EXTRAIT DU *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liège*,
Février 1938, n° 2.

Sur les surfaces algébriques de genres un et de rang six,

par LUCIEN GODEAUX, Membre de la Société.

Dans des travaux antérieurs [1], nous avons étudié les involutions de genres un ($p_a = P_4 = 1$) et d'ordre six, appartenant à une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$), et nous avons construit des surfaces normales images de ces involutions, c'est-à-dire des surfaces de genres un et de rang six. Nous étions assuré de l'existence d'involutions de cette nature; MM. Enriques et Severi, d'une part [2], MM. Bagnera et De Franchis, d'autre part [3], ont en effet construit des surfaces hyperelliptiques de rang douze et on sait que de telles surfaces représentent des involutions d'ordre six appartenant à des surfaces de genres un. Il n'est peut-être pas sans intérêt de montrer l'existence de surfaces de genres un et de rang six qui ne soient pas hyperelliptiques; c'est ce que nous nous proposons de faire dans cette note.

1. Rappelons tout d'abord qu'une involution I_6 d'ordre six et de genres un appartenant à une surface F de genres un ne peut posséder qu'un nombre fini de points unis, à savoir :

1° Deux points unis sextuples;
2° Deux groupes de deux points unis triples;
3° Deux groupes de trois points unis doubles.

On peut prendre pour surface normale de genres un et de rang six, c'est-à-dire comme image de l'involution I_6, une surface Φ, d'ordre $2\pi - 2$, à sections hyperplanes de genre π, d'un espace linéaire à π dimensions, possédant :

1° Deux points doubles biplanaires à chacun desquels sont

---

(1) Mémoire sur les involutions appartenant à une surface de genres un (*Ann. de l'École norm. sup.*, 1914, pp. 357-430; 1919, pp. 51-70); Recherches sur les correspondances rationnelles du sixième ordre entre deux surfaces de genres un (*Mém. de la Soc. roy. des Sc. de Liége*, 1928, pp. 1-42); *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Paris, Hermann, 1935).

(2) Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques (*Acta Mathematica*, 1909, t. XXXII, pp. 283-392; t. XXXIII, pp. 321-403).

(3) Le superficie algebriche le quali ammettono una rappresentazione mediante funzioni iperellittiche di due argomenti (*Mem. Soc. Ital. delle Scienze*, 1908, pp. 251-343); Le nombre ρ de M. Picard pour les surfaces hyperelliptiques et les surfaces irrégulières de genre zéro (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 1910, t. XXX, pp. 185-238).

infiniment voisins successifs deux points doubles dont le dernier est conique (points de diramation sextuple);

2° Deux points doubles biplanaires ordinaires (points de diramation triple);

3° Deux points doubles coniques (points de diramation double).

2. Considérons dans un plan l'homographie de période trois

$$\mathrm{H} = \begin{pmatrix} x_2 & x_3 & x_1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

et la transformation quadratique involutive

$$\mathrm{T} = \begin{pmatrix} x_2x_3 & x_3x_1 & x_1x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}.$$

Ces deux transformations sont permutables, et si l'on pose

$$\theta = \mathrm{H}\cdot\mathrm{T} = \mathrm{T}\cdot\mathrm{H},$$

on a

$$\theta^2 = \mathrm{H}^2,\quad \theta^3 = \mathrm{T},\quad \theta^4 = \mathrm{H},\quad \theta^5 = \mathrm{H}^2\mathrm{T} = \mathrm{T}\mathrm{H}^2,\quad \theta^6 = 1.$$

La transformation θ, ou les transformations H, T, engendrent donc dans le plan une involution I_6' d'ordre six.

L'involution I_6' possède trois groupes de points unis :

1° Le point uni sextuple A(1, 1, 1);

2° Un groupe de deux points unis triples $\mathrm{B}_1(1, \varepsilon, \varepsilon^2)$, $\mathrm{B}_2(1, \varepsilon^2, \varepsilon)$, où ε est une racine cubique primitive de l'unité;

3° Un groupe de trois points unis doubles $\mathrm{C}_1(1, -1, -1)$, $\mathrm{C}_2(-1. 1, -1)$, $\mathrm{C}_3(-1, -1, 1)$.

