \sigma_{n-1}}, \sigma_n) + (s_1, s_2, \ldots, \sigma_{n-1}, s_n)|.$$

Nous représenterons par

$$(s_1, s_2, \ldots, s_p, \sigma_{p+1}, \ldots, \sigma_n)_m$$

la variété à $2\,n-p-1$ dimensions, section de la variété $(s_1, \ldots, \sigma_n)$ par une hypersurface d'ordre m. Nous utiliserons une notation analogue pour représenter les sections des autres variétés considérées par la même hypersurface.

2. Considérons la section

$$(s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}, \sigma_n)_3 \tag{1}$$

de la variété $(s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}, \sigma_n)$ par une hypersurface cubique.

Sur cette variété existe un réseau

$$|(s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}, s_n)_3|$$

dont les variétés caractéristiques sont

$$(s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}, S_n)_3.$$

Nous avons démontré que les variétés canoniques de

$(s_1, s_2, \ldots, s_n)_3$ sont les sections hyperplanes de cette variété [1]. On a donc

$$|(s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}, s_n)_3'|$$
$$= |(s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}, s_n)_3 + \overline{(s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}}, \sigma_n)_3|.$$

Par conséquent, le système canonique de la variété (1) est

$$|\overline{(s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}}, \sigma_n)_3|.$$

Considérons maintenant la variété

$$(s_1, s_2, \ldots, s_{n-2}, \sigma_{n-1}, \sigma_n)_3. \tag{2}$$

Sur cette variété, nous avons un réseau

$$|(s_1, s_2, \ldots, s_{n-2}, s_{n-1}, \sigma_n)_3|,$$

deux variétés de ce réseau ayant en commun une variété

$$(s_1, s_2, \ldots, s_{n-2}, S_{n-1}, \sigma_n)_3.$$

Sur la variété (2), nous avons

$$|(s_1, s_2, \ldots, s_{n-2}, \sigma_n)_3'| = |\overline{(s_1, s_2, \ldots, s_{n-2}, \sigma_{n-1}}, \sigma_n)_3|.$$

Mais d'autre part, on a

$$|\overline{(s_1, s_2, \ldots, s_{n-2}, \sigma_{n-1}}, \sigma_n)_3| =$$
$$= |\overline{(s_1, s_2, \ldots, s_{n-2}}, \sigma_{n-1}, \sigma_n)_3 + (s_1, s_2, \ldots, s_{n-2}, s_{n-1}, \sigma_n)_3|.$$

Par conséquent, le système canonique de la variété (2) est

$$|\overline{(s_1, s_2, \ldots, s_{n-2}}, \sigma_{n-1}, \sigma_n)_3|.$$

3. Supposons que le système canonique de la variété

$$(s_1, s_2, \ldots, s_p, \sigma_{p+1}, \ldots, \sigma_n)_3 \tag{3}$$

soit le système

$$|\overline{(s_1, s_2, \ldots, s_p}, \sigma_{p+1}, \ldots, \sigma_n)_3|$$

et considérons la variété

$$(s_1, s_2, \ldots, s_{p-1}, \sigma_p, \ldots, \sigma_n)_3. \tag{4}$$

---

[1] *Sur les variétés appartenant à la variété de Segre...* (*loc. cit.*).

Sur cette variété, le réseau

$$|(s_1, s_2, \ldots, s_{p-1}, s_p, \sigma_{p+1}, \ldots, \sigma_n)_3|$$

a comme variétés caractéristiques les variétés

$$(s_1, s_2, \ldots, s_{p-1}, S_p, \sigma_{p+1}, \ldots, \sigma_n)_3.$$

Sur la variété (4), on a

$$\begin{aligned} &|(s_1, s_2, \ldots, s_{p-1}, s_p, \sigma_{p+1}, \ldots, \sigma_n)_3'| \\ =\,&|\overline{(s_1, s_2, \ldots, s_{p-1},} \sigma_p, \sigma_{p+1}, \ldots, \sigma_n)_3| \\ =\,&|(s_1, s_2, \ldots, s_{p-1}, s_p, \sigma_{p+1}, \ldots, \sigma_n)_3 \\ +\,&\overline{(s_1, s_2, \ldots, s_{p-1},} \sigma_p, \sigma_{p+1}, \ldots, \sigma_n)_3|. \end{aligned}$$