La courbe du sixième ordre D, d'équation

$$\begin{aligned} &a_1[x_1^4(x_2^2+x_3^2)+x_2^4(x_3^2+x_1^2)+x_3^4(x_1^2+x_2^2)] \\ &+a_2[x_2x_3(x_1^4+x_2^2x_3^2)+x_3x_1(x_2^4+x_3^2x_1^2)+x_1x_2(x_3^4+x_1^2x_2^2)] \\ &+a_3x_1x_2x_3[x_1(x_2^2+x_3^2)+x_2(x_3^2+x_1^2)+x_3(x_1^2+x_2^2)]+a_4x_1^2x_2^2x_3^2=0 \end{aligned}$$

est transformée en elle-même par H, T et θ; elle ne passe par aucun des points unis de l'involution I_6' et possède, aux sommets du triangle de référence, des points doubles ordinaires.

Le plan double F, ayant comme courbe de diramation la courbe D, est de genres un $(p_a = \mathrm{P}_4 = 1)$ A l'involution I_6' correspond sur ce plan double une involution I_6 d'ordre six, ayant deux points unis sextuples A_1, A_2, correspondant au point A; deux groupes de deux points unis triples B_{11}, B_{21} et B_{12}, B_{22} correspondant à B_1. B_2; enfin deux groupes de trois points unis doubles C_{11}, C_{21}, C_{31} et C_{12}, C_{22}, C_{32} correspondant à C_1, C_2, C_3.

L'involution I_6 est par conséquent de genres un et nous allons en construire une surface image.

3. Commençons par construire une surface cubique double image de l'involution I_2 engendrée sur F par la transformation T. A cet effet, rapportons projectivement le système linéaire

$$\lambda_1 x_1 (x_2^2 + x_3^2) + \lambda_2 x_2 (x_3^2 + x_1^2) + \lambda_3 x_3 (x_1^2 + x_2^2) + \lambda_4 x_1 x_2 x_3 = 0$$

aux plans de l'espace, en posant

$$\frac{y_1}{x_1 (x_2^2 + x_3^2)} = \frac{y_2}{x_2 (x_3^2 + x_1^2)} = \frac{y_3}{x_3 (x_1^2 + x_2^2)} = \frac{y_4}{x_1 x_2 x_3}.$$

L'élimination des x entre ces équations nous donne la surface cubique

$$y_4 (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - y_1 y_2 y_3 - 4 y_4^3 = 0, \tag{1}$$

possédant quatre points doubles coniques correspondant aux points A, C_1, C_2, C_3 (¹).

A la courbe D correspond sur la surface (1) la courbe découpée par la quadrique

$$\left.\begin{aligned} &a_1 (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 6 y_1 y_2 y_3) \\ &+ a_2 [y_2 y_3 + y_3 y_1 + y_1 y_2 - y_4 (y_1 + y_2 + y_3)] \\ &+ a_3 y_4 (y_1 + y_2 + y_3) + a_4 y_4^2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

La surface cubique (1) double, ayant comme courbe de diramation la courbe découpée sur la surface par la quadrique (2), représente l'involution I_2.

Il revient au même de dire que la surface cubique double est représentée par l'équation (1) et par l'équation

$$\left.\begin{aligned} y_0^2 = {} & a_1 (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) + a_2 (y_2 y_3 + y_3 y_1 + y_1 y_2) \\ &+ (a_3 - a_2) y_4 (y_1 + y_2 + y_3) + (a_4 - 6 a_1) y_4^2. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Interprétons y_0, y_1, y_2, y_3, y_4 comme coordonnées des points d'un espace linéaire S_4 à quatre dimensions. Les équations (1) et (3) représentant dans cet espace une surface normale Ψ, de genres un, image de l'involution I_2.

A l'involution I_6 correspond sur la surface Ψ une involution I'_3, d'ordre trois, engendrée par l'homographie

$$H' = \begin{pmatrix} y_0 & y_2 & y_3 & y_1 & y_4 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{pmatrix}.$$

(¹) Voir notre note « Sur l'inversion et sur une surface cubique à quatre points doubles » (*Mathesis*, 1922, pp. 19-23).

Cette homographie possède comme axes ponctuels le plan

$$y_1 = y_2 = y_3 \tag{4}$$

et les points $P_1(0, 1, \varepsilon, \varepsilon^2, 0)$, $P_2(0, 1, \varepsilon^2, \varepsilon, 0)$ Ces deux derniers points n'appartiennent pas à la surface Ψ et les points unis de l'involution I_3 sont donc situés dans le plan (4).

4. Les hyperplans

$$\lambda_0 y_0 + \lambda_1 (y_1 + y_2 + y_3) + \lambda_2 y_4 = 0$$

passant par les points P_1, P_2 découpent sur la surface Ψ un réseau de courbes de degré six, composé au moyen de l'involution I_3'. Nous obtiendrons donc un plan double Φ, image de l'involution I_3' et par suite de l'involution I_6, en rapportant projectivement ces hyperplans aux droites d'un plan. Posons donc

$$\frac{z_0}{y_0} = \frac{z_1}{y_1 + y_2 + y_3} = \frac{z_2}{y_4}.$$

La courbe de diramation Δ du plan double Φ a pour équation

$$(2a_1 - a_2)[(2a_1 - a_2)(z_1 + 3z_2)(z_1 - 6z_2)^2 \\ - 3(z_1 + 6z_2)\varphi]^2 - 4\varphi^3 = 0,$$

où l'on a posé

$$\varphi \equiv 3z_0^2 - (a_1 + a_2)z_1^2 + 3(a_2 - a_3)z_1 z_2 + 3(6a_1 - a_4)z_2^2.$$

Aux points unis sextuples A_1, A_2 de l'involution I_6 correspondent les points communs à la droite et à la conique

$$z_1 \quad 6z_2 = 0, \quad \varphi = 0;$$

en chacun de ces points, la courbe Δ possède un point double auquel sont infiniment voisins successifs deux points doubles, comme nous le prouverons dans un instant.

Aux couples de points unis triples B_{11} et B_{21}, B_{12} et B_{22} de I_6 correspondent les points

$$z_1 + 3z_2 = 0, \quad \varphi = 0,$$

qui sont les points de rebroussement de la courbe Δ

Aux deux ternes de points unis doubles C_{11}, C_{21}, C_{31} et C_{12}, C_{22}, C_{32} correspondent les points

$$z_0 : z_1 : z_2 = \pm\sqrt{6a_1 - 2a_2 - 2a_3 + a_4} : 2 : -1,$$

qui sont doubles pour la courbe de diramation Δ.

5 La courbe Δ appartient à un faisceau déterminé par une cubique comptée deux fois et une conique comptée trois fois. Aux points correspondant à A_1, A_2, cette cubique et cette conique sont tangentes. Il s'agit de montrer que la courbe Δ a trois points doubles infiniment voisins successifs en chacun de ces points.

On peut toujours, par un changement de figure de référence, ramener l'équation de la courbe Δ à la forme

$$\left.\begin{array}{c}[x_3^2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3) + x_1x_2(b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)]^2 \\ - a\,(x_3^2 - x_1x_2)^3 = 0.\end{array}\right\} \quad (1)$$

Effectuons la transformation quadratique

$$x_1 : x_2 : x_3 = y_1^2 : y_2y_3 : y_1y_3.$$

On obtient la courbe

$$\left.\begin{array}{c}[y_1^2y_3(a_1y_1^2 + a_2y_2y_3 + a_3y_1y_3) + y_1^2y_2(b_1y_1^2 + b_2y_2y_3 + b_3y_1y_3)]^2 \\ - a y_1^6y_3(y_3 - y_2)^3 = 0.\end{array}\right\} \quad (2)$$

Au point infiniment voisin sur la droite $x_2 = 0$ du point $(x_2 = x_3 = 0)$, double pour la courbe (1), correspond le point $(y_2 = y_3 = 0)$, double pour la courbe (2). Les tangentes à cette courbe en ce point sont confondues en la droite

$$a_1y_3 + b_1y_2 = 0.$$

Il est facile de voir que cette droite coupe la courbe (2) en quatre points confondus en $(y_2 = y_3 = 0)$; ce point est donc un tacnode pour cette courbe. Il en résulte que la courbe (1) a, en $(x_2 = x_3 = 0)$, un point double auquel sont infiniment voisins successifs deux points doubles.

6. En résumé, *le plan double de genres un Φ possède une courbe de diramation Δ du sixième ordre ayant deux points doubles à chacun desquels sont infiniment voisins successifs deux points doubles; deux points de rebroussement et deux points doubles ordinaires. Cette surface est de rang six.*

Liége, le 3 février 1938.

M. HAYEZ, Imprimeur de l'Académie royale de Belgique, rue de Louvain, 112, Bruxelles.