Par conséquent, le système canonique de la variété (4) est

$$|\overline{(s_1, s_2, \ldots, s_{p-1},} \sigma_p, \sigma_{p+1}, \ldots, \sigma_n)_3|.$$

La propriété admise pour la variété (3) est donc vraie pour la variété (4), en remplaçant p par $p-1$. Or, cette propriété est vraie pour $p=n-1$, $p=n-2$, donc elle est vraie pour toute valeur de p.

Reprenons la variété (3) et considérons la variété de Segre

$$(s_1, s_2, \ldots, s_p). \tag{5}$$

Les groupes de $n-p+1$ points d'une section hyperplane de la variété (5) et des plans $(\sigma_{p+1}, \ldots, \sigma_n)$ ont pour homologues, sur $(s_1, s_2, \ldots, s_p, \sigma_{p+1}, \ldots, \sigma_n)$, les points d'une variété à $2n-p-1$ dimensions découpant, sur $(s_1, s_2, \ldots, \sigma_n)_3$, une variété canonique de cette variété.

Supposons en particulier $p=1$. On a

$$\overline{(s_1,} \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_n)_3 = (S_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_n)_3.$$

Les variétés canoniques de

$$(s_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_n)_3$$

sont donc découpées par les variétés qui représentent les groupes de n points de $s_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ dont le point situé sur s_1 est fixe. Le système canonique de la variété précédente est donc un faisceau.

4. Envisageons maintenant la section

$$(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)_3 \tag{6}$$

de la variété de Segre représentant les points de n plans par une hypersurface cubique.

Considérons, sur la variété (6), le réseau

$$|(s_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_n)_3|. \tag{7}$$

Les variétés caractéristiques de ce réseau sont

$$|(S_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_n)_3|,$$

c'est-à-dire précisément les variétés canoniques des variétés du réseau. Par conséquent, le réseau (7) est son propre adjoint et les variétés canonique et pluricanoniques de la variété (6) sont d'ordre zéro.

Cette propriété est vraie pour n quelconque; pour $n = 2$, nous retrouvons un résultat établi antérieurement [1].

5. Désignons par V l'intersection de la variété (6) avec une hypersurface d'ordre m. Cette variété V appartient à un système linéaire qui est son propre adjoint, donc les variétés canoniques de V sont découpées sur cette variété par les hypersurfaces d'ordre m.

Cela étant, considérons la variété

$$(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)_m. \tag{8}$$

Les hypersurfaces cubiques découpent, sur cette variété, un système linéaire $|V|$ dont l'adjoint, $|V'|$, est découpé par les hypersurfaces d'ordre m. Il en résulte que le système canonique de la variété (8) est découpé par les hypersurfaces d'ordre $m-3$.

On en déduit en particulier que la variété

$$(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)_2$$

est dépourvue de variétés canoniques.

---

[1] *Sur une surface canonique appartenant à la variété de Segre représentant les couples de points de deux plans* (*Bulletins de l'Académie royale de Belgique*, 1936, pp. 1223-1225).

6. Revenons à la variété

$$(s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_p,\ \sigma_{p+1},\ \ldots,\ \sigma_n)_3.$$

Le nombre de variétés canoniques de cette variété est égal au nombre des sections hyperplanes de la variété

$$(s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_p).$$

Or, celle-ci appartient à un espace à 2^p-1 dimensions. Par conséquent, le genre géométrique de la variété en question est $P_g=2^p$.

Liége, le 25 décembre 1938.
